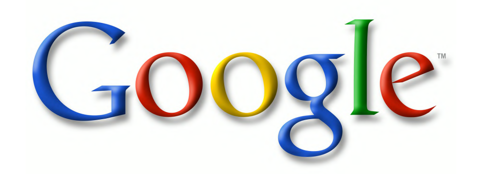
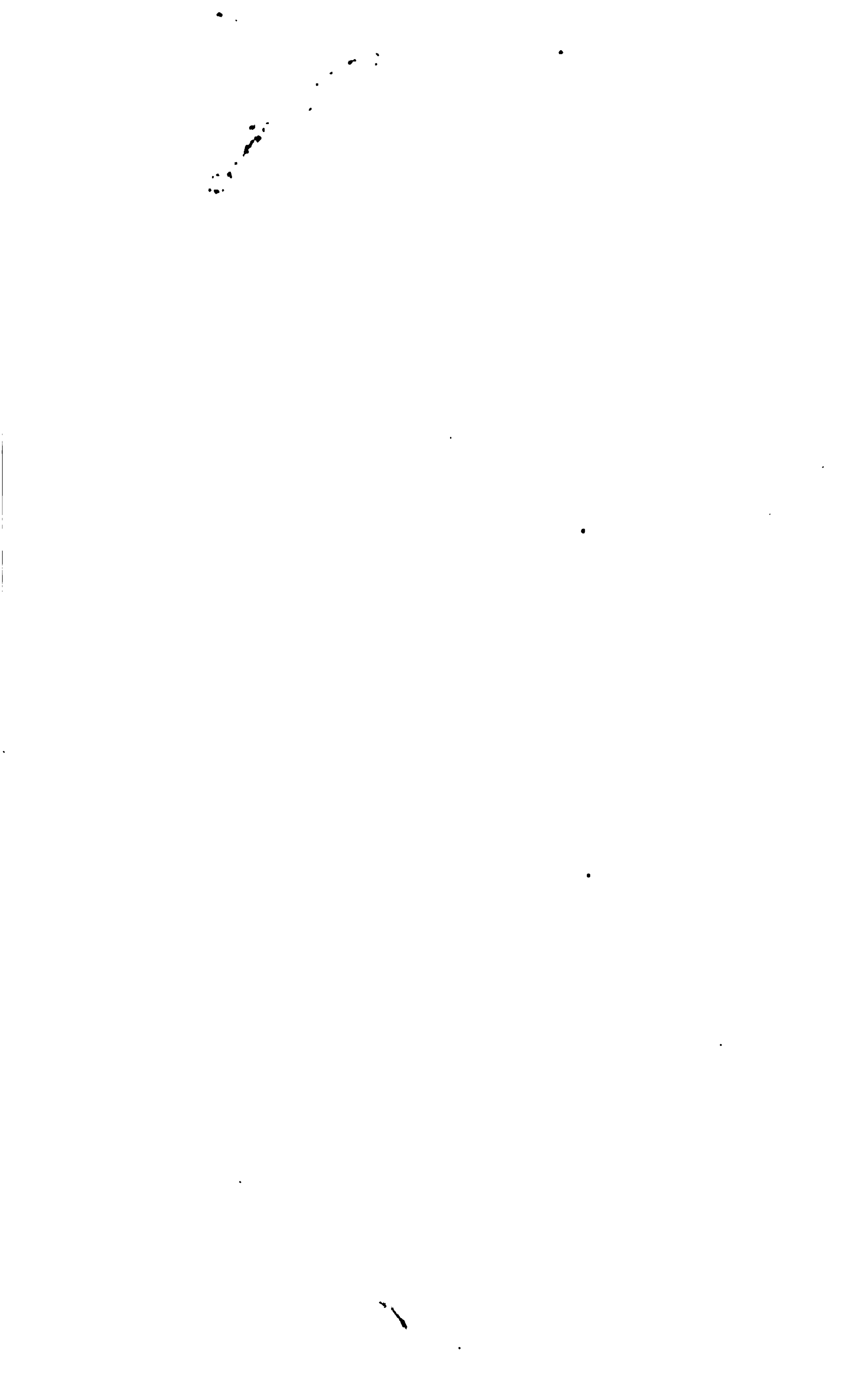
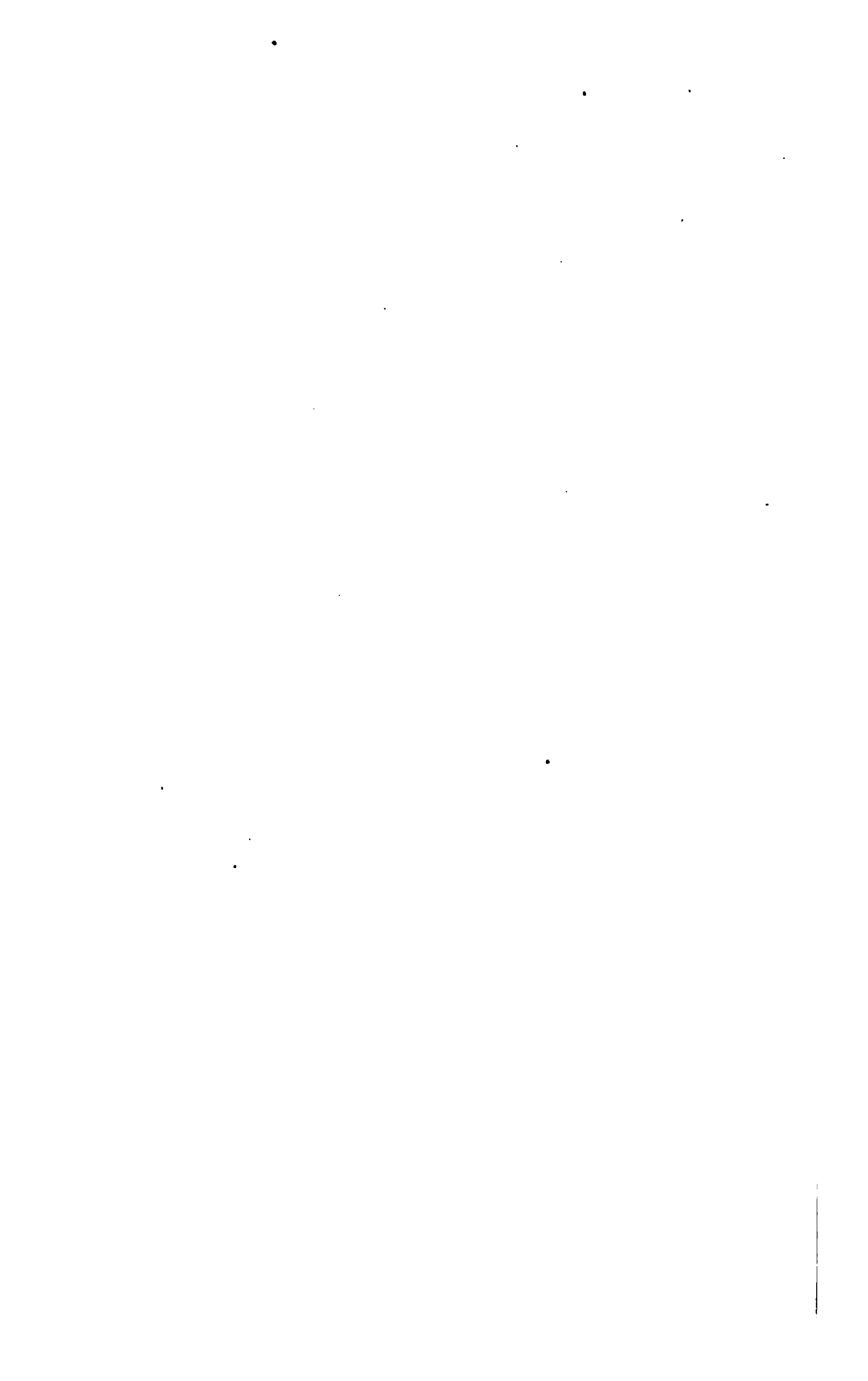
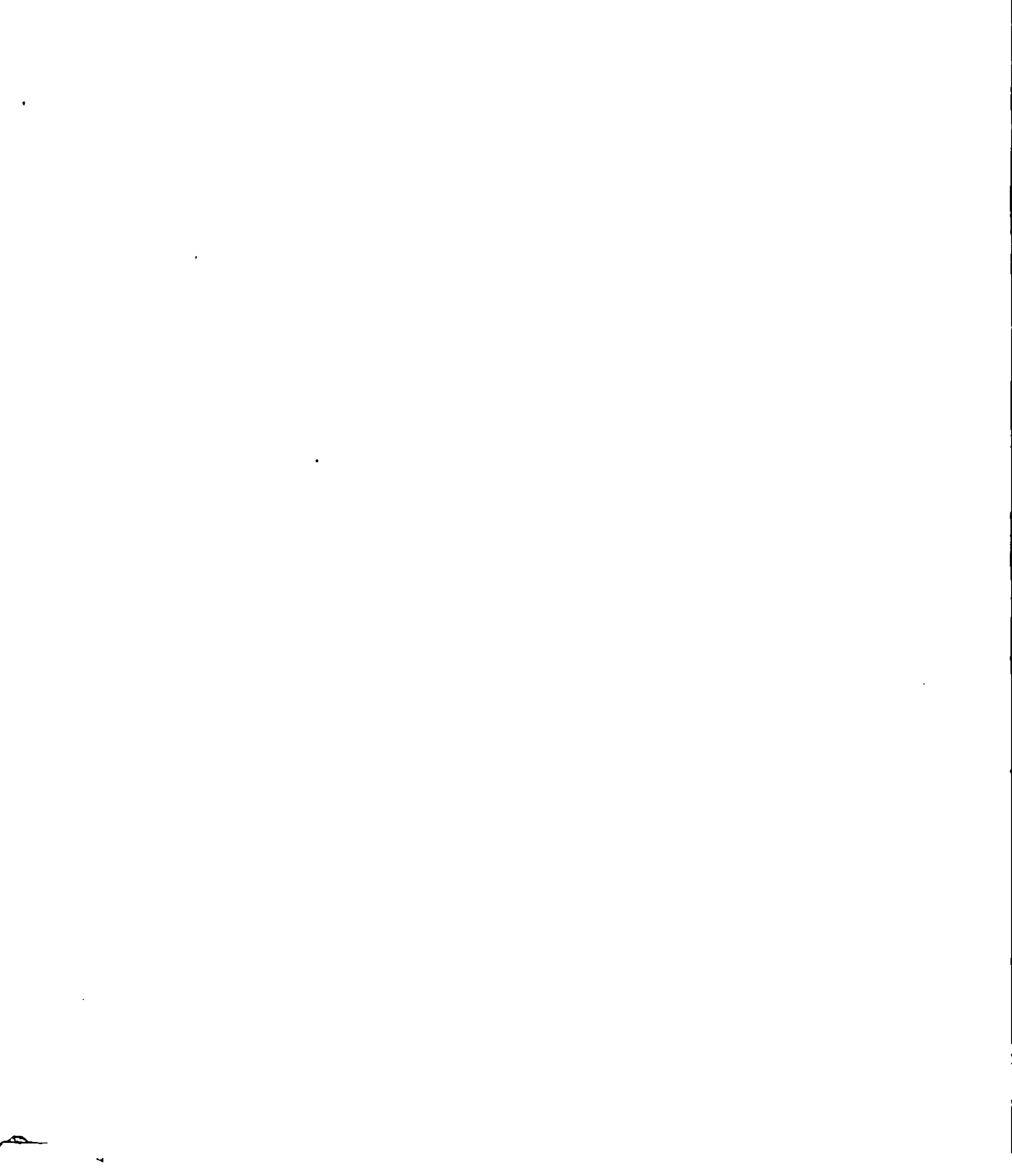



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ECCLESIAE









51 2

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

EINUNDFÜNFZIGSTER BAND.



WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1865.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LI. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1865. — HEFT I BIS V.

(Mit 21 Tafeln und 5 Holzschnitten.)

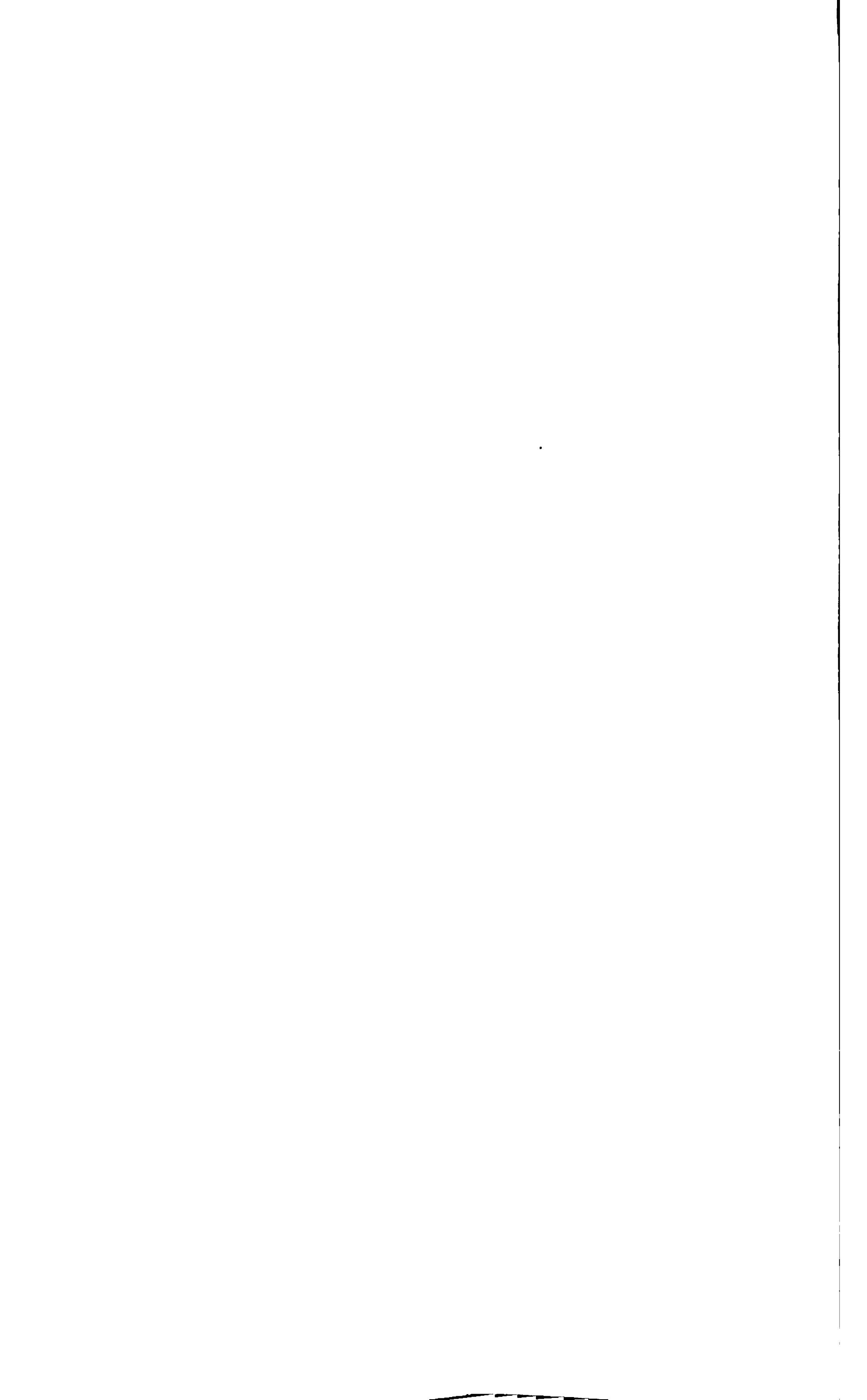
WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1865.

INHALT.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LI. BAND. I. UND II. HEFT.

Jahrgang 1865. — Jänner u. Februar.

(Mit 6 Tafeln und 4 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER KAIS. KÖN. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1865.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER

Verbesserungen

zur Abhandlung: „Die Auflösung des sphärischen Dreieckes durch seine drei Höhen“, von Franz Unferdinger.

Seite 98, Zeile 13 von oben statt $x-y$, lies $y-x$.
„ 109, „ 3 und 7 von oben statt $u-v$, lies $v-u$.
„ — „ 10 von oben statt $x-y$, lies $y-x$.
„ — „ 9 „ unten sind die mittleren Zeichen + und — zu vertauschen.

I.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

I. SITZUNG VOM 5. JÄNNER 1865.

Der Präsident gedenkt in einer Ansprache des Ablebens des ältesten Ehrenmitgliedes der Akademie, Sr. kaiserlichen Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Joseph, und ladet die Classe ein, ihr Beileid und ihre dankbare Verehrung für den hohen Verblichenen durch Aufstehen kund zu geben. Sämmtliche Anwesende erheben sich, dieser Einladung folgend, von ihren Sitzen.

Der Secretär legt eine am 29. December v. J. eingegangene Bewerbungsschrift um den Ig. L. Lieben'schen Preis vor, betitelt: „Über die Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit, welche entweder: 1. durch eine kreisförmige, horizontal liegende Öffnung in dem Boden eines Behälters, oder 2. durch eine gerade Röhrenleitung mit kreisförmigem Querschnitt und starren Wänden abfliesst."

Herr Karl Moshammer, Lehrer an der k. k. Oberrealschule zu Klagenfurt, übersendet eine Abhandlung: „Zur Theorie eines Systems von Varianten der conoidischen Propellerschraube".

Herr Prof. V. Ritt. v. Zepharovich in Prag übermittelt eine Abhandlung „über Bournonit, Malachit und Korynit von Olsa in Kärnten."

Herr Jos. Loschmidt, Lehrer an der Realschule in der Leopoldstadt, legt eine Abhandlung: „Krystallmessungen einiger Oxalsäure-Verbindungen vor."

Herr Dr. S. Stricker, Privatdocent und Assistent am physiologischen Institute der Wiener Universität, überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Untersuchungen über die capillaren Blutgefässe in der Nickhaut des Frosches".

Herr Dr. H. W. Reichardt, Privatdocent für Botanik an der Wiener Universität, übergibt eine Abhandlung, welche den Titel führt: „*Aecidium Anisotomes*. Ein neuer Brandpilz".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, Königl. Bayerische, zu München: Sitzungsberichte. 1864. I. Heft 4 & 5; 1864. II. Heft. 1. München; 8°·

— Kais. Russische: Mémoires. VII° Série. Tome V. Nr. 2, 4—9 Tome VI. Nr. 1—12. St. Pétersbourg. 1863; 4°· — Bulletin. Tome V. Nr. 3—8; Tome VI. Nr. 1—5; Tome VII. Nr. 1—2. St. Pétersbourg. 1863 & 1864; 4°·

Annalen der Chemie und Pharmacie von Wöhler, Liebig und Kopp. N. R. Band LVI., Heft 1 & 2. Leipzig und Heidelberg, 1864; 8°·

Apotheker-Verein, allgem. österreichischer: Österreichische Zeitschrift für Pharmacie. Jahrg. 1862. Wien; 8°· — Zeitschrift. 2. Jahrg. Nr. 24. Wien. 1864; 8°· — Bericht über die General-Versammlungen 1861, 1862, 1863 & 1864. Wien, 1862—1864; 8°·

Astronomische Nachrichten. Nr. 1505—1507. Altona, 1864; 4°·

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XXI. Nr. 82—83. Génève, Lausanne, Neuchatel, 1864; 8°·

Bureau de la recherche géologique de la Suède: Carte géologique de la Suède accompagnée de renseigements. Livraisons 6—13. Folio & 8°·

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LIX. Nr. 23—25. Paris, 1864; 4°·

Cosmos. XIII° Année, 25° Volume, 24°—26°. Livraisons. Paris, 1864; 8°·

Gesellschaft, physikalisch-medicinische: Würzburger medicinische Zeitschrift. V. Bd., 2 & 3. Heft; Würzburger naturwissenschaftliche Zeitschrift. IV. Bd., 2. & 3. Heft; V. Bd., 1. & 2. Heft. Würzburg, 1863 & 1864; 8°·

— physikalisch-ökonomische, zu Königsberg: Schriften. V. Jahrg. 1864. I. Abtheilung. Königsberg, 1864; 4°·

Gewerbe-Verein, nieder-österr.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 1. Wien, 1865; 8°·

Grunert, Joh. Aug., Archiv der Mathematik und Physik. XLII. Theil, 3 & 4. Heft. Greifswald, 1864; 8°·

Helmholtz, H., Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. (Zweite Ausgabe.) Braunschweig, 1865; 8°.

Institut, k. k. militärisch-geographisches, in Wien: Generalkarte vom südwestlichen Deutschland. (12 Blätter). Wien, 1865; Folio.

Instituto histórico, geográphico e ethnográphico do Brasil. Revista trimensal. Tomo XXVI; Tomo XXVII, Parte 1ª. Rio de Janeiro, 1863 & 1864; 8°.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie von Heinrich Will. Für 1863. II. Heft. Giessen, 1864; 8°.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XIV. Jahrg. 1864. Nr. 36. XV. Jahrg. 1865, Nr. 1. Wien; 4°.

Mittheilungen des k. k. Artillerie-Comité. Jahrg. 1864. IX. Bd., 3. Heft. Wien; 8°.

— aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Jahrg. 1864, X & XI. Heft. Gotha; 4°.

Mondes. 2ᵉ Année, Tome VI, 16ᵉ—18ᵉ Livraisons. Paris, Tournai, Leipzig, 1854; 8°.

Moniteur scientifique. 192ᵉ Livraison. Tome VIᵉ, Année 1864. Paris; 4°.

Murchison, Sir Roderik J., On the relative Powers of Glaciers and floating Icebergs in modifying the Surface of the Earth. (From the Address of the President of the Royal Geograph. Society. May 23, 1864.) London, 1864; 8°.

Museum Francisco-Carolinum: 24. Bericht. Linz, 1864; 8°.

Observatoire physique central de Russie: Annales. Années, 1860 & 1861. St. Pétersbourg, 1863 & 1864; 4°. — Correspondance météorologique. Années 1861 & 1862. St. Pétersbourg, 1863 & 1864; 4°. — Compte-rendu annuel. Années, 1861—1863. St. Pétersbourg, 1862—1864; 4°.

Reader. Nr. 103—105, Vol. IV. London, 1864; Folio.

Sanna Solaro, J. M., Mémoire sur le prémier bassin de Dinothérium découvert dans le département de la Haute-Garonne. Toulouse, 1864; 8°.

Society, the Royal, of London: Proceedings. Vol. XIII. Nr. 65—67. London, 1864; 8°.

— the Asiatic, of Bengal: Journal Nr. 2, 1864. Calcutta; 8°.

Society, the Royal Geographical: Journal. Vol. XXXIII. 1863. London; 8°. — Proceedings. Vol. VIII, Nr. 5. London 1864; 8°.

— the Chemical: Journal. Ser. 2, Vol. II. July, August, September 1864. London; 8°.

Strauch, G. W., Praktische Anwendungen für die Integration der totalen und partialen Differentialgleichungen. I. Band. Braunschweig, 1865; 8°.

Verein, siebenbürgischer, für Beförderung der nationalen Literatur und Cultur des romanischen Volkes: Jahrbuch 1862. Hermannstadt; 8°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XIV. Jahrg. Nr. 51—53; XV. Jahrg. Nr. 1. Wien, 1864 & 1865; 4°.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. Nr. 4. Gratz, 1864; 4°.

Zeitschrift für Chemie und Pharmacie von Erlenmeyer. VII. Jahrg. Nr. 20—22. Heidelberg, 1864; 8°.

Krystallbestimmungen einiger Oxalsäure-Verbindungen.

Von J. Loschmidt.

(Mit 1 Tafel.)

Als eines der wichtigsten Fundamente einer künftigen Moleculartheorie wird wohl mit Recht die Bestimmung von Krystallgestalten, namentlich organischer Substanzen, angesehen. Bereits liegt ein bedeutendes Materiale vor — die theoretischen Resultate jedoch, welche man bisher aus demselben gewonnen, sind nicht von grossem Belange. Die Schuld scheint zumeist darin zu liegen, dass einerseits wenig grössere Gruppen chemisch verwandter Stoffe gemessen sind, andererseits aber gerade diejenigen Verbindungen fehlen, deren innere Constitution verhältnissmässig am sichersten ermittelt ist. Es ist ohne Zweifel ein Unglück, dass gerade die niederen Kohlenwasserstoffe, Alkohole, Aldehyde und einbasischen Säuren, deren Constitutionsformeln nahezu für die ganze organische Chemie massgebend sind, gar nicht, oder nur schlecht krystallisiren. Man ist darauf angewiesen, einzelne Partien in dieser Gegend aufzusuchen, welche diesem Übelstande weniger ausgesetzt sind, und diese möglichst erschöpfend zu bearbeiten.

Als solche scheinen sich erstens die Verbindungen der Oxalsäure und der ihr verwandten Säuren, und zweitens die grosse Classe der zusammengesetzten Harnstoffe darzubieten.

Von solchen Betrachtungen geleitet, habe ich mich bereits geraume Zeit mit Krystallbestimmungen von Körpern der ersteren Gruppe beschäftigt, und nehme mir hiemit die Freiheit, der hochverehrten Classe einen Theil dieser Arbeit vorzulegen.

Was die gewählte Nomenclatur und die Figuren betrifft, so war für mich der Vorsatz massgebend, mich möglichst genau an das berühmte Werk von Rammelsberg anzuschliessen — was also die Anwendung des Weiss'schen Systems bedingte. Andererseits wollte ich die Vortheile der Miller'schen Methode und ihre

täglich wachsende Ausbreitung nicht ausser Acht lassen, und habe desshalb die Flächensymbole nach beiden Systemen angeführt.

I. Oxalsäure $\mathrm{C_2H_2O_4}$.

Zweigliedrig (isoclin) $a:b:c = 0{\cdot}868:1:0{\cdot}897$.

Die durch Eintragen der entwässerten Säure in erwärmte, höchst concentrirte Salpetersäure und langsames Abkühlen erhaltenen Krystalle sind Rhombenoktaëder *o* in Combination mit der Hexaidfläche *b*. Dieselben sind sehr glänzend, werden aber an der Luft rasch trübe. Die Messungen sind daher nur annähernd. Bei längerem Hinstellen der Lösung erhält man oft Krystalle von Haselnussgrösse. Im Habitus stimmen sie ganz mit den durch Sublimation erhaltenen mikroskopischen Kryställchen überein. Die hiebei zugleich auftretenden vierseitigen, an den Enden zugespitzt verlaufenden Nadeln scheinen aus einander gereihten Oktaëdern zu bestehen, der Prismenwinkel derselben beträgt nahe 101°.

Spaltbarkeit: vollkommen nach *a*.

Flächen: $b = \infty a : b : \infty c = 0,1,0$
$o = a : b : c = 1,1,1.$

	Berechnet.	Beobachtet.
$o:o$ in der Kante ac =		119°20'*
— — — — bc =		109° *
— — — — ab =	100°34'	101° 4'.

2. Oxalsaures Methyl $\mathrm{C_4H_6O_4}$.

Zwei- und eingliedrig (monoclin) $a:b:c = 0{\cdot}332:1:0{\cdot}52258$ $o = 76°38'$.

Combinationen eines rhombischen Prisma *p* oder des zweifach schärferen $2p$ mit der Hexaidfläche *b*. Das Ende wird gebildet durch das zweite Paar *q*, an dessen statt oft das zweifach schärfere q^2 auftritt. Die Krystalle sind tafelförmig durch Vorherrschen von *b*. Sie sind fasrig und voll Sprünge parallel der Hauptaxe *c*.

Spaltbarkeit: gut nach *b*. (Fig. 1.)

Flächen: $b = \infty a : b : \infty c = 0,1,0$
$p = a : b : \infty c = 1,1,0$
$2p = 2a : b : \infty c = 1,2,0$
$q = \infty a : b : c = 0,1,1$
$q^2 = \infty a : b : 2c = 0,2,1.$

	Berechnet.	Beobachtet.
$p : p =$		144°12'*
$q : q =$		126° 6'*
$p : q =$		109°36'*
$2p : 2q =$	114°16'	113°52' circa
$q^2 : q^2 =$	89° 2'	89°
$p : q^2 =$	111°56'	111°52'
$p : q'^2 =$	86°17'	86°48'.

3. Oxalsaurer Harnstoff $C_4H_{10}N_4O_6$.

Zwei- und eingliedrig (monoclin) $a:b:c = 0\cdot56415:1:0\cdot41062$; $0 = 82°10'$.

Rhombische Prismen *p* mit Abstumpfung der scharfen Kanten durch *b*.

Das Ende wird gebildet durch das zweite Paar *q* und das hintere Augitpaar *o'*.

An die Stelle von *p* tritt oft 2*p*, und manchmal kommen auch — jedoch sehr untergeordnet — die schiefen Endflächen *c* und r'^2 vor.

Selten ist der Habitus der eines sechsseitigen Prisma *b*, *p* mit der Endigung *q*.

Meist sind die Krystalle tafelförmig durch Vorherrschen von *b*.

Spaltbarkeit: ausgezeichnet nach r'^2. (Fig. 2.)

Flächen:				
$b =$	$\infty a :$	$b :$	$\infty c =$	0,1,0
$c =$	$\infty a :$	$\infty b :$	$c =$	0,0,1
$p =$	$a :$	$b :$	$\infty c =$	1,1,0
$2p =$	$2a :$	$b :$	$\infty c =$	1,2,0
$q =$	$\infty a :$	$b :$	$c =$	0,1,1
$o' =$	$a' :$	$b :$	$c =$	— 1,1,1
$r'^2 =$	$a' :$	$\infty b :$	$2c =$	— 2,0,1.

	Berechnet.	Beobachtet.
$b : p =$		119°12'*
$c : r'^2 =$		119° 4'*
$p : r'^2 =$		134°16'*
$b : 2p =$	138°11'	138°
$b : q =$	112° 8'	112°16'
$c : p =$	96°50'	97°
$c : 2p =$	95°13'	95°20'
$c : q =$	157°52'	157°50'
$p : 2q =$	161° 1'	161°
$2p : q =$	111°24'	111°28'

	Berechnet.	Beobachtet.
$q : r'^3$	$= 116°45'$	116°48'
$o' : b$	$= 109°25'$	109° 8'
$o' : c$	$= 137°25'$	137°18
$o' : q$	$= 143°50'$	143°40'.

4. Saures oxalsaures Natron $\text{Ȼ}_2\text{HNaO}_4 + \text{H}_2\Theta$.

Zwei- und eingliedrig (monoclin).

Hemiedrisch $a : b : c = 0\cdot36514 : 1 : 0\cdot88998$; $0 = 75°11'$.

Sechsseitige Prismen gebildet aus drei Flächenpaaren b, p und $\frac{7}{3}p$.

p und $\frac{7}{3}p$ liegen so, dass b die scharfe Kante von $\frac{7}{3}pp$ abstumpft. Das Ende wird gebildet durch die Hexaidfläche c und ein Flächenpaar $\frac{7}{3}o$, welches auf $\frac{7}{3}p$ aufgesetzt ist.

Der Habitus der Krystalle ist selten ein prismatischer, meist sind sie tafelförmig durch Vorherrschen von b oder c.

Spaltbarkeit: sehr vollkommen nach p. (Fig. 3.)

Flächen:
$b = \infty a : b : \infty c = 0,1,0$
$c = \infty a : \infty b : c = 0,0,1$
$p = a : b : \infty c = 1,1,0$
$\frac{7}{3}p = 7a : 3b : \infty c = 3,7,0$
$\frac{7}{3}0 = 7a : 3b : 3o = 3,7,7.$

	Berechnet.	Beobachtet.
$\frac{7}{3}p : b =$		129°24'*
$\frac{7}{3}p : c =$		101°24'*
$\frac{7}{3}o : b =$		117°56'*
$\frac{7}{3}p : p =$	121°12'	121°
$b : p =$	109°24'	109°24'
$c : p =$	103°58'	104°24'
$c : \frac{7}{3}o =$	133°39'	133°56'
$\frac{7}{3}o : \frac{7}{3}p =$	147°45'	147°24'
$\frac{7}{3}o : p =$	120°55'	121°12'.

5. Saurer oxalsaurer Baryt $\text{Ȼ}_2\text{HBa}\Theta_4 + \text{H}_2\Theta$.

Hinterliess beim Glühen kohlensauren Baryt 56·16 Pct. Berechnet: 56·15 Pct.

Zwei- und eingliedrig (monoclin) $a : b : c = 2\cdot6972 : 1 : 2\cdot0794$; $0 = 63°54'$.

Schöne diamantglänzende Prismen p, deren scharfe Kante manchmal durch die Hexaidfläche a schwach abgestumpft wird.

Das Ende wird gebildet durch die beiden schiefen Endflächen c und r' und das hintere Augitpaar o'.

Spaltbarkeit: nicht wahrzunehmen. (Fig. 4.)

Flächen:			
$a =$	$a : \infty b : \infty c =$	1,0,0
$c =$	$\infty a : \infty b : c =$	0,0,1
$p =$	$a : b : \infty c =$	1,1,0
$r' =$	$a' : \infty b : c =$	— 1,0,1
$o' =$	$a' : b : c =$	— 1,1,1.

	Berechnet.	Beobachtet.
$a : c$	=	116° 6'*
$p : p$ an a	=	44°52'*
$o' : o'$	=	51°20'*
$c : o'$	= 106°	105°24'
$c : p$	= 99°40'	99°52'
$p : o'$	= 154°20'	154°32'
$p' : o'$	= 139°53'	139°56'.

6. Oxalsaures Äthylamin, neut. $C_6H_{16}N_2O_4$.

Dasselbe verliert bei 100° C. nichts an Gewicht. — Die Analyse gab:

C 39·74 Pct. berechnet 40 Pct.
H 8·82 Pct. „ 8·89 Pct.

Zwei- und eingliedrig (monoclin) $a : b : c = 1 \cdot 4345 : 1 : 6432$; $o = 63°1'$.

Die schönen Krystalle bilden oktaëderähnliche Formen, bestehend aus dem verticalen Prisma p und den schiefen Endflächen c und r'. Meist herrscht c so vor, dass dicke dreiseitige Tafeln entstehen, deren Seiten durch p_1, p_2 und r' begrenzt werden. Nur selten wird die Kante pc durch ein vorderes Augitpaar $o\frac{1}{2}$ sehr schwach abgestumpft.

Spaltbarkeit: vollkommen nach r'. (Fig. 5.)

Flächen:		
$c =$	$\infty a : \infty b : c =$	0,0,1
$p =$	$a : b : \infty c =$	1,1,0
$r' =$	$a' : \infty b : c =$	— 1,0,1
$o\frac{1}{2} =$	$a : b : \frac{1}{2} c =$	1,1,2.

	Berechnet.	Beobachtet.
$p : p$ an a	=	76° 4'*
$p : c$	=	106°14'*
$c : r$	=	115°12'*
$p : r'$	= 112°12'	112°16'
$c : o\frac{1}{2}$	= 144°19'	144°20'

7. Oxalsaures Äthylamin, saures. $C_4H_9NO_4$.

Die Analyse gab: { C 35·20 Pct. berechnet 35·56 Pct.
H 6·97 „ „ 6·67 „

Zweigliedrig (isoclin). Hemiedrisch $a : b : c = 0·55279 : 1 : 0·31530$.

Rectanguläre vierseitige Blättchen von perlmutterartigem Glasglanz. Vorherrschend ist die Hexaidfläche *b*. Die längere Seite des Rechteckes bildet ein Flächenpaar *p* — statt dessen manchmal $\frac{1}{3}p$ vorkommt; die schmäleren hingegen ein Flächenpaar *q*. Hiezu tritt noch in den meisten Fällen, als schwache Abstumpfung zweier gegenüberliegender Ecken, ein Flächenpaar $o\frac{2}{3}$, und zwar an derselben Seite von *b*, an welcher *p* und *q* zusammenstossen. Die fehlenden *q* sind oft schwach angedeutet und manchmal erscheinen alle vier Ecken des Rechteckes durch einzelne $o\frac{2}{3}$ abgestumpft.

Spaltbarkeit: vollkommen nach *b*. (Fig. 6.)

Flächen: $b = \infty a : b : c = 0,1,0$
$p = a : b : \infty c = 1,1,0$
$\frac{1}{3}p = \frac{1}{3}a : b : \infty c = 3,1,0$
$q = \infty a : b : c = 0,1,1$
$o\frac{2}{3} = a : b : \frac{2}{3}c = 2,2,3.$

	Berechnet.	Beobachtet.
$b : p =$		118°56'*
$b : q =$		107°30'*
$b : \frac{1}{3}p =$	100°26'	101°
$p : q =$	98°22'	98°48'
$\frac{2}{3}o : b =$	101° 7'	101°40'
$\frac{2}{3}o : q =$	158°50'	158°20'.

8. Oxalsaures Triäthylamin, saures. $C_8H_{17}NO_4$.

Zweigliedrig (isoclin). Hemiedrisch $a : b = 0·56808 : 1$.

Die Krystalle bilden dünne rectanguläre Blättchen, ganz vom Ansehen des Äthylaminsalzes, mit welchem sie ohne Zweifel isomorph sind, obwohl die Flächen zur Berechnung der Hauptaxe fehlen. Die Blättchen bestehen nämlich aus der vorherrschenden Hexaidfläche *b*, der Hexaidfläche *c* und zwei Flächen *p* des ersten Paares, welche bald, wie am Äthylaminsalz, einander parallel sind, bald mit der Fläche *b* den gleichen Winkel bilden.

Spaltbarkeit: vollkommen nach b.

Flächen: $b = \infty a : b : \infty c = 0,1,0$
$c = \infty a : \infty b : \cdot c = 0,0,1$
$p = a : b : \infty c = 1,1,0.$

Beobachtet.
$b : p = 119°36'$*.

Nehmen wir zu diesen acht Substanzen noch sieben andere, chemisch und krystallographisch untersuchte Oxalsäure-Verbindungen hinzu, so erhalten wir eine Reihe von fünfzehn Gliedern, welche in drei Gruppen krystallographisch zerfällt — vorausgesetzt, dass man beim Oxamid und beim sauren oxalsauren Kali eine Vertauschung der Axen vornimmt.

Betrachtet man in dem von Schabus gemessenen Oxamid das hintere Augitpaar o' als zweites Paar q, so ergibt sich für dasselbe $a : b : c = 0·64111 : 1 : 0·5603$ und $0 = 75°33'$.

Eben so wird, wenn man in Marignac's Messung des sauren oxalsauren Kali o' als verticales Prisma p gelten lässt, für dieses $a : b : c = 0·3359 : 1 : 0·6206$ und $0 = 69°41'$.

Dann ordnen sich zusammen in die I. Gruppe:

1. Das oxalsaure Methyl (wasserfrei)
$a : b : c = 0·332 : 1 : 0·523$; $0 = 76°38'$.

2. Das Oxamid (wasserfrei)
$a : b : c = 0·641 : 1 : 0·560$; $0 = 75°33'$.

3. Das saure oxalsaure Kali (1 Atom Krystallwasser)
$a : b : c = 0·336 : 1 : 0·620$; $0 = 69°41'$.

4. Das saure oxalsaure Natron (1 Atom Krystallwasser)
$a : b : c = 0·365 : 1 : 0·890$; $0 = 75°11'$.

Endlich, dem Axenverhältniss nach, drei zweigliederige Körper:

5. Das saure oxalsaure Äthylamin (wasserfrei)
$a : b : c = 0·315 : 1 : 0·553$.

6. Das saure oxalsaure Triäthylamin (wasserfrei)
$b : c = 1 : 0·568$.

7. Das saure oxalsaure Ammoniak (1 Atom Krystallwasser), dessen Axe a nahe das Dreifache von den des Äthylaminsalzes beträgt.

In die II. Gruppe kommen zu stehen:

1. **Das Oxalsäurehydrat (2 Atome Krystallwasser)**

   $a:b:c = 1\cdot695 : 1 : 3\cdot336$; $0 = 73°48'$.

2. Das neutrale oxalsaure Kali (1 Atom Krystallwasser)

   $a:b:c = 1\cdot477 : 1 : 1\cdot710$; $0 = 69°2'$.

3. Das neutrale oxalsaure Äthylamin (wasserfrei)

   $a:b:c = 1\cdot435 : 1 : 1\cdot643$; $0 = 63°1'$.

4. Der saure oxalsaure Baryt (1 Atom Krystallwasser)

   $a:b:c = 2\cdot697 : 1 : 2\cdot079$; $0 = 63°54'$.

Endlich, dem Axenverhältniss nach, die beiden zweigliederigen Körper:

5. Die Oxalsäure (wasserfrei)

   $a:b:c = 0\cdot868 : 1 : 0\cdot897$.

6. Das neutrale oxalsaure Ammoniak (wasserfrei)

   $a:b:c = 0\cdot74 : 1 : 0\cdot78$.

Zur III. Gruppe gehören:

1. Der oxalsaure Harnstoff (wasserfrei). Da ein erstes Paar $2p$ vorkommt, kann man die Axe a verdoppeln, und hat so

   $a:b:c = 1\cdot128 : 1 : 0\cdot411$; $0 = 82°10'$.

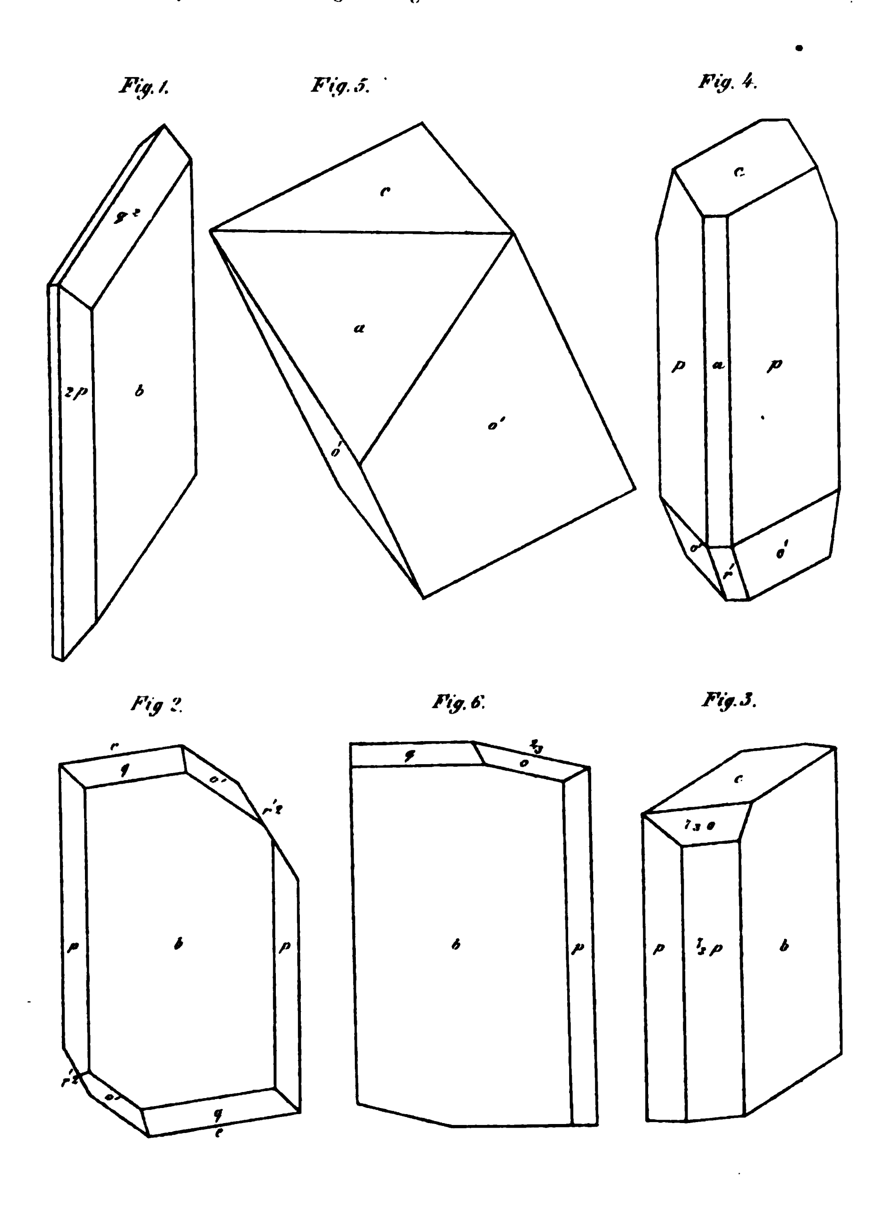
2. Das neutrale oxalsaure Eisenoxyd-Kali (1 Atom $H_2\Theta$ auf 1 Atom Oxalsäure) sammt den verwandten isomorphen Salzen

   $a:b:c = 1\cdot001 : 1 : 0\cdot395$; $0 = 86°$.

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass chemisch einander am nächsten stehende Körper krystallographisch oft ebenfalls neben einander stehen, oft aber auch auffallende Verschiedenheiten zeigen. Namentlich stellt sich der Einfluss des Krystallwassers als ein sehr wechselnder heraus. Man vergleiche nur einerseits die Oxalsäure und ihr Hydrat — mit ihren abweichenden Krystallformen — andererseits die neutralen Salze des Kali und des Äthylamin, wo dieser Einfluss Null ist.

Zwischen der ersten und zweiten Gruppe scheint das krystallographisch so merkwürdige saure oxalsaure Natron den Übergang zu vermitteln. Denn wählt man das stark ausgebildete verticale Prisma $\frac{3}{4}p$ als Hauptprisma, so wird $a:b:c = 0\cdot850 : 1 : 0\cdot890$,

Loschmidt. Krystallbestimmungen einiger Oxalsäure-Verbindungen.



Tr. Flatchinger lith.

Sitzungsb. der k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. LI. Bd. I. Abth. 1864.

0 = 75° 11′ und das Salz reiht sich in die zweite Gruppe. — Wohl wäre es ein Leichtes durch eine schickliche Wahl der Axen bei den zwei- und eingliedrigen Formen noch manche Annäherung zu erzielen, allein man kann damit eben leicht Übereinstimmungen herausconstruiren, wo in der Wirklichkeit keine bestehen.

Es scheint daher gerathen, vor Allem an die Beischaffung eines reicheren Materiales zu denken, um die Lücken zwischen den unläugbar vorhandenen Reihen-Fragmenten durch Beobachtungen auszufüllen, eine Aufgabe, welcher ich meine schwachen Kräfte weiter zu widmen gedenke.

Untersuchungen über die capillaren Blutgefässe in der Nickhaut des Frosches.

Von Dr. S. Stricker,
Assistenten am physiologischen Institute und Privatdocenten an der Wiener Universität.

(Mit 2 Tafeln.)

Wenn man einem lebenden Frosche die Nickhaut ausschneidet und sie in Kammerwasser oder Blutserum unter das Mikroskop bringt, so findet man ein Präparat vor sich, welches der Hornhaut desselben Thieres an Durchsichtigkeit nicht nachsteht.

Trotz ihres an beiden Flächen mehrfach geschichteten Epithels, trotz eines reichen Blutgefässnetzes und zahlreicher in die Grundsubstanz eingebetteter Drüsen kann diese Membran, wenn sie im frischen Zustande faltenlos ausgebreitet wird, durch eine Immersionslinse Nr. 10 in allen Tiefen mit hinreichender Klarheit untersucht werden.

Das Zusammentreffen der eben genannten Verhältnisse aber lud mich gerade zu einer erneuerten Untersuchung ein.

Als ich hier das erste Mal meine Aufmerksamkeit den capillaren Blutgefässen zuwendete, erkannte ich, dass ausser den sogenannten Kernen der Capillaren noch andere jenen Kernen ähnliche Gebilde vorhanden sind, welche die Gefässwände nicht berühren, diesen aber allenthalben gleichsam als eine unvollständige Scheide folgten. An einzelnen Orten begegnete ich ferner scharf gezeichneten Contouren, welche in den Hauptzügen mit den Gefässwänden parallel liefen, so dass zu jeder Seite eines Capillarrohres eine Bahn abgegrenzt wurde, in welcher die Kernscheide, wie ich sie der Kürze wegen nennen will, eingebettet lag. Kurz, es boten sich mir Verhältnisse dar, wie sie His [1]) von den Capillaren des Gehirnes abbildet.

Indessen hatte ich nicht viel Grund, mich diesem Autor in der Annahme einer *Adventitia capillaris* anzuschliessen. Erstens fand ich den scharf gezeichneten, die Gefässwand begleitenden Contour nicht an allen Capillaren. Zweitens waren die Elemente der Kernscheide lange nicht so regelmässig gebaut und nicht so regelmässig

1) Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 10.

gelagert, wie sie in der genannten Abbildung zn finden sind. Nicht selten lag so ein langgestrecktes Element winkelig geknickt, mit dem einen Schenkel der Gefässwand parallel und mit dem andern von ihr abbiegend. Bald war es wieder ein keulenförmiger Körper, welcher mit der Spitze die Gefässwand zu berühren schien und mit seiner Längenaxe von der Richtung des Gefässes ziemlich stark divergirte. Dort, wo ich drittens den äussern Contour scharf gezeichnet fand, war er sichtlich die Grenze der Grundsubstanz der Nickhaut, welche sich hier gegen die das Capillarrohr begleitender vollkommen structurlose, glashelle Bahn absetzte. Wenn ich diese Bahn in der Umgebung einer Gefässgabel fand, sah ich sie an der Hohlseite des Winkels zu einem Dreiecke umgestaltet, weil der äussere die Bahn begrenzende Contour von einem Gefässaste auf den anderen übersprang, um den Gefässbogen als Sehne zu überbrücken. (Fig. 2.)

In seltenen Fällen erweiterte sich die Bahn auch an der Seite eines gestreckt verlaufenden Ästchens.

Was aber überzeugender als alle die bisher genannten Momente auf mich einwirkte, waren die Fälle, wo ein Gefässröhrchen einen gewundenen Verlauf einhielt, die äusseren Grenzen der Bahn aber gestreckt blieben. Contouren, welche über ein gewundenes Gefässchen geradlinig hinlaufen, konnte ich nicht mehr als einer *Adventitia* angehörend auffassen. Ich konnte nur annehmen, dass das Capillarrohr von einer structurlosen Substanz umhüllt sei, welche sich gegen das Parenchym der Nickhaut an starren Grenzen absetzt.

Über den Aggregatzustand dieser Substanz konnte ich allenfalls noch im Zweifel sein, wenngleich das eben gezeichnete räumliche Verhältniss sich am besten bei der Annahme erklärt, dass die Gefässröhrchen von einer Flüssigkeit umspült werden, und wenngleich unser bisheriges Wissen einer solchen Annahme am günstigsten ist.

Seit Bojanus [1]) haben Fohmann [2]), Panizza [3]), Eduard Weber [4]) und Rusconi [5]) für die Amphibien nahezu übereinstim-

[1]) Vasa chylifera testud. europeae Isis. 1820.

[2]) Das Saugadersystem der Wirbelthiere. 1827.

[3]) Sopra il sistema linfatico dei rettili. Pavia 1827.

[4]) Müller, Archiv 1835.

[5]) Giornale del'Instituto lombardo di scienze. Fasc. I. 1841, und ein Brief an Oken; ferner historische Notizen in Müller's Archiv, 1843.

mend festgestellt, dass die Aorta und ihre Äste von dem *Ductus thoracicus* und den ihn zusammensetzenden Stämmchen scheidenartig umfasst wird. Ja, Rusconi hat diese Einrichtung längs der grossen Blutgefässe bis zu den sehr kleinen Ästen der Haut verfolgt.

Dass feine Blutgefässe von Lymphe umspült werden, sagen uns: Brücke [1]) für die Darmschleimhaut des Kaninchens, Robin [2]) für die Capillaren des menschlichen Hirns, Billroth [3]) für das menschliche Präputium, endlich Ludwig [4]) und Gillavry [5]).

In der Arbeit von Robin wurde meine Aufmerksamkeit namentlich gefesselt durch die über die Hohlwinkel der Gefässbogen hingespannten Lymphröhrenwände, welche in einem dem Texte beigedruckten Holzschnitte abgebildet sind. Robin sagt dazu: „Souvent cette enveloppe ne forme pas un angle rentrant, semblable-a un vaisseau, a chaque bifurcation, mais il est beaucoup plus large à ce niveau qu'ailleurs et forme là une dilatation dans laquelle est logée la bifurcation".

Ich fand hierin eine bestimmte Andeutung für die Beurtheilung jener Bilder, deren ich oben bei Erwähnung der Gefässgabeln gedachte, und welche ich in Fig. 2 *f, f* abbildete.

Die mir bekannten Angaben sprechen also jedenfalls zu Gunsten der Annahme, dass die Blutcapillaren vom Lymphe umspült sind, und der Umstand, dass ich an den Grenzen der Lymphbahnen keine eigenen Wandungen erkennen konnte, stimmte gewiss nur mit den Ansichten überein, welche sich in den letzten Jahren Geltung verschafften.

Bei einer weiteren Beobachtung blieb aber über die Richtigkeit dieser Annahme auch nicht der leiseste Zweifel übrig.

Ich fand nämlich das Lumen mancher Capillargefässe auf sehr kurzen Strecken so stark verengert, dass die Blutkörperchen am Durchtritte verhindert waren, wobei aber die Contouren der Lymphbahnen gestreckt blieben, die letzteren also auf Kosten des Blutgefässes verbreitert waren.

---

1) Chylusgefässe. Denkschriften 1853.
2) Journal de la physiol. Bd. II.
3) Beiträge zur path. Histolog. Berlin 1858.
4) Zur Anatomie der Niere. Sitzungsberichte. Bd. XLVIII.
5) Zur Anatomie der Leber. Sitzungsberichte. Bd. L.

So lange die Nickhaut frisch ist, zeigt sie einen eigenthümlichen Turgor. Die Contouren treten oft so klar hervor, wie ich mich kaum entsinne, sie jemals an der Cornea gesehen zu haben. Die Blutgefässe sind augenscheinlich von Flüssigkeit erfüllt, und die Blutkörperchen in denselben sind zeitweise in steter Bewegung, zeitweise werden sie durch leichte Drehungen mit der Stellschraube in Bewegung versetzt. Ich kann mir nur vorstellen, dass bei der ausserordentlich geringen Reibung zwischen den Blutkörperchen und der Innenfläche der Capillargefässe, die kleinsten Veranlassungen, welche von der Umgebung und Lage des Objectes erfliessen, hinreichen, um eine solche Bewegung hervorzurufen.

Ich kann mir aber auch nur vorstellen, dass die Bewegung möglich sei, so lange als das Blutplasma nicht gerinnt, und folglich so lange, als die Gefässwände noch vitale Eigenschaften in sich tragen.

Für diejenigen Mikroskopiker, welche an die Untersuchung frischer, will sagen lebender Gewebe, durch gute Immersionslinsen gewöhnt sind, braucht es dieses Beweises gewiss nicht, weil sich lebende und todte Gewebe hier eben so schwer verwechseln lassen, als etwa lebende und todte Thiere. Da wie dort mögen Täuschungen nur nahe an den Grenzen vorkommen.

Für diejenigen nun, die eine solche Gewohnheit oder eine solche Überzeugung nicht besitzen, muss ich also das Flüssigbleiben des Blutplasma betonen. Bei dem Zustande, in welchem sich unsere Frösche im Monate December befanden, konnte ich aber die Bewegung oder doch sehr leichte Verschiebbarkeit der Blutkörperchen nur bis auf höchstens zwei Stunden lang, vom Ausschneiden der Nickhaut ab gerechnet, wahrnehmen. Dann collabirte das Gewebe, die Contouren wurden sehr unklar, die Blutkörperchen lagen wie abgeplattet in den kaum sichtbaren Gefässen. Kurz das Präparat war für die beabsichtigte Untersuchung ganz werthlos geworden.

Wenn sich die Blutkörperchen also während des sogenannt lebenden Zustandes der Gewebe durch die Gefässröhrchen durchschieben, kommen sie manchmal an Stellen, wo sie sich nur mit vieler Noth durchdrängen können, und an Stellen, wo ihnen der Durchtritt trotz ihrer bekannten ausserordentlichen Gefügigkeit unmöglich ist.

Solche Verengerungen können unter mannigfachen Modificationen beobachtet werden.

Einmal ist es ein in das Lumen hinein prominirender Kern, wie ich dies in Fig. 2, *k* abbildete, welcher das Blutkörperchen zwingt, seine Form oder wenigstens seine Lage zu verändern, wenn es überhaupt weiter kommen soll. Wenn die Blutkörperchen einmal im Laufe sind, passiren sie eine solche Klippe, ohne wesentliche Verlangsamung. Sie werfen sich auf eine Kante, oder sie krämpen ihre Ränder zu beiden Seiten in die Höhe, oder sie schlüpfen endlich so durch, wie man etwa ein dickes Tuch durch einen Ring durchzieht.

Ein anderes Mal prominiren an einem Querschnitte zwei gegenüberliegende Kerne. Die Blutbahn kann dadurch so verengert werden, dass die Blutkörperchen in ihrem Laufe wesentlich behindert werden. Es braucht dann immer eine Weile bis sich eines durchdrängt. Oder die Verengerung kann durch solche prominente Kerne so weit gehen, dass die Blutkörperchen gar nicht mehr durchkönnen. Man sieht dann manchesmal eines an der Verengerungspforte aufgehalten mit einer vorgestreckten Spitze zwischen die hervorragenden Kerne hineinreichen.

Zuweilen wird das Lumen eines Capillarrohres durch eine förmliche Falte der Gefässwand verengert, durch eine Falte, in welcher gar kein Kern liegt. Es sieht dann so aus, als ob die Gefässwand an einem Theile ihrer Circumferenz in Form einer Duplicatur zu einer Klappe verwendet wäre. Die Klappe flottirt aber nicht, sie ragt starr in das Lumen hinein. Die Blutkörperschen müssen sich an ihr gerade so vorbeidrängen als an einem promirenten Kerne.

Noch ein anderes Mal sah ich eine Verengerung bis zur Unwegsamkeit auf der einen Seite durch einen Kern, und ihm gegenüber durch eine Falte gebildet, in welcher kein Kern lag. Solche Beobachtungen machte ich namentlich an Stellen, wo ein dünnes Capillarrohr von einem etwas stärkeren abzweigt.

Ausser den bisher genannten Formen von Verengerungen fiel mir noch eine andere auf. Ein Capillarrohr verdünnte sich nämlich bei einem gestreckten Verlaufe in der Ausdehnung von mehreren Blutkörperchen in der Länge. Es ging aus seiner gewöhnlichen Weite trichterartig in die Stelle der grössten Verengerung über, in welche mehr kein Blutkörperchen eindringen konnte. Hier sah ich auch, dass die äusseren Contouren des Lymphraumes gestreckt über die enge Region hinliefen, dass die Lymphbahnen auf Kosten des

Blutgefässes so verbreitert erschienen, wie ich es sonst um kein normalmässig breites Capillarrohr angetroffen hatte.

Abgesehen von jeder eingehenden Beurtheilung über die Bedeutung jener Verengerungen, musste ich mir doch zugestehen, wie unwahrscheinlich es sei, dass es mitten im Capillarsystem von vorne herein unwegsame Stellen, auf kleine Ausdehnung beschränkte, mit Kernen belegte *vasa serosa* gebe. Ich musste mich der viel naturgemässeren Auffassung hingeben, dass der Umfang des Blutgefässes aus irgend einem Grunde activ oder passiv verengert, und dass somit an dieser Stelle, bei der Starrheit der Lymphbahnwände, Flüssigkeit angesaugt wurde.

Im Laufe einer beträchtlichen Versuchsreihe sah ich zweimal Verengerungen der zuletzt genannten Form sich unter meinen Augen erweitern und die früher angestaut gewesenen Blutkörperchen wieder in Fluss gerathen. Ich konnte also nicht mehr daran zweifeln, dass die Capillargefässe in Lymphräumen flottiren.

Wenn also Rusconi das Umspültwerden der Blutgefässe von Lymphe von der Aorta bis in die feinen Hautgefässe verfolgte, so habe ich dem nur hinzuzufügen, dass ein solches Verhältniss in der Nickhaut auch für die Capillaren gilt. Meine Beobachtung kann dabei noch in so ferne wesentlich unterstützend mitwirken, als ich es bei dem unverletzten lebenden Gewebe sicherlich mit keinem Kunstproducte zu thun hatte.

Ich habe schon früher bemerkt, dass die Contouren, welche die Lymphbahn einfrieden, nichts anderes sind als die Grenzen der Grundsubstanz der Nickhaut. Es ist also im frischen Zustande ohne weitere Kunsthilfe zu erkennen, in wie weit das Stroma einer bindegewebigen Membran von Lymphbahnen durchbrochen ist.

Wenn Kölliker [1]) die Meinung ausspricht, es könnten die einer selbstständigen Wand entbehrenden Lymphwege auch so gedeutet werden, dass man sich vorstelle, die Wand wäre entweder zu Grunde gegangen oder mit dem Gewebe verschmolzen, so ist meine Beobachtung in vieler Beziehung geeignet, diese Anschauung zu unterstützen. Denn wenn die hellen Bahnen Lymphräume sind, dann sind die Kerne, welche in dieser Bahn angetroffen werden und welche die Capillarwand nicht berühren, Gebilde, welche nur an

1) Handbuch der Gewebelehre.

der Grenzwand der Lymphbahn haften können. Dass aber diese mit solchen Gebilden belegt ist, geht unzweifelhaft aus dem Umstande hervor, dass man oft genug Kerne findet, welche dem Contour der Lymphbahn nach aussen zu, an der dem Capillarrohr abgewendeten Seite zu, aufsitzen. Sie sind dann in die Substanz der Nickhaut eingebettet, und helfen da mit einer Seite die Lymphbahn begrenzen. Die Wände dieser besitzen also Kerne in einem mannigfachen Lagerungsverhältnisse, bald von aussen anliegend, bald in den Raum hinein prominirend, was sicherlich ein Motiv zur Annahme untergangener selbstständiger Wände abgibt, wenn die ganze auf die Kerne gestützte Theorie ihre Begründung hat.

Ob die bisher genannten Lymphräume noch mit anderen interstitiellen Räumen zusammenhängen, darüber kann ich nichts Bestimmtes angeben.

Sagen muss ich jedoch, dass ich an manchen Nickhäuten die Lymphräume durch die mir zu Gebote stehende wahrhaft treffliche Immersionslinse mit einer Sicherheit beobachten konnte, wie sie nicht handgreiflicher gewährt werden kann. Wenn ich nun in solchen Fällen nirgends Ausläufer der Lymphräume in das Gewebe hinein beobachtete, so ist das immerhin beachtenswerth.

Ich muss ferner hinzufügen, dass, wenn das Präparat abstirbt, nicht selten lange spindelförmige, glashell aussehende Gestalten erscheinen, welche die Substanz der Nickhaut nach allen Richtungen mehr minder zahlreich durchziehen. Ein ähnliches Verhältniss beobachtete ich in der Cornea des Frosches. Das eigenthümlich eckige starre Aussehen dieser Gestalten lässt mich sehr daran glauben, es wären Räume, welche während des Absterbens oder nach demselben entstehén. Es mag dies vielleicht zum Anhaltspunkte dienen können für die Beurtheilung von Räumen, welche an todten Geweben nachgewiesen wurden.

Dass sich die die Capillaren umgebenden Räume auch auf die grösseren Gefässstämmchen fortsetzen, möchte ich nach vielen Bildern, welche ich gesehen habe, kaum bezweifeln. Ich konnte diesem Gegenstande indessen keine grössere Aufmerksamkeit zuwenden, weil ich zur Erlangung gleichmässig ebener Präparate nur ein centrales Stück aus der Nickhaut ausschnitt, und mir daher die grösseren Gefässe in der Regel entgingen.

Ich will mich nun der Frage zuwenden, welche Bedeutung den früher bezeichneten Verengerungen der capillaren Blutbahnen zukomme, und zu den bereits gemachten Angaben noch Folgendes hinzufügen:

Wenn man das Immersions-Instrument für die Lichtung der Blutbahnen einstellt, dann kann man durch den leichten Stich in's Gelbröthliche, welchen das Blutplasma hietet, scharf und genau die Grenzen des Lumens erkennen. Wenn der Frosch erträglich munter war, findet man dann kurze Zeit nach Anfertigung des Präparats, wenigstens in den centralen Stellen, das Lumen der Capillargefässe geräumig genug, um einem Blutkörperchen unter mässiger Compression den Durchgang in der Breitlage zu gestatten. Wenn auch hie und da ein Kern vorragt, so verengert er die Bahn doch nicht wesentlich. Gegen die Ränder des Präparats hin begegnet man aber bald auch Stellen, wo die Lichtungen der Gefässe enger, die hellen Bahnen an der Seite der letzteren dafür um so viel breiter erscheinen. Die Circulation der Blutkörperchen hört auf; man findet diese in die verengerten Regionen hineinreichend umgestaltet, abgeblasst da liegen, bis man endlich an noch weiteren Strecken das Gewebe, wenn ich mich so ausdrücken darf, verödet findet. Man kann kein Gefäss mehr unterscheiden. Kurz, man hat allen Grund zur Annahme, das Gewebe sei hier abgestorben.

Die engen Gefässe, welche an die verödeten Bezirke stossen, lassen sich aber mikroskopisch nicht mehr mit solcher Sicherheit auswerthen, wie jene Blutbahnen, in denen die Blutkörperchen noch frei schwimmen können. Die Contouren der ersteren sind nämlich nicht mehr so deutlich, wie die der letzteren; die Grenzen der Gefässwand gegen die Lymphbahn hin sind oft kaum kenntlich. Wenn man also hier beispielsweise daran denken wollte, die so beschaffenen Gefässwände seien bereits abgestorben, so könnte man auch weiter daran denken, dass die Lichtung gar nicht so enge sei, als sie erscheint, und dass sie nur in ihren seitlichen Theilen wegen Veränderungen der darüber liegenden Wand nicht mehr gesehen werden kann. Dass sich in diesen Gefässen keine Blutkörperchen bewegen, könnte dann ausreichend durch einen Collapsus des Gewebes, durch Gerinnung des Blutplasma u. s. w. erklärt werden.

Bald aber begegnete ich sehr verschmälerten, noch gelbröthlichen erscheinenden Lichtungen in der Ausdehnung von zwei, drei

und mehr Blutkörperchen Länge, welche zu beiden Seiten in noch normal breite offenbar flüssiges Plasma führende Gefässstücke übergingen. Da schwammen die Blutkörperchen nicht mehr frei durch, aber ich konnte sie manchesmal durch Anziehen der Stellschraube durchdrängen. Ich sah dabei, dass die Lichtung zuweilen breiter sei, als sie mir erschien, dass mir aber ein Theil derselben zu beiden Seiten von oben her verdeckt war.

So klar wie an nicht verengerten Stellen, waren jedoch die Contouren auch hier nicht mehr. Ich konnte oft auch da nicht mit Sicherheit entscheiden, ob das Lumen durch Kerne an der obern Wand des Rohres oder durch eine Verdickung der Wand selbst verdeckt war.

Trotzdem, dass mir auch viel sicherere Beobachtungen zu Gebote stehen, erwähne ich dieser Umstände dennoch, um diejenigen, welche diese Untersuchungen wiederholen, und denen gewiss auch die unklaren Bilder begegnen werden, nicht zu der Meinung zu verleiten, ich hätte aus solchen geurtheilt, noch dazu mit dieser Meinung von den Untersuchungen abzulassen. Wenn es aber gerade solche Verengerungen waren, deren Wiedererweiterung ich beobachtete, so beweisen sie immerhin, dass sie grössere Beachtung als eine etwaige Leichenerscheinung verdienen.

Ich gehe indessen auf alle Details, welche die unklaren Bilder bieten, nicht ein, da sie sich schliesslich mit der Bemerkung abweisen lassen, sie waren nicht klar genug zu sehen.

Ich begegnete anderen Bildern, an denen ich mit Sicherheit aussagen konnte, dass ein Capillargefäss in der Länge mehrerer Blutkörperchen bis zur Unwegsamkeit für solche verengert, und (vgl. Fig. 5), dass dabei der Lymphraum entschieden verbreitert war.

Viel öfter aber sah ich Verengerungen bis zur Unwegsamkeit nahe an den Übergängen kleinster Capillargefässe in etwas weitere. Ich habe dieser Verengerungen schon ausführlich Erwähnung gethan. Sie waren theils durch stark prominente Kerne, theils durch kernlose Falten der Gefässwand gebildet. An solchen Stellen lassen die Bilder an Klarheit nichts zu wünschen übrig. Solche Stellen wird füglich jeder Beobachter zu Gesichte bekommen, wenn er einige Nickhäute in der gedachten Weise untersucht.

Oft genug erscheint auch hier die Lichtung viel enger als sie wirklich ist, aber man kann nicht leicht einer Täuschung unter-

liegen. Erstens weil die Kerne, welche die Lichtung umgeben, scharf contourirt sind, und weil zweitens ab und zu ein Blutkörperchen aus dem Hauptstrome auf das verengerte Lumen andringt und hindurch tritt, so lange als die Möglichkeit vorhanden ist.

Ich habe an einem Orte, wo die Blutkörperchen ganz munter in den Seitenast hineinschwammen, wo aber dieser gerade an der Abgangsstelle von beiden Seiten her gegenüberstehende Kerne zeigte, durch welche die Lichtung des Rohres etwas schmäler erschien, als sie wirklich war, an diesem Orte habe ich unter meinen Augen eine Annäherung beider Kerne stattfinden sehen. Die sichtbare Lichtung wurde dadurch auf einen sehr schmalen Faden reducirt. Sie war aber factisch noch breiter als sie erschien. Die Blutkörperchen schlüpften noch durch und unter den stark genäherten Kernen vorbei. Aber ich konnte deutlich ermessen, dass das Lumen jetzt enger sei, als es früher war. Zu beiden Seiten dieser Stelle des Capillarrohres war der breite Lymphraum so klar zu sehen, dass ihn Jeder auf den ersten Blick erkennen musste. Kurze Zeit darauf hörte das Hereinströmen von Blutkörperchen ganz auf, der Seitenast sah so aus, als würde er blindsackartig an das gröbere Stämmchen anstossen.

Ich musste es also für ausgemacht ansehen, dass das Lumen eines Capillargefässes keine constante Grösse sei, vielmehr die Wand desselben so weit abgeschnürt werden kann, dass die Blutkörperchen nicht mehr durchschlüpfen können.

Hätte ich auch eine solche Formveränderung des Capillarrohres nicht beobachtet, so hätte ich doch nicht daran zweifeln können, dass die Verengerungen bis zur Unwegsamkeit keine angeborenen Bildungen seien, sondern ich hätte annehmen müssen, sie wären während des Lebens oder doch nach dem Ausschneiden der Membran aus dem Gesammtorganismus entstanden.

In Rücksicht auf jene Verengerung nun, wie sie in Fig. 4 abgebildet ist, wo auf der einen Seite die Capillarwand ohne prominenten Kern in eine Falte gelegt ist, muss ich also daran denken, es könne die Wand selbst verändert werden, ohne dass dabei ein Kern betheiligt ist.

Ich will hier noch zum Schlusse die Beobachtung mittheilen, dass ich die Wände der Capillargefässe manchesmal auffallend

wellenförmig gekrümmt fand, und zwar an Strecken, wo gerade wenig Kerne vorhanden, wo die Lymphräume deutlich und so breit waren, dass ein Blutkörperchen auf die Kante gestellt, leicht hätte passiren können. Ich lasse diese bestimmte Thatsache ohne Commentar. Ich wollte nur darauf aufmerksam machen, weil sie vielleicht späterhin von besonderem Belange werden kann.

Wenn ich mir nach all' diesem die Frage vorlege, wodurch die Veränderungen des capillaren Lumens zu Wege gebracht werden kann, so muss ich zunächst darauf antworten:

1. Durch Druckverschiedenheiten der Lymphflüssigkeit kann ein Gefäss nicht an einer Stelle abgeschnürt werden, weil dies bei der freien Communication in den Lymphräumen den physikalischen Gesetzen widerspricht.

2. Es ist nicht wahrscheinlich, dass es Formveränderungen der Kerne sind, welche diese Abschnürungen hervorrufen. In dem Falle, wo ich eine Annäherung der Kerne aneinander beobachtete, sah ich keine Formveränderung derselben und auch sonst an keinem anderen Orte. Es ist mir aber ganz unbegreiflich, wie ein in eine Wand hineingewachsener Kern dieselbe beeinflussen soll, wenn er seine Form nicht verändert. Der Einfluss der Kerne allein wäre auch gar nicht genügend, alle Erscheinungen zu erklären, da ich sichtliche Verengerungen wahrnahm, an welchen gar keine Kerne betheiligt waren.

3. Es bleibt mir also nur übrig, daran zu denken, dass es die Capillarwand selbst sei, welche hier eine Rolle spielt.

Es wird dann freilich mit grösserer Genauigkeit zu bestimmen sein, ob wir eine Schrumpfung oder Contraction vor uns haben. Bei der schon Eingangs ausgesprochenen Überzeugung an lebenden Geweben untersucht zu haben, kann ich an eine Schrumpfung nicht recht glauben. Eine ausgiebige Reihe von Reizversuchen wird es jedenfalls zu lehren haben, in wie weit wir die Consequenzen einer solchen Schlussfolgerung zu scheuen haben.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. *l*, Lumen eines nahezu capillaren Gefässes;
a und *b* unregelmässig geformte Körper der Wand des Blutgefässes nur theilweise anliegend;
f, *f* Lymphräume;
k'', Kerne, an deren Wand von Aussen aufsitzend;
l', der davon ausgehende Pfeil zieht in das verengerte Lumen eines Capillargefässes;
N, ein markloser Nervenfaden;
k_2, Körper, welche weder dem Contour des Blutgefässes, noch dem Grenzcontour des Lymphraumes anliegen, dennoch aber unverschiebbar sind;
d, Windung eines Blutcapillargefässes;
f, *k*, wie früher;

„ 2. *k*, ein in das Lumen prominirender Kern;
N, ein Nervenbündel;
n, Neurilem;
h, homogener Raum zwischen beiden;

„ 3. *g*, *g*, Blutkörperchen;
N, ein markloser Nervenfaden, welcher sich um das Gefäss windet;
f k, wie früher;

„ 4. Buchstaben wie früher. Von beiden *l* ragen Pfeile in das verengerte Lumen des Gefässes;

„ 5. Buchstaben wie früher. Das capillare Blutgefäss ist verengert und auf dessen Kosten der Lymphraum erweitert.

II. SITZUNG VOM 12. JÄNNER 1865.

Der Secretär legt vor die eben erschienene zweite Abtheilung des II. Bandes des zoologischen Theiles des Novara-Reisewerkes, enthaltend die „Lepidopteren", bearbeitet von den Herren Dr. Cajetan Felder und Rudolf Felder.

Herr Dr. W. Tomsa überreicht eine Abhandlung: „Über den peripherischen Verlauf des Axenfadens in der Haut des Penis".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale de Belgique: Bulletin. 33[e] Année, 2[e] Série, Tome 18, No. 9 & 10. Bruxelles, 1864; 8[o.]

— des Sciences et Lettres de Montpellier: Mémoires de la Section des Sciences. Tomes IV — V. Années 1858 — 1863. Mémoires de la Section des Lettres. Année 1858; Tome III. Années 1859—1863. Mémoires de la Section de Médecine Tome III. Années 1858 — 1862; Tome IV, 1[r] Fasc. Année 1863. Montpellier; 4[o.]

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. September, October, November 1864. Berlin, 1864; 8[o.]

— Königl. Schwedische: Handlingar. N. F. IV. Bd., 2. Hft. 1862. Stockholm; 4[o.] — Öfversigt. XX. Årgången. 1863. Stockholm, 1864; 8[o.] — Meteorologiska Jakttagelser i Sverige. IV. Bd. 1862. Stockholm, 1864; Quer 4[o.] — Mitglieder-Verzeichniss, Maj 1864. 8[o.]

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 1. Wien, 1865; 8[o.]

Astronomische Nachrichten. Nr. 1508—1509. Altona, 1865; 4[o.]

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LIX. Nr. 26. Paris, 1864; 4[o.]

Cosmos. 2[e] Série. XIV[e] Année, 1[r] Volume, 1[re] Livraison. Paris, 1865; 8[o.]

Gesellschaft, Wetterauische, für die gesammte Naturkunde zu Hanau: Jahresberichte 1861—1863. Hanau, 1864; 8[o.]

Gewerbe-Verein, nieder.-österr.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 2. Wien, 1865; 8o.

Hörnes, Moriz, Die fossilen Mollusken des Tertiär-Beckens von Wien. II. Bd. Nr. 5, 6. Bivalven. (Abhandlungen der k. k. geolog. Reichsanstalt IV. 5, 6.) 4o.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer von F. Vorwerk. Bd. XII, Heft 6. Speyer, 1864; 8o.

Kiel, Universität: Schriften aus dem Jahre 1863. Bd. X. Kiel, 1864; 4o.

Knoblich, A., Die Zinkographie in ihrer erweiterten praktischen Anwendung. (Als Manuscript gedruckt.) Wien, 1865; 8o.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 2. Wien, 1865; 4o.

Leseverein, Akademischer, an der k. k. Universität in Wien: Dritter Jahresbericht. 1863—1864. Wien; 8o.

Lotos. Zeitschrift für Naturwissenschaften. XIV. Jahrg. November, December 1864. Prag; 8o.

Museum of Geology zu Calcutta: Memoirs of the Geological Survey of India. *Palaeontologia Indica.* Vol. III. Parts 2—5. 4o.

Museum-Verein, siebenbürgischer, zu Klausenburg: Jahrbücher, 3. Bd., 1. Hft. Klausenburg, 1864; 4o.

Observatory, The Royal. Edinburgh: Astronomical Observations. Vol. XII. For 1855—59. Edinburgh, 1863; 4o.

Reader. Nr. 106. Vol. V. London, 1865; Folio.

Reichsforst-Verein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XV. Bd. Jahrg. 1865. Jänner-Heft. Wien, 1865; 8o.

Reise der österreichischen Fregatte Novara um die Erde. Zoologischer Theil. II. Band, 2. Abtheilung. *Lepidoptera.* Von Dr. Cajetan Felder und Rudolf Felder. Wien, 1865; 4o.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'orient. VIIIe Année, No. 7. Constantinople, 1864; 4o.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrgang. Nr. 2—3. Wien, 1865; 4o.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. Nr. 5. Gratz, 1865; 4o.

III. SITZUNG VOM 19. JÄNNER 1865.

Eingesendet wurden folgende Abhandlungen:

Von Herrn Heinrich Schramm, Lehrer an der Landes-Oberrealschule zu Wiener-Neustadt „Discussion der höheren Gleichungen von beliebigem Grade".

Von Herrn A. J. Koch: „Kritische Bemerkungen über die bisherigen Tonlehren und Andeutungen zu Reformen".

Vorträge wurden gehalten:

Von dem w. M., Herrn Bergrath Franz Ritter v. Hauer „über die Gliederung der oberen Trias der Lombardischen Alpen".

Von Herrn Dr. A. Schrauf, Universitäts-Docenten und Custos-Adjuncten am k. k. Hof-Mineraliencabinete: „Beitrag zu den Berechnungsmethoden der Zwillingskrystalle".

Von Herrn Fr. Unferdinger, Lehrer an der Ober-Realschule am Bauernmarkt, über „die Auflösung des sphärischen Dreieckes durch seine drei Höhen."

Von Herrn Dr. Edmund Weiss, Adjuncten der k. k. Wiener Sternwarte, „Bahnberechnung des Planeten (66) Maja".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia, Regia, di Scienze, Lettere ed Arti in Modena: Memorie. Tomo IV. 1862; Tomo V. 1863. Modena; 4°. — Ellero, Pietro, Della emenda penale. (Gekrönte Preisschrift 1862.) 8°. — Galassini, Girolamo, Ufficio e importanza del giornalismo etc. (Gekrönte Preisschrift 1862.) 8°. — Sala, Erio, Mezzi più atti a procurare il meglioramento dei Carcerati etc. (Accessit 1862.) 8°. — Siccardi, Ferdinando, Dell' indigenza e delle cause che la producono. (Accessit. 1861.) 8°. — Treves de'Bonfili, Giuseppe, Interno alle case di lavoro. (Gekrönte Preisschrift. 1861.) 8°.

Chiolich-Löwensberg, Hermann von, Anleitung zum Wasserbau. II. Abtheilung. Stuttgart, 1864; 4°.

Cosmos. 2e Série; XIVe. Année, Ier Volume, 2e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, nieder-österr.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 3. Wien, 1865; 8°.

Heeger, E., Album microscopisch-photographischer Darstellungen aus dem Gebiete der Zoologie. III. & IV. Lieferung. Wien, 1862 & 1863; 8°.

Istituto, Reale, Lombardo di Scienze e Lettere: Rendiconti. Classe di Lettere e Scienze morali e politiche: Vol. I, Fasc. 5—7. Milano, 1864; 8°. — Classe di Scienze matematiche e naturali: Vol. I, Fasc. 6—8. — Temi sui quali è aperto concorso. 1864. — Solenne adunanza del 7 Agosto 1864. 4°. — Magrini, Luigi, Sulla importanza dei cimelj scientifici e dei monoscritti di Allessandro Volta. 8°.

— I. R. Veneto, di Scienze, Lettere ed Arti: Memorie. Vol. XI. Parte 3. Venezia, 1864; 4°. — Atti. Tomo IX. Serie 3a, Disp. 8a—10a, 1863—64; Tomo X, Serie 3a, Disp. 1a. Venezia, 1864—65; 8°.

Mittheilungen des k. k. Genie-Comité. Jahrg. 1864. IX. Band, 12. Heft; Jahrgang 1865. 1. Heft. Wien, 1865; 8°.

Moniteur scientifique. 193e Livraison. Tome VIIe. Année, 1865. Paris; 4°.

Pictet, F. J. et G. Campiche, Description des fossiles du terrain crétacé des environs de Sainte-Croix. II. Partie. (Matériaux pour la paléontologie Suisse. 3e Série.) Genève, 1861—1864; 4°.

— et A. Jaccard, Description des reptiles et poissons de l'étage Virgulien du Jura Neuchatelois. *(Ibidem)* Genève, 1860; 4°.

Reader. Nr. 107. Vol. V. London, 1865; Folio.

Schrauf, Albrecht, Atlas der Krystallformen des Mineralreiches. I. Lieferung. Wien, 1865; 4°. — Katalog der Bibliothek des k. k. Hof-Hineraliencabinets in Wien. (2. Auflage.) Wien, 1864; 8°.

Sociéte Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'orient. VIIIe Année, Nr. 8. Constantinople, 1864; 4°.

— — des Sciences naturelles de Cherbourg: Mémoires. Tome IX. Paris & Cherbourg, 1863; 8°.

Society, The Asiatic, of Bengal: Journal. Nr. III. 1864. Calcutta, 1864; 8o.

Verein, Naturforschender, zu Riga: Correspondenzblatt. XIV. Jahrgang. Riga, 1864; 8o.

— naturw., für Sachsen und Thüringen in Halle: Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. Jahrg. 1863. XXII. Band; Jahrg. 1864. XXIII. Band. Berlin, 1863 & 1864; 8o.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 3—5. Wien, 1865; 4o.

Zeitschrift des österr. Ingenieur-Vereines. XVI. Jahrg. 10. Heft. Wien, 1864; 4o.

Über die Gliederung der oberen Trias der lombardischen Alpen.

Von dem w. M. Franz Ritter v. Hauer.

Die Nothwendigkeit für die in der Herausgabe begriffene geologische Übersichtskarte der österreichischen Monarchie, die in den verschiedenen Theilen der Alpen gemachten Beobachtungen unter gleichförmige Gesichtspunkte zu bringen, veranlasst mich, auf einen Gegenstand zurückzukommen, bezüglich dessen meine in früherer Zeit publicirten Anschauungen von Seite der verdientesten Geologen der Lombardie einen eben so lebhaften als bestimmten und andauernden Widerspruch fanden.

Nicht sowohl Lust an eigentlicher Polemik, oder der Wunsch um jeden Preis meine eigenen Anschauungen aufrecht zu erhalten und zu vertheidigen ist es daher, welcher mich zu der gegenwärtigen Mittheilung veranlasst, sondern die Hoffnung, dass eine vorurtheilsfreie Würdigung und Beantwortung der Zweifel und Fragen, welche sich mir bei dem Studium der neuesten Publicationen der Herren Stoppani und Curioni aufdrängten, entweder diese Zweifel lösen, oder umgekehrt meine Gegner zu meiner Ansicht bekehren werde, dass also die Fortsetzung der Discussion endlich doch dahin führen werde, den wirklichen Sachverhalt aufzuhellen.

Als ich im Sommer des Jahres 1856 im Auftrage der k. k. geologischen Reichsanstalt eine geologische Übersichtsaufnahme der lombardischen Alpen durchzuführen hatte, lagen mir als die wichtigsten auf die Triasschichten bezüglichen Vorarbeiten vor:

Escher, A. v., Geologische Bemerkungen über das nördliche Voralberg und einige angrenzende Gegenden. 1853.

Curioni, G., Sullo stato geologico della Lombardia. Milano 1844.

„ Sulla successione normale dei diversi membri del terreno triasico in Lombardia. 1855.

Vorläufige Notizen über die Ergebnisse meiner Beobachtungen und den Entwurf meiner geologischen Karte des Landes legte ich im Herbste des Jahres 1856 in der mineralogischen Section der in Wien tagenden 32. Versammlung deutscher Ärzte und Naturfor-

scher [1]), dann im Laufe dieses und des folgenden Jahres in einigen Sitzungen der k. k. geologischen Reichsanstalt vor.

Noch bevor ich aber meine Karte selbst und die Erläuterungen zu derselben im Drucke veröffentlicht hatte (Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt, IX. Bd. 1858. S. 445), erschienen zwei weitere wichtige Publicationen, und zwar:

Stoppani, A., Studii Geologici e Paleontologici sulla Lombardia. Milano 1857.

Curioni, G., Appendice alla memoria sulla successione normale dei diversi membri del terreno triasico in Lombardia. 1858.

Aus neuerer Zeit sind endlich als besonders wichtig für den Gegenstand zu erwähnen:

Stoppani, A., Rivista geologica della Lombardia. Milano 1859.

„ Les petrifications d'Esino. 1858—1860.

Curioni, G., Sui Giacimenti metalliferi e bituminosi nei terreni triasici di Besano. Milano 1863.

Nur so weit als es zum richtigen Verständniss der Frage unerlässlich scheint, will ich in eine geschichtliche Darstellung der Meinungsverschiedenheiten eingehen, welche in den genannten Schriften, so wie in verschiedenen kleineren Publicationen zum Ausdrucke gebracht wurden. Wohl jeder der an den betreffenden weitläufigen Discussionen betheiligten Geologen hat im Verlaufe derselben seine eigenen ersten Ansichten modificirt und hat daher gegründete Veranlassung, auch die fremden Irrthümer nicht allzu strenge zu beurtheilen.

Den Ausgangspunkt für die Feststellung der oberen Triasschichten der Lombardie bildet die Beschreibung der *Trigonia Whatlyae* von L. v. Buch [2]). Seine Ansicht, dass durch dieses Vorkommen echter Muschelkalk angedeutet werde, blieb massgebend und wurde festgehalten in den wichtigen nachfolgenden Arbeiten von Escher und Studer. Ich fand diese Ansicht noch als die herrschende bei den jüngeren italienischen Geologen, als ich im Sommer 1856 das Land bereiste, wenngleich bereits ein Jahr früher Curioni, meines Wissens der Erste, die wahre Stellung der Schichten, welche das bezeichnete Fossil einschliessen, in der oberen Trias

---

1) Tageblatt, Seite 70.

2) Bull. société géologique de France. 2. Sér. II. 1845. p. 348.

erkannt hatte. Ich selbst konnte natürlich über die Richtigkeit der Anschauungsweise Curioni's nicht im Zweifel sein, da mir als Materiale zur Vergleichung bereits die Erfahrungen aus unseren kärnthnerischen Alpen vorlagen.

Den ersten Versuch einer durchgreifenden Classification der inzwischen bereits zur sicheren Geltung gelangten oberen Triasgebilde machte Stoppani in seinen „Studii Geologici"; er trennt daselbst die gesammte obere Trias topographisch in drei Gruppen, deren jede aus drei Gliedern bestehe, von denen die der einen mit jenen der beiden anderen gleichen Alters seien. Die petrefactenführenden Esinoschichten sind dabei beispielweise in Parallele gestellt mit den Raibler Schichten von Gorno und Dossena, insbesondere aber sind auch der tieferen Abtheilung der rhätischen Formation angehörige Gebilde mit den echten Triasgesteinen vereinigt.

Eine andere Behandlung des Gegenstandes versuchte ich in meinen Erläuterungen zur geologischen Übersichtskarte der Lombardie. Gestützt auf eigene Beobachtungen, so wie auf jene Curioni's in seinem Appendice, dann insbesondere auf Analogien aus anderen Theilen der Alpen, suchte ich die ganze obere Trias der Lombardie in drei Hauptetagen zu sondern, und zwar von unten nach oben.

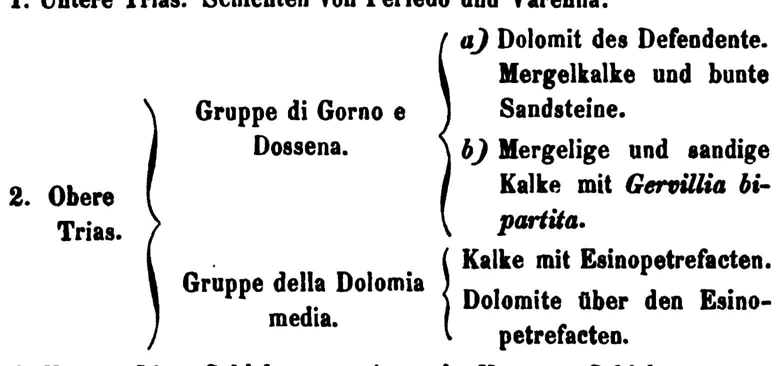
1. Die Cassianer Schichten.
2. Die Esinokalksteine.
3. Die Raibler Schichten.

Ich ging dabei von der Ansicht aus, dass von den zwei grossen nahe parallelen Zonen von sandigen und mergeligen Gesteinen der oberen Trias, welche die lombardischen Kalkalpen namentlich in den Bergamaskerthälern von W. nach O. durchsetzen, die nördliche ein Äquivalent der echten Cassianer, die südliche ein solches der Raibler Schichten sei, dass die gewaltigen zwischen beiden gelagerten Kalk- und Dolomitmassen den Esinokalk repräsentiren, dass endlich über den Raibler Schichten unmittelbar die Dolomite und Kalksteine der rhätischen Formation folgen.

In seiner Rivista, so wie in den geologischen Erläuterungen zu seinen Petrifications d'Esino bekämpft nun Herr Stoppani diese meine Auffassungsweise, zieht aber nicht minder auch seine eigenen in den Studii dargelegten Ansichten völlig zurück. Insbesondere bemüht er sich nachzuweisen, dass meine Cassianer und Raibler

Schichten mit einander völlig ident, dass die petrefactenführenden Kalksteine von Esino ihnen aufgelagert und von den zunächst darüber folgenden Kalksteinen mit grossen Bivalven (Hauptdolomit oder Dachstein-Dolomit) weiter nicht scharf getrennt seien.

Die dunklen Kalksteine und Fischschiefer von Varenna und Perledo, die ich als noch der oberen Trias angehörig bezeichnet hatte, zieht er zur unteren Trias und gelangt demnach zu folgendem Schichtenschema:



1. Untere Trias. Schichten von Perledo und Varenna.

2. Obere Trias.	Gruppe di Gorno e Dossena.	*a)* Dolomit des Defendente. Mergelkalke und bunte Sandsteine.
		b) Mergelige und sandige Kalke mit *Gervillia bipartita*.
	Gruppe della Dolomia media.	Kalke mit Esinopetrefacten.
		Dolomite über den Esinopetrefacten.

3. Unterer Lias. Schichten von Azzarola, Kössener Schichten.

Herr Curioni endlich in seiner neuesten wichtigen Arbeit über Besano zieht seine im Appendice mitgetheilte Angabe, dass die Raibler Schichten über dem Esinokalk liegen, ebenfalls zurück und kömmt damit auf seine bereits in seiner Arbeit „Sulla successione normale" u. s. w. veröffentlichten Beobachtungen wieder zurück; er gibt gar keine Trennung zwischen den petrefaktenführenden Esinokalken und den Kalken und Dolomiten mit den grossen Cardien (Megaladonten) zu, findet dagegen, dass unter den Raibler Schichten (Schichten von Gorno und Dossena) noch ein weiterer Complex von obertriassischen Kalken und Dolomiten der „Dolomit von Ardese" liegt, den er mit dem Hallstätter Kalk parallelisirt. Unter diesem Dolomit von Ardese folgen dann noch echte Cassianer Schichten und darunter erst die untere Trias. Nach seiner neuesten Auffassungsweise stellt sich demnach die Reihenfolge dar wie folgt:

1. Trias. Muschelkalk
   St. Cassianer Schichten mit Amm. Aon und Keuperpflanzen.
   Dolomitischer Kalk von Ardese (Hallstätter Kalk).

Schichten von Dossena mit *Gervillia bipartita* und Keuperpflanzen.
Esinodolomit mit dem echten *Megalodus triqueter*.
2. Infralias. Bänke mit *Avicula contorta* und Megalodonten im mittleren Theile der Schichtenreihe.
3. Lias.

Ich will nun zunächst an eine nähere Betrachtung der einzelnen Gesteinsgruppen gehen, welche, wie sich aus dem Vorhergehenden ergibt, unterschieden und theilweise mit besonderen Namen bezeichnet wurden.

1. Schichten von Perledo und Varenna.

Am Ostufer des Comer Sees, in dem Profile, welches die Strasse am Seeufer entblösst sowohl, als in den Durchschnitten von Val Sassina hinauf südlich auf die Höhen der Gebirgsgruppe von Esino folgen auf die Gesteine der unteren Trias, auf die „Dolomia inferiore" Stoppani's, die wohl geschichteten dunklen „Marmore von Varenna", die nach oben dünn geschichtet bis schiefrig werden und daselbst die berühmte Fisch- und Saurierfauna von Perledo beherbergen. Die fossilen Fische und Saurier dieser Gruppe, die ersteren untersucht von Belloti, die letzteren von Curioni, gehören durchgehends eigenthümlichen, aus anderen Gegenden bisher nicht bekannt gewordenen Arten an; für sich allein bieten sie daher keinen Anhaltspunkt zur Feststellung des Alters der Schichten aus denen sie stammen; nebst ihnen finden sich aber in den tieferen Schichten der ganzen Gruppe bei Regoledo Bänke mit der *Posidonomya Moussoni* Mer. und dasselbe Fossil zusammen mit *Bactryllium canaliculatum* Heer, zeigt sich darin auch am Comer-See nördlich von Varenna. Da aber nun nach Herrn Stoppani's eigener Angabe die *Posidonomya Moussoni* auch in den sicher obertriassischen Kalksteinen von Esino vorkömmt, und das *Bactr. canaliculatum* aus den Raibler Schichten am Col di Zambla, so wie aus den Keuperschichten von Schambelen an der Reuss im Aargau bekannt ist, so glaube ich an meiner früheren Ansicht festhalten zu dürfen, der zu Folge die in Rede stehenden Schichten nicht der unteren, sondern der oberen Trias angehören, deren unterstes Glied sie in den Gebirgen von Esino bilden würden.

In anderen Theilen der lombardischen Alpen sind dagegen, wie mir scheint, die Schichten von Perledo und Varenna bisher nicht nachgewiesen. Zwar meint Stoppani, mit ihnen die fischführenden Schiefer von Besano und die Kalksteine von Marcheno verbinden zu dürfen, und hält es für wahrscheinlich, dass eine selbstständige Zone dieser Gesteine mehr weniger zusammenhängend durch die ganzen lombardischen Alpen zu verfolgen sein werde; allein die Schiefer von Besano haben bisher keine mit den Formen von Perledo übereinstimmende Art geliefert und aus den neuesten Untersuchungen von Curioni geht hervor, dass dieselben ein weit höheres geologisches Niveau einnehmen, als jene von Perledo. Noch weniger aber glaube ich liegen Anhaltspunkte vor, die Kalksteine von Marcheno im Val Trompia mit ihrer wohlbekannten echten Muschelkalkfauna mit den Schichten von Perledo zu parallelisiren. Diese Fauna lässt vielmehr die Ersteren als ein Äquivalent des Muschelkalkes von Recoaro, des von Richthofen so benannten Virgloriakalkes in Vorarlberg und der Umgebung von Reutte, des Muschelkalkes vom Plattensee und von Beczko im Waagthal erkennen, als das Äquivalent einer Schichtengruppe also, welche, mit sehr constant gleichbleibenden paläontologischen und petrographischen Charakteren, an von einander sehr entlegenen Punkten in den Nord- und Südalpen im Bakonyer Walde und in den Karpathen nachgewiesen wurde. Die Fauna dieses alpinen Muschelkalkes, hauptsächlich charakterisirt durch eine Reihe von Brachiopoden (*Retzia trigonella*, *Spirifer fragilis* und *Mentzelii*, *Rhynchonella decurtata* u. s. w.), scheidet sich eben so scharf von jener der unteren alpinen Trias (Werfener Schichten, Schichten von Seiss, Servino u. s. w.) wie von jener der oberen alpinen Trias und bedingt, wie mir scheint, eine selbstständige Stellung der Schichten, welche sie einschliessen, als mittlere alpine Trias.

Auch der Fund eines eigenthümlichen Fisches endlich, des *Lepidotus? spinifer* Bell. in Grumello alto im Val Brembana in einer, wie ich glaube, schon der Hauptentwickelungsregion der rhätischen Schichten angehörigen Gegend kann wohl kaum einen Anhaltspunkt geben zur Annahme eines Wiederauftauchens der Perledoschichten daselbst.

2. Eigentliche Cassianer Schichten.

Zwar scheint aus den Beobachtungen der Herren Stoppani und Curioni hervorzugehen, dass ich auf meiner Übersichtskarte der Lombardie auf zu wenig sichere Grundlagen hin die ganze nördliche Zone der mergeligen oberen Triasschichten zwischen Ardese, Val di Scalve u. s. w. als eine ältere Schichtengruppe, als Cassianer Schichten, von den Raibler Schichten trennte, denn eben zu Ardese finden sich, wie dieselben nachwiesen, in dieser Zone die bezeichnendsten Fossilien der Raibler Schichten, doch aber bestätigen die neuesten Untersuchungen Curioni's in seiner Abhandlung über Besano mit voller Evidenz das wirkliche Vorhandensein einer Gruppe älterer, durch zwischenlagernde Dolomitmassen von den Raibler Schichten getrennter oberer Triasschichten, die er als Cassianer Schichten bezeichnet. Mag ich daher auch auf meiner Übersichtskarte diesen Cassianer Schichten auf Kosten der eigentlichen Raibler Schichten eine zu grosse Ausdehnung gegeben haben, so wird doch, wie ich glaube, nun auch Herr Stoppani die Existenz von zwei altersverschiedenen Gruppen mergelig-schieferiger Gesteine in der oberen Trias kaum mehr in Abrede zu stellen im Stande sein.

Eine sehr dankenswerthe Aufgabe wäre es nun, die genannten beiden Schichtengruppen nunmehr auch wirklich auf einer geologischen Karte zu trennen, nachdem der Versuch, welchen ich selbst in dieser Beziehung machte, jedenfalls viel Mangelhaftes darbieten mag. Übrigens kann ich nicht umhin, darauf aufmerksam zu machen, dass es nach den neueren Erfahrungen, die uns aus den nordtiroler Alpen vorliegen, durchaus nichts Befremdendes haben würde, in den beiden Zonen, die hier als Cassianer und als Raibler Schichten bezeichnet wurden, auch noch eine grössere Anzahl vollkommen identer Petrefactenarten nachgewiesen zu sehen. Aus den Untersuchungen von Pichler [1]) ergibt sich, dass in den Gebirgen nördlich von Innsbruck die untere Mergelzone (Pichler's mittlerer Alpenkalk, von ihm ebenfalls den Cassianer Schichten parallelisirt), welche durch ausserordentlich mächtige Massen von hellem Kalkstein

[1]) Beiträge zur Geognosie Tirols. 3. Folge. Zeitschrift des Ferdinandeums. Innsbruck, 1864.

mit Esinopetrefacten (unterer Keuperkalk Gümbel, oberer Alpenkalk Pichler, Hallstätter Kalk Richthofen) von der oberen Mergelzone (Carditaschichten) getrennt ist, mit ihr gleichwohl die bezeichnendsten Formen gemeinschaftlich beherbergt.

Es scheint mir daraus nur so viel hervorzugehen, dass die ganze obere Trias der Alpen ein innig zusammengehöriges Ganze bildet, und dass eine sehr beträchtliche Zahl der Fossilien derselben durch den ganzen Complex ihrer Schichten hindurchgreifen. Das Vorhandensein einiger, und selbst der bezeichnenden Arten der Gorno-Dossena-Schichten in den Gesteinen einer Mergelpartie kann daher für sich allein vielleicht auch in der Lombardie noch nicht den sicheren Beweis liefern, dass diese Partie der oberen Mergelzone angehört, es ist dazu überdies auch der Nachweis ihrer stratigraphischen Stellung erforderlich.

3. Kalkstein von Ardese.

In diese Abtheilung, welche Curioni auch als „Hallstätter Kalk“ bezeichnet, wären nach seiner Ansicht alle jene Kalksteine und Dolomite einzureihen, welche über der im vorigen besprochenen unteren Mergelzone (den Cassianer Schichten) und unter den im folgenden zu berührenden oberen Mergelschichten (Raibler Schichten) liegen.

In der Annahme einer solchen kalkigen Gesteinszone zwischen den Cassianer und Raibler Schichten stimmt demnach Herr Curioni, im Widerspruch mit Stoppani, völlig mit mir überein. Der einzige Differenzpunkt liegt darin, dass ich eben auch den petrefactenführenden Esinokalken selbst ihre Stellung in dieser Gesteinszone anweisen zu dürfen glaubte, ja den Namen Esinokalkstein selbst zur Bezeichnung der ganzen in Rede stehenden Gesteinszone anwendete, während Herr Curioni in Übereinstimmung mit Stoppani nachzuweisen sucht, dass der eigentliche Esinokalk noch über den Raibler (Gorno-Dossena-) Schichten liegt. Auf dieses letztere Verhältniss werde ich weiter unten ausführlicher zurückkommen.

Hier habe ich nur beizufügen, dass namentlich die Umgegend von Ardese Herrn Curioni die Anhaltspunkte bot, um die Lagerung der Raibler Schichten über den in Rede stehenden Kalksteinen und Dolomiten zu beobachten. Bei Ardese liegt seiner Mittheilung zu Folge unter den Raibler Schichten ein Kalkstein, der dem soge-

nannten *Occhiadino* von Esino sehr ähnlich sieht, und ebenso liegen die Dolomite von Parne, Premolo, Gorno, Zorzone u. s. w. wirklich unter den Raibler Schichten. In diesen Dolomiten fand Curioni nur unbestimmte Fossilreste, weche nicht den Formen von Esino zu ähneln schienen; bezeichnet aber sind diese Dolomite durch das Vorkommen von Erzen, Bleiglanz, Galmei, Blende, welche in Klumpen oder nicht anhaltenden Schnüren in seiner Masse vertheilt sind und auf die in älterer Zeit an verschiedenen Stellen Bergbau eröffnet ward. Sie deuten auf eine Analogie mit den erzführenden Triaskalken Kärnthens. Bei Ardese nimmt der Kalkstein stellenweise auch das Ansehen der Kalke von Hallstatt an, indem er von lebhaft roth gefärbten Adern durchzogen erscheint.

Es ist nicht möglich, ein völlig klares Bild der hier herrschenden Verhältnisse zu erlangen, so lange nicht die so hochverdienten italienischen Geologen ihre Auffassungsweise auch auf Karten zur Anschauung bringen. Ich kann nicht anders verstehen, als dass diese Dolomite von Parne, Zorzone u. s. w. eben jene Zone bilden, die ich auf meiner Karte zwischen den Raibler Schichten im S. und den Cassianer Schichten im N. ausschied, und demnach als Esinokalk bezeichnete. Es ist dieselbe Zone die aber auch Herr Stoppani als echten Esinokalk betrachtet, und in welcher er zwischen Oneta und Col di Zambla seine *Natica monstrum* fand. Um sein Schichtenschema aufrecht zu erhalten, müsste Herr Stoppani entweder zugeben, dass diese Kalksteinzone nicht zu den Esino-Kalksteinen gehört, oder er müsste nachweisen, dass entgegen Herrn Curioni's Beobachtungen die Raibler Schichten statt ihr aufzuliegen, sie unterteufen.

4. Schichten von Dossena und 5. Esinokalk.

Ich betrachte diese Schichtengruppen unter Einem, da ihre relative Stellung den Cardinalpunkt der Differenzen bildet, welche meine Anschauungen nicht blos von jenen Stoppani's, sondern auch von jenen Curioni's trennen.

Wie schon erwähnt, hielt ich dafür, dass die Schichten von Dossena (Raibler Schichten) ein höheres geologisches Niveau einnehmen als die Kalksteine mit der reichen Fauna von Esino, deren genauere Kenntniss wir namentlich dem grossen Werke Stoppani's verdanken. Diese Ansicht, eine Zeit lang von Curioni, und

wie dieser nachweist (Besano S. 8) auch von Stoppani getheilt, wurde später zuerst von dem Letzteren, dann aber auch von dem Ersteren in seiner neuesten Publication als unrichtig bezeichnet und den Raibler Schichten ihre Stellung unter den Esino-Kalksteinen vindicirt.

Nicht in der Lage, auch meinerseits durch neue Beobachtungen an Ort und Stelle zur Lösung der Frage etwas beizutragen, kann ich doch nicht umhin beizufügen, dass ich ungeachtet eines möglichst aufmerksamen Studiums der sämmtlichen bezüglichen Publicationen eine zufriedenstellende Überzeugung von der Richtigkeit der letzterwähnten Anschauungsweise zu gewinnen nicht vermochte.

Die wichtigsten Anhaltspunkte zur Beurtheilung der relativen Stellung der in Rede stehenden Schichtengruppen entnimmt Herr Stoppani:

1. Aus den Gebirgen bei Esino selbst. Die von Escher entdeckten und später vielfach untersuchten Raibler Schichten der Prati d'Agueglio mit *Gervillia bipartita* Mer., *Pecten filosus* Hau. u. s. w. liegen, wie er angibt (Rivista pag. 29), hier vollkommen regelmässig zwischen dem Dolomit des St. Defendente und den petrefactenführenden Esinoschichten und die ganze Anordnung der Schichten ist hier völlig normal und regelmässig.

In der neuesten Abhandlung Curioni's dagegen (Besano S. 16) lesen wir, dass die genannten Raibler Schichten gegen SW. fallen und sich „einschieben zwischen den Spitzen des Defendente, der aus Esinoschichten besteht und ihnen auflagert, und jenen des Sasso Mattolino, der auch aus grauem Dolomit besteht, aber unter ihnen liegt“.

Die Beobachtungen beider stehen daher hier in directem Widerspruch; nach dem Ersteren gehörte der Dolomit des Defendente einer älteren Abtheilung an und läge unter den Raibler Schichten, nach dem Letzteren wäre er Esinodolomit und lagerte über den Raibler Schichten, während die Gesteine des Sasso Mattolino zu seiner Gruppe der Ardese-Kalksteine gehören würden. Eine für unsere Frage entscheidende Beweiskraft können dem Gesagten zu Folge die von dieser Stelle vorliegenden Beobachtungen wohl nicht beanspruchen.

Der weiteren Auseinandersetzung Curioni's ist es, da auch die grossen Specialkarten des Generalquartiermeisterstabes nur die

wenigsten der von ihm aufgeführten Localitätsbezeichnungen enthalten, nur schwierig zu folgen, doch geht aus denselben hervor, dass die Raibler Schichten von den Prati d'Agueglio weg weiter nach SO. streichend bis gegen Esino superiore zu verfolgen sind, dass sie ihre Fallrichtung nach SW. beibehalten, und dass sich östlich von ihnen eine Reihe von Höhen befindet (Cassissio, Zocca Caveda, Mt. Zirlaca, Cigo, Mt. Scalette), Ausläufer der Höhen des Sasso Mattolino, die aus porösem Dolomit bestehen, der in reicher Menge die Fossilien von Esino enthält. Die Schichten dieses Dolomites streichen ebenfalls von NW. nach SO. und fallen conform den Raibler Schichten nach SW., welch' letztere daher über den Dolomiten zu liegen scheinen. Wir haben also in der That hier eine Beobachtung, welche für die Auflagerung der Raibler Schichten auf den Esinoschichten, nicht aber umgekehrt spricht und für deren Erklärung in seinem Sinne Herr Curioni eine Faltung der Schichten anzunehmen genöthigt ist. Allerdings erwähnt Herr Curioni, dass auch westlich von der genannten Zone der Raibler Schichten, bei Esino inferiore, „der Kalkstein mit Chemnitzien, eine Fortsetzung von jenem des Defendente", vorkomme.

Jedenfalls kann ich nach diesen Angaben die von Stoppani so lebhaft betonte Regelmässigkeit der Lagerungsverhältnisse, wenn sie im Sinne seiner Ansichten gedeutet werden sollen, nicht anerkennen und möchte an meine geehrten Freunde die Frage stellen, ob es nicht am Ende doch naturgemässer erschiene, diese Beobachtungen im Sinne meiner Ansichten zu erklären und anzunehmen, dass der Dolomit des Sasso Mattolino zusammen mit den ihm südöstlich anschliessenden Spitzen bis zum Monte Scalette wirklich als Esinodolomit normal unter den Raibler Schichten liege.

2. Aus der Umgegend von Lenna. Herr Stoppani gibt an, dass die von mir als den Cassianer Schichten angehörig betrachtete Zone mergeliger Gesteine von Ardese nach meinen eigenen Beobachtungen westlich fortsetze bis oberhalb Piazza und den Kalkstein mit den Esinofossilien von Lenna unterteufe. Da nun durch die bei Ardese aufgefundenen Petrefacten bewiesen werde, dass diese Zone den wirklichen Raibler Schichten angehöre, so gehe aus meinen eigenen Beobachtungen die Überlagerung der Raibler Schichten durch die Esinokalke hervor.

Abgesehen von dem Umstande, dass, wie oben berührt, die Auffindung von Petrefacten der Raibler Schichten vielleicht noch nicht hinreichend ist, um die Mergelzone von Ardese wirklich als die höhere der beiden obertriassischen Mergelzonen zu charakterisiren, würde die Beweisführung Herrn Stoppani's in der That schlagend zu nennen sein, wenn ich die gedachten Beobachtungen wirklich gemacht hätte. Dies ist aber absolut nicht der Fall und ich gestehe, dass ich nicht einmal zu enträthseln vermag, welche Stelle in irgend einer meiner Abhandlungen oder Notizen zu diesem Missverständnisse Veranlassung gegeben hat. Überall erklärte ich ausdrücklich, dass ich meine Cassianer Schichten im Val Brembana nicht beobachtet habe.

Gerade die Umgebung von Lenna übrigens scheint mir noch heute für die Richtigkeit meiner Auffassung der Gliederung der oberen Trias mit grosser Bestimmtheit zu sprechen. Unmittelbar unter den Dolomiten der Portiola (oder Porticola) und der Ennaschlucht folgen mit regelmässigem Westfallen die Raibler Schichten, die ich in der Umgebung von Pianca beobachtete und von hier aus nordwärts über Brembilla und St. Antonio regelmässig fortstreichen sah. Dass sie in dieser Richtung an der Westseite des Val Brembana fortsetzen, um sich mit den gleichen Schichten des Val Stabina bei Cassiglio zu verbinden, geht aus älteren wie aus neueren Beobachtungen unzweifelhaft hervor. Im Thalgrunde des Val Brembana herrschen sie von der Einmündung der Enna nordwärts noch fort bis kurz vor der Einmündung des ebenfalls von W. herabkommenden Val Secca, nur in der Umgebung von Camerata sind sie theilweise durch moderne Conglomeratmassen verdeckt. Bei Val Secca treten nun zum ersten Male die Kalksteine hervor, welche etwas weiter bei Lenna die bekannten Esinofossilien enthalten. Sie fallen ganz conform den Raibler Schichten nach W. unter diese ein, und setzen fort bis über Lenna hinaus; unter ihnen folgen dunkle Kalksteine (vom Ansehen der Guttensteiner Kalke schrieb ich in meinem Tagebuche) und in der Gegend von Valnegra betritt man das Gebiet der unteren (Verrucano-) Sandsteine und Conglomerate. „Sie beginnen", heisst es in meinem Tagebuche, „mit grau gefärbten Schiefern, theilweise vom Ansehen wirklicher Thonglimmerschiefer, dann folgen rothe schiefrige Schichten, dann in ungeheurer Ausdehnung rothe Conglomerate".

Diese Beobachtungen, welche, was die Schichtenstellung betrifft, mit den älteren von Balsamo Crivelli völlig übereinstimmen und von denselben nur in der Deutung der einzelnen Etagen abweichen, sind in keiner der nachfolgenden Arbeiten von Stoppani widerlegt. Ich muss an ihnen festhalten und sie als massgebend betrachten, so lange nicht ihre Unrichtigkeit nachgewiesen ist. Zu diesem Behufe möchte ich Herrn Stoppani dringend ersuchen, einen Durchschnitt von Val Negra in südwestlicher Richtung. etwa über Piazza, Lenna, bis zu einer der Dolomithöhen nördlich von der Ennaschlucht zu entwerfen. Waren meine Beobachtungen richtig, so wird er auf demselben in regelmässiger Aufeinanderfolge von unten nach oben antreffen:

1. Verrucano gegen oben mit dunklen Schiefern in Verbindung.
2. Dunkle Kalksteine als Repräsentanten des Muschelkalkes.
3. Vielleicht noch unterteuft von Schichten, welche die Cassianer Schichten repräsentiren würden, welche ich aber nicht beobachtete, die petrefactenführenden Kalksteine von Lenna.
4. Die Gorno-Dossena-Schichten.
5. Die Dolomite der Portiola.

Eine möglichst vorurtheilsfreie Untersuchung dieses Profiles muss, wie mir scheint, die Streitfrage endgültig lösen. Erweist sie meine Beobachtungen als irrig, so werde ich es gewiss dankbar anerkennen, eines Besseren belehrt zu werden.

3. Aus der Umgebung von Dossena. Auf dem fossilienführenden mergeligen Kalk von Dossena (Rivista pag. 33) oder den Raibler Schichten ruht nach Stoppani ein Kalkstein, dem von Lenna ähnlich, und darin fand sich zwischen Oneta und Col di Zambla die für die Esinoschichten bezeichnende *Natica monstrum* Stopp. — Diese Beobachtung steht, wie schon oben erwähnt, wenn ich anders die betreffenden Mittheilungen richtig verstehe, wieder in directem Widerspruche mit den Beobachtungeu Curioni's, denn die Kalksteine zwischen Dossena und Col di Zambla gehören zu dessen „Ardesedolomiten“ und liegen unter den Raibler Schichten

Mit diesen drei Stellen sind die Angaben Stoppani's in der „Rivista“ erschöpft, welche sich auf das Verhältniss der Raibler Schichten zu den Kalksteinen mit der Esinofauna beziehen. Die vielen weiteren, namentlich in dem Werke über Esino enthaltenen Angaben über die Auflagerung von Kalken und Dolomiten auf die

Raibler Schichten erkenne ich gerne als richtig an, nur beziehen sie sich eben auf Kalksteine, welche nach meiner Ansicht mit den eigentlichen Esinokalken nicht verbunden werden dürfen, sondern dem Hauptdolomit oder unterem Dachstein-Dolomit entsprechen und wohl schon der rhätischen Formation angehören. Es sind dies jene Kalksteine und Dolomite, welche meist durch die grossen Megalodonten (Cardien), charakterisirt mit den echten Esinokalken, angeblich gemeinschaftlich enthalten die *Gastrochaena obtusa* Stopp., die *Avicula exilis* Stopp. und die *Evinospongia cerea* Stopp.

Dass die grossen Megalodonten dem echten Esinokalke fehlen, dürfen wir wohl um so sicherer annehmen, als auch Herr Stoppani dieselben in seinen „Petrifications d'Esino" nicht mit aufgenommen hat. — Was die drei anderen Formen betrifft, so kann wohl nur die *Avicula exilis*, eine glatte Bivalve mit wenig ausgeprägten Artcharakteren, als ein irgend zuverlässig bestimmbares Fossil bezeichnet werden. Von den anderen zwei Formen bleibt die *Gastrochaena obtusa* — derselben Reihe von Formen angehörig, welche Schafhäutel als *Nullipora annulata*, Schauroth und Gümbel als *Chaetetes* beschrieben und deren Vorkommen im oberschlesischen Muschelkalke jüngst erst Eck[1]) nachwies — nach Stoppani's eigener Angabe, ungeachtet aller seiner Bemühungen, ihre wahre Natur zu ergründen, immer problematisch bezüglich ihres zoologischen Werthes und der Unterscheidung einzelner Arten. Die zweite, die *Evinospongia cerea*, scheint mir selbst bezüglich ihrer organischen Natur überhaupt nicht über jeden Zweifel erhaben; ich bin geneigt zu glauben, dass Herr Stoppani mit diesem Namen Körper beschrieben und abgebildet hat, die auch schon vor längerer Zeit von Kudernatsch[2]) aus den unteren Schichten des Dachsteinkalkes der österreichischen Alpen erwähnt wurden. Das Wiederauftreten derartiger Gebilde, die im echten Esinokalke vorkommen in anderen Dolomiten oder Kalksteinen, die über den Raibler Schichten liegen, scheint mir nicht hinreichend, um auch die letzteren mit Sicherheit als Esinokalke zu bezeichnen. — Übrigens habe ich selbst stets zugegeben, dass auch Chemnitzien noch in die über den

---

[1]) Zeitschr. d. deutschen geologischen Gesellschaft. XIV. S. 230.

[2]) Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1851. III. Heft, Seite 57.

Raibler Schichten liegenden Hauptdolomite oder unteren Dachstein-Dolomite übergehen und würde durchaus nichts Befremdendes darin erkennen, wenn sich eine oder die andere Art selbst als specifisch identisch mit einer des echten Esinokalkes erweisen sollte.

Dem Gesagten zufolge kann ich auch die von Curioni so sorgfältig untersuchten und genau beschriebenen Dolomite von Besano mit ihren eingelagerten bituminösen Schiefern nicht zum Esinokalk stellen. Auch sie sind charakterisirt durch Megalodonten, dann die sogenannten Gastrochaenen, nicht aber durch die echte Esinofauna. Sie gehören, wie ich glaube, zum Hauptdolomit, und das Vorkommen der ihnen eingelagerten bituminösen Schiefer mit Fischen und Sauriern erinnert unwillkürlich an das ganz analoge Vorkommen der Asphaltschiefer von Seefeld in Tirol, mit deren Fischfauna jene von Besano zu vergleichen eine überaus wünschenswerthe Aufgabe bildet.

Noch erübrigt es, die Beobachtungen Curioni's aus der Umgegend von Tolline am Lago d'Iseo zu erwähnen. In dem von ihm auf das Genaueste untersuchten Durchschnitte am Seeufer folgt nach seinen neuesten Angaben über den Schichten mit den Raibler Petrefacten ein poröser schwärzlicher Kalk, in welchem er nach langem Suchen einige sehr schlecht erhaltene und beinahe unbestimmbare (assai malconci e quasi indeterminabili) Esinofossilien, und zwar Chemnitzien und Naticen auffand; darüber folgen dann die Dolomite mit den grossen Bivalven, *Avicula* u. s. w. Dieser Beobachtung habe ich nichts entgegenzusezten als die Bemerkung, dass eben doch noch der Nachweis wirklicher Esinospecies fehlt; sollte er aber auch geliefert werden können, so würde mir aus demselben auch nur hervorzugehen scheinen, dass einige der Esinoarten die Periode der Ablagerung der Raibler Schichten überdauerten.

Das Gesagte mag genügen, um es zu rechtfertigen, dass ich ungeachtet der Lebhaftigkeit, mit welcher namentlich Herr Stoppani meine Auffassung der Gliederung der oberen Trias bestritt, doch immer noch an derselben festhalte; ich füge nur noch hinzu, dass unter Voraussetzung ihrer Richtigkeit eine vollendete Übereinstimmung der Verhältnisse in den lombardischen Alpen und jener in Nordtyrol und den bairischen Alpen unverkennbar ist. Das folgende Schema macht dies anschaulich:

	Lombardische Alpen.	Tiroler und bayerische Alpen nach Gümbel, v. Richthofen, Pichler und meinen eigenen Beobachtungen.
Mittlere Trias.	Kalk von Marcheno.	Muschelkalk, Virgloriakalk.
Obere Trias.	Cassianer Schichten, Schichten von Perledo und Varenna.	Partnachschichten, Mittlerer Alpenkalk Pichler's.
	Kalk von Ardese, eigentlicher Esinokalk. *Dolomia media* z. Th.	Unterer Keuperkalk. Arlbergkalk und Hallstätter Kalk (Richthofen), Esinokalk, oberer Alpenkalk (Pichler).
	Raibler Schichten; Schichten von Gorno und Dossena.	Carditaschichten, Raibler Schichten, unterer Muschelkeuper.
Unteres Glied der rhätischen Formation.	Kalk mit den Cardien (Megalodonten) u. Gastrochänen e. c. — *Dolomia media* z. Th. Dolomit von Besano.	Hauptdolomit, unterer Dachstein-Dolomit.

Nachschrift. Im Augenblicke während mir die Correctur der vorstehenden Mittheilung vorliegt, erhalte ich die Lieferungen 28—32 der Paléontologie Lombarde mit Herrn Stoppani's Abhandlung „sur les grandes Bivalves Cardiformes e. c.", in deren Vorrede auch wieder viel über die lombardische Trias zu finden ist. Herr Stoppani ändert darin abermals seine Ansichten über die Gliederung dieser Formation, um völlig die Curioni's zu adoptiren. Ich freue mich aufrichtig, ihn hierdurch wie aus dem obigen hervorgeht, um einen gewaltigen Schritt meiner eigenen Auffassungsweise näher gerückt zu sehen, und sehe mit um so gespannterer Erwartung der Beantwortung meiner hier gestellten Fragen und Zweifel entgegen. Ich füge nur noch eine weitere Frage hinzu. Nur auf einem der Profile, welche zur Erläuterung der Stellung der Schichten mit den grossen Bivalven mitgetheilt werden, ist das Vorkommen von Schichten mit Esinopetrefacten angezeigt und zwar auf Fig. 4 (Taf. 58) in dem Durchschnitte vom Val Taleggio nach St. Giovanbianco im Val Brembana. Sie sind hier oberhalb Pianca. als unmittelbar die Gorno-Dossenaschichten überlagernd, eingezeichnet. Meines Wissens hatte bisher Niemand in diesen Dolomiten der Ennaschlucht die echten Esinopetrefacten nachgewiesen. Sind sie hier nun wirklich vorhanden, so schiene eine genauere Mittheilung der einzelnen beobachteten Arten von hohem Interesse.

Zur Theorie eines Systems von Varianten der conoidischen Propellerschraube.

Von **Karl Moshammer,**
ord. Lehrer für Mechanik.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Jänner 1865.)

Ich fand Gelegenheit einzelne Varianten der gewöhnlichen oder conoidischen Propellerschraube sowohl an kleinen Modellen als auch durch einzelne Fachschriften, namentlich durch das zum Theil noch unter der Presse befindliche Werk Ledieu's (Traité elémentaire des appareils a vapeur de navigation, Paris 1864) kennen zu lernen. Ich suche im Folgenden die von dem genannten und anderen Fachmännern aufgestellte Behauptung, „dass die gewöhnliche oder conoidische Propellerschraube mit zweckmässig gewählter Leitlinie unter übrigens gleichen (im Folgenden näher erörterten) Umständen jeder Variante vorzuziehen sei", durch den Calcul zu begründen und glaube, die gefundenen Resultate seien geeignet, etwa noch angestrebten Flügelform-Änderungen theilweise als theoretische Basis zu dienen und zugleich eine numerische Effectsbestimmung zu vermitteln.

1.

Bewegt sich eine geradlinige Erzeugende längs einer im Raume gegebenen Leitlinie derart um eine zweite fixe Gerade, dass sie mit letzterer stets einen Winkel von 90° bildet, so nennt man bekanntlich die dadurch erzeugte windschiefe Fläche ein senkrechtes Conoid, in jenem speciellen Falle, in welchem als Leitlinie eine der gegebenen fixen Geraden als Axe entsprechende Schraubenlinie angewendet wird, erscheint dieses Conoid als Schraubenfläche an der flachgängigen Schraube und als Propellerfläche an der gewöhnlichen zwei- oder mehrflügeligen Propellerschraube, und zwar in letzterem Falle der Hauptsache nach (Fig. 1) begrenzt durch zwei

(Eintritts- und Austritts-) Erzeugende *a b*, senkrecht zur Schraubenaxe *o* und durch ein Stück der in der Entwickelung geradlinig erscheinenden Leitlinie *c* [1]).

Bekanntlich sind die einzelnen Flügel dieser gewöhnlichen Propellerschraube, für welche die sämmtlichen Eintrittserzeugenden *a*, *a'*, *a''* und eben so die Austrittserzeugenden *b*, *b'*, *b''* in einer auf der Axe senkrechten Ebene (Umdrehungsebene) liegen, in Verbindung mit einer cylindrischen Radnabe *e*, welche mittelst der Schraubenaxe *o* durch die Schiffsmaschine in Umdrehung versetzt wird.

Bereits zur Zeit der Erfindung [2]) dieses Propellersystems und auch nach derselben waren und sind einzelne Constructeure bemüht, zahlreiche, jedoch mehr oder minder wesentliche Modificationen an diesem Systeme in Vorschlag und Anwendung zu bringen. A. Ledieu classificirt dieselben im oben genannten Werke nach drei verschiedenen Gesichtspunkten, je nachdem nämlich

a) durch die Form der Flügeloberfläche

b) durch die Anordnung der Propellerflügel um die Axe (System Mangin, Maudslay u. s. w.)

c) durch die Verbindung des Propellers mit der Maschine und den übrigen Schiffstheilen (fixe und amovible oder abnehmbare Schrauben u. s. w.) Modificationen in Anwendung kamen.

Die in letzterer Beziehung und zum Theil auch die unter *b)* eingereihten Anordnungen sind jedoch in mechanisch-wissenschaftlicher Beziehung von untergeordnetem Interesse, indem sie sich unter anderem beispielsweise auf jene Einrichtungen beziehen, welche nothwendig werden, um bei Fahrten mit Segel und Schraube mit möglichst grossem Nutzen theilweise oder ganz den einen oder andern Motor in Anwendung bringen zu können u. dgl. m.

Als besonders wesentliche Ursachen, welche hingegen Modificationen des conoidischen Propellers bezüglich des ersten Gesichtspunktes, nämlich der Form der Flügeloberfläche, hervorriefen, dürften zunächst die verschiedenen Effectsverluste bezeichnet werden; dahin gehört unter anderem die sogenannte centrifugirende Action der Schraube, sie besteht im Wesentlichen darin, dass, zu

---

1) Fig. 1 und 5 nach Schrauben des österreichischen Lloyd.

2) Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie 1862.

Folge der Flügelform und Adhäsion des Wassers an den Flügeln ein Theil der Umdrehungskraft des Propellers, d. i. indirect der Maschine, dazu verwendet wird, dem Wasser eine eigenthümliche Bewegung am Schiffshintertheil zu ertheilen; dieser Theil der Arbeit von Seite der Maschine ist sonach offenbar für den Nutzeffect verloren und dadurch, dass dieses in Bewegung befindliche Wasser eine nicht parallel dem Schiffskiel laufende Richtung annimmt, wird überdies der Bewegungswiderstand vergrössert.

Indirect wird der Effect noch weiters nachtheilig beeinflusst, dass diese centrifugirende Action den sogenannten Rücklauf, d. i. die in der Axenrichtung gemessene Differenz zwischen der Geschwindigkeit der Schraube und jener des Schiffes, vergrössert. (Nach der französischen Benennung ist *recul* das Verhältniss dieser Geschwindigkeitsdifferenz zur Schraubengeschwindigkeit.) Der Rücklauf ist um so geringer, daher der Effect um so grösser, je widerstandsfähiger das die Schraubenmutter (wenn diese Benennung gebraucht werden darf) bildende Mittel ist, mithin in dem durch die genannte Action bewegten Wasser grösser als im ruhenden, im übrigen aber von der Form der Flügel, Form des Schiffshintertheiles u. s. w. abhängig, seine Grösse ist daher an und für sich als eine zweite Ursache des Effectsverlustes zu betrachten (der von Smith zuerst angegebene sogenannte negative Rücklauf wird von vielen Ingenieurs bezweifelt) [1]).

In dem eingangs genannten Werke findet sich jedoch wiederholt die Äusserung, dass „der Centrifugalaction der Schraube keine so grosse Wichtigkeit beizulegen sei, wie einzelne Constructeure mit Rücksicht auf die von ihnen vorgeschlagene Flügelform voraussetzten" [2]); in ähnlicher Weise äusserte sich auch Prof. Redtenbacher in seiner bekannten Abhandlung [3]) über den geringen Einfluss, welchen das bewegte Wasser am Hinterstern des Schiffes auf den Effect ausübe.

Endlich haben noch die Arbeitsverluste durch die Reibung der Flügel im Wasser durch ihren stossweisen Angriff, sowie

---

1) Vergl. „Negative Slip" in Murray's: the Marine Engine, London 1858; und Ledieu, pag. 336 (oben genanntes Werk).

2) Pag. 297 und 317.

3) Die calorische Maschine, Mannheim 1853.

das Lager und Axen verheerende Zittern und Stossen in der Richtung der Schraubenaxe, welches nebst anderem auch von der Form und Zahl der Flügel so wie von der Wirkung des bewegten Hinterwassers abhängt, Modificationen in Bezug auf die Flügelform hervorgerufen.

2.

Die Wirkungsweise der gewöhnlichen Propellerschraube so wie sämmtlicher in Rede stehender Varianten derselben, besteht bekanntlich darin, dass eine in der Axenrichtung liegende Componente P des zwischen dem Flügel und Wasser stattfindenden Normaldruckes N, modificirt durch den Einfluss des bewegten Hinterwassers und durch den Betrag der Reibung r, als vorwärtstreibende Kraft erscheint, während eine zweite in der Umdrehungsrichtung liegende Componente Q von der Maschinenkraft aufgenommen wird; erstere Componente P hat den von der Form des Schiffes, so wie vom bewegten Medium abhängenden Widerstand [1] $(f+f')$ zu überwinden, somit ist

$$P=f+f'$$

zu setzen, während die um den Effectsverlust e durch das bewegte Hinterwasser verminderte Arbeit E der Dampfmaschine der Wirkung W der Umdrehungscomponente Q gleichzusetzen ist, woraus sich

$$W=E-e$$

ergibt.

Da die mit f' e r bezeichneten, so wie noch andere den Effect und die Dimensionen der in Rede stehenden Propeller beeinflussende Factoren grösstentheils nur auf Grund zahlreicher Erfahrungsresultate zu ermitteln sind, so müssen sich auch auf letztere die theoretischen Untersuchungen zur Bestimmung der Dimensionen, der Geschwindigkeit, des Effectes etc. basiren, und es kann sich daher aus diesen und anderen naheliegenden Gründen die folgende streng wissenschaftliche Untersuchung nur darauf beschränken:

„die Grössen P und W, in so weit diese blos von der geometrischen Form der einzelnen Propellervarianten abhängen, zu bestimmen, und sie mit einander

---

[1] Nach Redtenbacher aber grösstentheils von der Reibung des Schiffes im Wasser abhängend.

und zugleich mit den bereits bekannten theoretischen Ergebnissen für dieselben Grössen P und W an der gewöhnlichen Propellerschraube zu vergleichen".

Die gefundenen Resultate dürften auch geeignet sein, weiteren noch angestrebten Formveränderungen der conoidischen Propellerschraube, jedoch nur bezüglich der Grössen P und W, als theoretische Basis zu dienen.

Die geometrische Form der in Rede stehenden Propellerflächen macht eine Bestimmung der genannten Grössen P und W auf elementarem Wege, wie dies beispielsweise nach der Theorie des englischen Ingenieurs Bodmer für die conoidische Propellerschraube versucht wurde [1]), ganz unzuverlässlich, wenn nicht unmöglich.

Bourgois [2]) legte seinem theoretischen Calcul eine Reihe von experimentellen Resultaten zu Grunde, wodurch allerdings eine numerische Bestimmung der Dimensionen, des Effectes etc. der conoidischen Schraube vermittelt ist; jedoch zu der in Rede stehenden Untersuchung dürfte sich am besten jenes Verfahren empfehlen, welches Prof. Redtenbacher [3]) für die gewöhnliche Propellerschraube publicirte; es besteht im Wesentlichen darin:

„die Propellerfläche und namentlich ein Element derselben vollkommen geometrisch zu charakterisiren, die Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit, so wie den dem Elemente entsprechenden Normaldruck von Seite des umgebenden Mediums zu bestimmen und letzteren in eine vorwärtstreibende und in eine Umdrehungscomponente zu zerlegen".

Im folgenden möge für die in Rede stehenden Varianten der conoidischen Propellerschraube ein ähnlicher Weg verfolgt werden.

3.

Indem wir uns erlauben, bezüglich der Beschreibung einzelner Propellervarianten sowohl auf das eingangs erwähnte Werk als auch auf andere Fachschriften [4]) zu verweisen, und indem wir ferners von diesen Propellern nur einige zur Begründung des Folgenden

---

[1]) Österr. Marine-Zeitschrift 1854.

[2]) Recherches théoriques et experimentales etc. Paris, 1845.

[3]) Genannte Schrift.

[4]) z. B. Murray: the Marine Engine; (oben genanntes Werk.)

gelegentlich anführen, mögen zunächst die überhaupt möglichen und angestrebten Modificationen an der conoidischen Propellerschraube, insofern sie sich auf ein allgemeines geometrisches Entstehungsgesetz zurückführen lassen, besprochen werden.

Diese Modificationen sind dreierlei Art:

a) Beziehen sie sich auf eine Abänderung der geradlinig entwickelten Leitlinie c (Fig. 1);

b) auf eine Modification der senkrecht zur Axe stehenden Erzeugenden a;

c) auf eine Abänderung der nahezu dreiseitigen $(a\,b\,c)$ den Winkel γ einschliessenden Flügelform im Grundriss (d. i. projicirt auf die Umdrehungsebene senkrecht zur Axe) in so weit dieselbe nicht bereits durch die beiden vorausgehenden Veränderungen bedingt ist.

Es kommen meist nur eine oder zwei, seltener alle drei Modificationen an ein und derselben Propellerfläche vor.

a.

Wird die conoidische Propellerfläche durch concentrische Cylinder vom Radius $\rho\ \rho'\ \rho''$ (Fig. 1 und Durchschnitt Fig. 1 *b*) parallel zur Leitlinie c geschnitten, so sind die Fig. 1 *a* entwickelten Schnittflächen an der Vorder- oder eigentlichen Propellerfläche dem Charakter der Schraube zu Folge durch gerade Linien $m1$, $m2$, $m3$ u. s. w. begrenzt, deren Neigungen φ, φ', φ'' u. s. w. zur Umdrehungsebene durch die Relationen

$$R \operatorname{tang} \varphi = \rho' \operatorname{tang} \varphi' = \rho'' \operatorname{tang} \varphi'' \ldots.$$

bestimmt sind (wobei R und φ die den ρ' und φ', ρ'' und φ'' u. s. w. analogen Grössen für die Leitlinie c bezeichnen), während für die Krümmung der Hinterfläche also für die Curven $g\ g'\ g''$ eine andere der Wesenheit nach von der Festigkeit des Materials abhängende Form massgebend erscheint; diese, vorherrschend für Handelsschiffe beibeibehaltene Anordnung (Schraube mit constanter Windung, *pas constant*) hat jedoch dahin praktische Abänderungen erfahren, (zuerst durch Prof. Woodcroft 1832), dass die entwickelte Leitlinie gebrochen erscheint (Fig. 1*a*), d. h. dass an der Eintrittsstelle, also bei der in der Umdrehungsrichtung vorausgehenden Erzeu-

genden a, der Neigungswinkel α' gegenüber jenem α an der Austrittsstelle in einem gewissen Verhältnisse zur Geschwindigkeit des Schiffes und zur entwickelten Flügelbreite verringert, der Übergang aber durch einen entsprechenden Curvenbogen vermittelt wird. (Schraube mit zunehmender Windung, *pas croissant*). Nach dem Vorschlage einzelner Constructeure findet diese Abänderung des Richtungswinkels selbst bei mehreren Punkten 1, 2 der Leitlinie statt und es kann sogar letztere in eine Curve $A B$ übergehen, deren Richtungswinkel α, α', α'' als Function des entwickelten Cylinderbogens $R\gamma$ erscheinen; in diesem Falle sind die Elemente v, w dieser Curve zugleich Elemente der den Richtungswinkeln α', α'' entsprechenden geradlinig entwickelten Schraubenlinien, diese Curve ist also durch $\alpha = f(\gamma)$ oder

$$\varphi = f(\gamma)$$

ganz allgemein charakterisirt und es erscheint daher die ganze Flügelfläche als Propellerfläche mit continuirlich veränderter Windung (*pas variable*), ähnlich den Schaufelflächen an der Jonvaler-Turbine.

Diese Abänderungen haben sich in der Kriegsmarine ausserhalb England Bahn gebrochen.

Da für diese Fläche ein Vorwärts gehen im festen Medium (Schraubenmutter) undenkbar ist, so ist auch die Bestimmung ihres Rücklaufes im oben angegebenen Sinne unmöglich, und es verliert diese Fläche überhaupt den Charakter der in sich selbst verschiebbaren Schraubenfläche.

b.

Werden mit Bezug auf das unter a Angeführte bei den jetzt zu besprechenden Modificationen der Erzeugenden die Flächenelemente am Propellerflügel mit gebrochener Leitlinie von jener Grösse vorausgesetzt, welche die entsprechende Leitlinie als geradlinig entwickelte Schraubenlinie ansehen lässt, so ist die erste naheliegende Modification der senkrecht zur Axe also parallel zur Umdrehungsebene gegebenen Erzeugenden a (Fig. 1) die, dass letztere mit der Umdrehungsebene einen Winkel x einschliesst, jedoch stets in einer durch die Axe gelegten Ebene (Axenebene) liegt.

In Fig. 2 [1]), einer Skizze von Dundonald's Propeller (patentirt 1843) ist der Richtungswinkel x variabel, nämlich abnehmend gegen die Ein- und Austrittskanten r, s.

Dieser Winkel x kann auch für die Elemente ein und derselben Erzeugenden variiren (Fig. 2a) $\sphericalangle x, x'$, in diesem Falle übergeht die geradlinige Erzeugende in eine Curve E von bekanntem Krümmungsgesetz, (Fig. 3), bestimmt durch die Winkel x, x' u. s. w., so zwar, dass bei continuirlicher Entstehung die Richtungswinkel x^{0}, x', x''... x mit der Zunahme der Rotationsradien ρ ρ' ρ''... R sich verändern, also die Erzeugende E durch

$$x = f_1(\rho)$$

charakterisirt ist.

In Fig. 3 ist Hodgson's Propeller (pat. 1844) skizzirt, bei welchem die Erzeugende E eine Parabel ist.

Die zweite Modification der conoidischen Erzeugenden besteht darin, dass sie zwar parallel zur Umdrehungsebene bleibt, jedoch mit der entsprechenden Axenebene oz (Fig. 1c) einen Winkel y bildet; in der That kommen in neuerer Zeit einzelne Flügelvarianten vor, bei welchen die Austrittskante b (Fig. 1 und Fig. 1e) nicht mehr radial sondern tangirend an einen concentrischen Kreis von bestimmtem jedoch gegen die Eintrittskante a abnehmendem Radius erscheint; wie im früheren Falle kann auch dieser Winkel für die einzelnen Elemente der Erzeugenden zu- oder abnehmen, und es übergeht dann die geradlinig gebrochene — (Fig. 4a) in die Curven-Erzeugende E (Fig. 4) und zwar derart, dass, wie oben die Tangentenwinkel y' y' y''... y als Functionen der entsprechenden Radien ρ ρ' ρ'' erscheinen, mithin bei continuirlicher Veränderung

$$y = f_2(\rho)$$

ist.

In Fig. 4 ist Hirsch's Propeller (pat. 1860) skizzirt, seine eben besprochene Erzeugende ist ein Bogenstück einer archimedischen Spirale und die Leitlinie c gebrochen (mit Bezug auf das unter a angeführte), also mit Eingangs- und Ausgangswindung versehen.

---

[1]) Fig. 2, 3 und 4 nach Ledieu.

c.

Eine dritte Modification an der conoidischen, so wie möglicherweise auch an jeder der besprochenen Flächenformen wurde dadurch erzielt, dass die Flügelfläche nicht durch zwei Erzeugende und eine Leitlinie, sondern durch andere, von den einzelnen Constructeurs wahrscheinlich nur auf empirischem Wege bestimmte Curven begrenzt wurde; (Fig. 5).

Diese, übrigens mehr untergeordnete Abänderung kann auf geometrischem Wege der Hauptsache nach dahin zurückgeführt werden, dass die einzelnen Propellerflächen von einem projicirenden Cylinder senkrecht zur Umdrehungsebene, mit entsprechend gewählter Leitlinie, geschnitten werden; so kann beispielsweise die in Fig. 5 skizzirte Griffith's-Schraube, wie sie heutzutage ohne den eigenthümlichen Apparat zur Veränderung der Flügelstellung angewendet wird, dadurch entstanden gedacht werden, dass die Flügelfläche des gewöhnlichen conoidischen Propellers durch einen projicirenden Cylinder von der Leitlinie U geschnitten werde.

Dieser Propeller ist in Fig. 5 durch zwei Schnitte in der Axen- und Umdrehungsebene und durch eine Ansicht dargestellt. (Fig. 5*a*.)

Auf eine ähnliche Modification der conoidischen Propellerschraube dürfte sich auch der Propeller-Boomerang (1848 pat.) (nach der Form der bekannten Indianerwaffe so genannt) zurückführen lassen.

Die Projection der Begrenzungslinie U ist in diesen besprochenen Fällen im Allgemeinen durch

$$\gamma = f_1(\rho)$$

bestimmt.

Sämmtliche unter *a*, *b* und *c* angeführte Propellerflügelflächen lassen sich auf ein gemeinsames geometrisches Entstehungsgesetz, nämlich dahin zurückführen:

„das die einzelnen Flächenelemente (Flächendifferentiale) durch das Element einer geradlinigen Erzeugenden entstehen, welches sich, geneigt gegen die dem Flächendifferentiale entsprechende Umdrehungs- und Axenebene längs dem Elemente einer geradlinig entwickelten Schraubenlinie von gegebener Neigung bewegt".

Aber nicht nur die angeführten Varianten, sondern auch solche Propellerflächen, bei welchen die, den einzelnen Rotationsradien ρ, ρ', ... R entsprechenden Elemente der Erzeugenden und der Leitlinie ganz willkührlich sich verändern, lassen sich auf das angegebene Entstehungsgesetz ihrer Flächenelemente zurückführen, so lange diese Flächen überhaupt den Charakter einer Flügel- oder Schaufelfläche behalten und die einzelnen Flächenelemente noch durch irgend ein geometrisches Gesetz mit der Rotations- oder Oscillationsaxe des Flügels in Verbindung gebracht werden können. Nicht ohne Interesse, jedoch illusorisch wäre hier ein Übergang zwischen der steifen Propellerschraube und dem flexiblen Fischschwanz-Propeller zu vermitteln [1]).

4.

Wird zur graphischen Darstellung (Fig. 6) der Fläche vom oben definirten Entstehungsgesetz irgend eine durch die Propelleraxe $o\,o_{\prime}$ gelegte Ebene $A\,E$ zur verticalen, die darauf senkrechte Umdrehungsebene aber zur horizontalen Projectionsebene gewählt, so ist der geometrische Ort einer Erzeugenden $g\,z$, welche sich längs den einzelnen Punkten g, 1, 2, 3, ... einer Schraubenlinie g, 1, 2, 3, von gegebener Neigung α als Leitlinie derart bewegt, — dass sie mit der diesen Punkten 1, 2, 3 entsprechenden Axenebene stets den Winkel s, mit der entsprechenden Umdrehungsebene aber den Winkel x bildet, — eine windschiefe Fläche, für welche die Geometrie keinen besonderen Namen hat; wir erlauben uns, diese Fläche mit Rücksicht auf das Vorangehende allgemeine Schraubenfläche oder kurzweg Propellerfläche zu nennen.

Da die Erzeugende $g\,z$ durch Angabe der (umgelegten) Horizontal-Neigung x und durch den Winkel y ihrer horizontalen Projection mit der entsprechenden Axenebene nach der bekannten Relation

$$\sin s = \cos x \sin y$$

vollkommen bestimmt ist, so mögen im folgenden diese beiden Winkel x und y in Rechnung gezogen werden; indem ferners dem Ent-

---

[1]) Vergl. the Macintosh's Elastic Propeller, und das Folgende in „the Marine Engine" (oben genanntes Werk).

stehungsgesetz zu folge die horizontale Projection stets einen Kreis vom Halbmesser

$$o'm' = g'm'. \text{tang}\ .y$$

berühren muss, so beschreibt der Punkt m eine Schraubenlinie von gleicher Ganghöhe mit der früheren, deren entwickelte Horizontalneigung α' sich aus der Relation

$$o'g' \text{ tang } \alpha = R.\text{tang } \alpha = o'm' \text{ tang } \alpha'$$

ergibt; die in der Entfernung

$$zm = g'm' \text{ tang } x$$

parallel geführte Schraubenlinie ist der geometrische Ort des Punktes z der Erzeugenden $g\ z$, tangirend an dem projicirenden Cylinder vom Halbmesser $o'\ m'$.

Wird diese windschiefe Fläche in der willkührlich gewählten Entfernung $o'\ a' = \rho$ durch einen concentrischen Cylinder geschnitten, so erscheint dieser Schnitt (wie leicht zu erweisen) als Schraubenlinie von constanter Neigung φ, welche sich aus der Relation

$$R.\text{tang } \alpha = \rho.\text{tang } \varphi$$

ergibt, und es ist daher der geometrische Ort des senkrecht zur Axe stehenden aber mit der beliebigen Erzeugenden $e'\ a'$ fest verbunden gedachten Halbmessers $o'\ a'$ eine conoidische Schraubenfläche von der Umfangswindung φ, welche die in Rede stehende Propellerfläche in der Schraubenlinie $a'\ b'$ durchschneidet. Bezeichnet man ferner den variablen Stellungswinkel $g'\ o'\ a'$ des Elementes a' mit γ und schneidet die Propellerfläche noch durch einen zweiten concentrischen Cylinder vom Halbmesser $\rho + d\rho$ (diff. ρ) so wie durch zwei in der Entfernung $d\ \gamma$ liegende projicirende Ebenen, so kann das entstandene Flächenelement $d\ F$ (zweites Differentiale) als Projection des Elementes der entsprechenden conoidischen Schraubenfläche df angesehen werden, indem sich beide Flächenelemente in einem Elemente der Schraubenlinie $a'\ b'$ durchschneiden. Bezeichnet man ferner den in dieser Schraubenlinie gemessenen Neigungswinkel beider Flächenelemente mit ω, so ist, wie im Folgenden gezeigt wird, dieser Neigungswinkel für ein und die-

selbe Fläche, also bei constantem x und y eine Function von φ, sonach

$$dF = \frac{df}{\cos.\omega}.$$

Da aber bekanntlich

$$df = \frac{\rho.d\rho.d\gamma}{\cos\varphi} \text{ ist,}$$

so folgt weiters

$$dF = \frac{\rho.d\rho.d\gamma}{\cos\varphi.\cos\omega} \tag{1}$$

als das mit obigem Entstehungsgesetz übereinstimmende Flächenelement.

(Wird mit β der Neigungswinkel des Propellerelementes mit der Umdrehungsebene bezeichnet, so ist auch

$$dF = \frac{\rho.d\rho.d\gamma}{\cos\beta}$$

mithin

$$\cos\beta = \cos\varphi \cos\omega).$$

Der fragliche Neigungswinkel ω ist zugleich jener Winkel, welchen die, beiden Flächenelementen entsprechenden tangirenden Ebenen einschliessen; da aber die tangirende Ebene an windschiefe Flächen durch die Tangenten zweier im Berührungselemente auf der Fläche gezogener Curven vollkommen bestimmt ist, so wird der Winkel ω als Neigungswinkel der beiden Ebenen gefunden, welche (Fig. 6*a*) auf der Propellerfläche durch die Erzeugende ae und durch die Schraubenlinientangente ta im Elemente a, auf der conoidischen Fläche aber durch dieselbe Tangente und die Erzeugende $a\,o$ gelegt werden.

(Die Horizontalneigung φ der Tangente ta ist entweder durch Entwickelung eines beliebigen Stückes ab der Schraubenlinie oder durch die Krümmung

$$R \tang \alpha = \rho \tang \varphi$$

bestimmt).

Wird daher in Fig. 6*a* die Umdrehungsebene UE (horizontale Projectionsebene) durch den Punkt a gelegt, so ist die erste Berührungsebene MpN durch die Erzeugende ad und die Tangente at, die zweite Ebene mon hingegen durch dieselbe Schraubenlinientangente at und durch die Erzeugende $o\,a$ bestimmt, und es liegt der fragliche Neigungswinkel ω (gemessen in einer auf der

gemeinschaftlichen Schnittlinie at senkrecht errichteten Ebene $m'on$) in einem rechtwinkelichen Dreieck afg, dessen erste Kathete $ag = o'a'$, die zweite

$$af = ap \sin.\varphi = o'a' \operatorname{tang} n \sin\varphi$$

ist, sonach wird

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{af}{ag} = \operatorname{tang} n \sin\varphi;$$

der Richtungswinkel n der Horizontaltrace pN ist durch die Relation

$$\frac{p'd'}{d'a'} = \frac{\sin(n+y)}{\cos.n},$$

d. i. durch

$$\frac{\operatorname{cotang}.\varphi}{\operatorname{cotang}.x} = \frac{\sin(n+y)}{\cos.n}$$

bestimmt; woraus nach Entwickelung von $\sin(n+y)$

$$\left.\begin{aligned}\sin n &= \frac{\operatorname{tang}.x - \operatorname{tang}\varphi\sin y}{\sqrt{\operatorname{tang}^2\varphi - 2\operatorname{tang} x \operatorname{tang}\varphi\sin y + \operatorname{tang}^2 x}}\\ \cos n &= \frac{\operatorname{tang}\varphi\cos y}{\sqrt{\operatorname{tang}^2\varphi - 2\operatorname{tang} x \operatorname{tang}\varphi\sin y + \operatorname{tang}^2 x}}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

und

$$\operatorname{tang} n = \frac{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang}\varphi\sin y}{\operatorname{tang}\varphi\cos y}$$

gefunden wird; mithin ist auch

$$\operatorname{tang} w = \operatorname{tang} n \sin\varphi = \frac{\cos.\varphi}{\cos.y}\left[\operatorname{tang} x - \sin.y \operatorname{tang}.\varphi\right]$$

und

$$\left.\begin{aligned}\sin w &= \frac{\sin.n\sin.\varphi}{\sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n \sin^2\varphi}} = \frac{\operatorname{tang} x\cos\varphi - \sin.y\sin.\varphi}{\sqrt{\cos^2 y + [\operatorname{tang} x\cos\varphi - \sin y\sin\varphi]^2}}\\ \cos w &= \frac{\cos n}{\sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n\sin^2\varphi}} = \frac{\cos y}{\sqrt{\cos^2 y + [\operatorname{tang} x\cos\varphi - \sin y\sin\varphi]^2}}\end{aligned}\right\} (3)$$

ferner ist:

$$\left.\begin{aligned}\sin n &= \frac{\sin\omega}{\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\omega}} = \frac{\sin\omega}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi\cos^2\omega}}\\ \cos n &= \frac{\sin\varphi\cos\omega}{\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\sin^2\omega}} = \frac{\sin\varphi\cos\omega}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi\cos^2\omega}}\end{aligned}\right\}$$

5.

Benennt man die **absolute** Geschwindigkeit des bewegten Propellerelementes mit V und den Neigungswinkel der Geschwindigkeitsrichtung mit diesem Flächenelement durch z, so kann bekanntlich die Normalpressung dN (diff.) zwischen der Flüssigkeit und der Propellerfläche dem Quadrate der Geschwindigkeit V in den Sinus des Neigungswinkels z, so wie der Fläche des Elementes proportional gesetzt, mithin durch

$$dN = k.dF.V^2 \sin^2 z$$

ausgedrückt werden [1], wobei k den bekannten von der Acceleration der Schwere und vom specifischen Gewichte der Flüssigkeit abhängenden Coëfficienten bezeichnet. Ist ferner unter v die **Winkelgeschwindigkeit des Propellers** (in der Umdrehungsebene) und unter u **seine relative Propellergeschwindigkeit** (d. i. die relative Schiffsgeschwindigkeit in der Richtung der Axe) verstanden, so ist die **absolute** Geschwindigkeit V des Elementes a im Abstande ρ (Fig. 6*b*).

$$V = \sqrt{v^2\rho^2 + u^2}$$

Bezeichnet δ den Neigungswinkel dieser Geschwindigkeit V mit der conoidischen Projection des Elementes a, d. i. mit der Ebene $m\ o\ n$, so findet man nach Fig. 6*b*

$$u = V \sin(\varphi - \delta)$$
$$v\rho = V \cos(\varphi - \delta)$$

---

[1] Wäre allerdings auf Grund neuerer Resultate, wenn auch unbedeutend, zu modificiren; jedoch — einerseits der Umstand, dass die mit derselben Annahme für andere Flächen gewonnenen Resultate hinreichend genau mit der Praxis übereinstimmen, so wie andererseits der Zweck dieser Untersuchung, welcher keineswegs eine numerische Effectsbestimmung, sondern blos eine Effectsvergleichung der einzelnen Flächenformen anstrebt — dürfte diese Annahme gerechtfertigt erscheinen lassen.

und daraus

$$\sin\delta = \frac{v\rho\sin\varphi - u\cos\varphi}{V}$$

$$\cos\delta = \frac{v\rho\cos\varphi + u\sin\varphi}{V}.$$

Werden schliesslich von einem willkührlich in der Bewegungsrichtung *ab* gewählten Punkt *b* zwei Perpendikel *bc* und *bd* auf die Berührungsebenen *MpN* und *mon* gefüllt, so erscheint das Complement (90—*z*) des Neigungswinkels *z* der Bewegungsrichtung *a b* mit dem Propellerelemente als dritter Kantenwinkel eines Dreikants *bacd*, von welchem zwei Kantenwinkel 90—δ und ω (als Neigungswinkel der beiden Perpendikel), so wie ein Flächenwinkel von 90° (Ebene *b a c* mit *b c d*) gegeben ist. Die bekannte Auflösung des in Fig. 6*b* nach *b a c D a* entwickelten körperlichen Eckes liefert

$$\sin z = \sin\delta\cos\omega,$$

d. i.

$$\sin z = \frac{v\rho\sin\varphi - u\cos\varphi}{V}.\cos.\omega;$$

also ist der Normaldruck

$$dN = k.dF.[v\rho\sin\varphi - u\cos\varphi]^2\cos^2\omega$$

oder durch Substitution des früher gefundenen Werthes (1 für *dF*) ist.

$$dN = k.\rho.d\rho.d\gamma.[v\rho\,\mathrm{tang}\,\varphi - u]^2\cos\varphi\cos\omega.$$

Der Neigungswinkel des eben bestimmten Normaldruckes auf das Flächenelement *a* gegen die Umdrehungsebene ist das Complement des Neigungswinkels β der Berührungsebene *MpN* gegen die Ebene *UE*; dieser Winkel β erscheint ebenfalls in einem Fig. 6*c* entwickelten Dreikant, welches durch die drei Perpendikel senkrecht zu beiden Berührungsebenen und senkrecht zur Umdrehungsebene gebildet wird.

Durch Auflösung dieses körperl. Eckes wird wie oben (Nr. 4)

$$\cos\beta = \cos\varphi\cos\omega,$$

und

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\varphi\cos^2\omega}$$

gefunden.

6.

Wird endlich der Normaldruck dN, wirksam gedacht in einer Ebene senkrecht zur Umdrehungsebene, in zwei auf einander senkrecht stehende Componenten dP und dS zerlegt, so stellt die erste Componente

$$dP = dN.\cos\beta$$

die **Propulsion**, d. i. den **Vorwärtstrieb des Schiffes** vor, die zweite

$$dS = dN.\sin\beta$$

zerfällt aber in die Umdrehungskraft

$$dQ = dS.\cos n = dN\sin\beta\cos n$$

und in den Axendruck

$$dR = dS.\sin n = dN.\sin\beta.\sin n,$$

welcher durch die Festigkeit der Axe, besser aber durch den symmetrisch liegenden zweiten Propellerflügel aufgehoben wird [1]).

Die Grössen $\cos n$ und $\sin n$ besitzen die bereits oben (2) ermittelten Werthe.

Werden endlich die bereits für N, β und n gefundenen Werthe substituirt, so erhält man

$$\alpha)\left\{\begin{aligned} dP &= k.\rho d\rho.d\gamma\,[v\rho\tan\varphi - u]^2\cos^2\varphi\cos^2\omega \\ dW = dQ.\rho v &= kv.\rho.{}^2d\rho.d\gamma\,[v\rho\tan\varphi - u]^2\cos\varphi\cos^2\omega\sin\varphi \\ dR &= k.\rho d\rho.d\gamma\,[v\rho\tan\varphi - u]^2\cos\varphi\cos\omega\sin\omega \end{aligned}\right.$$

und nach obigem (3)

$$\beta)\left\{\begin{aligned} \sin\omega &= \frac{\tan x\cos\varphi - \sin y\sin\varphi}{\sqrt{\cos^2 y + [\tan x\cos\varphi - \sin y\sin\varphi]^2}} \\ \cos\omega &= \frac{\cos y}{\sqrt{\cos^2 y + [\tan x\cos\varphi - \sin y\sin\varphi]^2}} \end{aligned}\right.$$

---

[1]) Sämmtliche in Rede stehende Propeller besitzen ein symmetrisch liegendes Flügelpaar.

für $x=o$ und $y=o$, wird auch $\omega=o$, somit ist

$$o)\begin{cases} dP_o = k.\rho d\rho.d\gamma\,[v\rho \operatorname{tang}\varphi - u]^2 \cos^2\varphi \\ dW_o = dQ_o.\rho v = k\rho^2 d\rho.vd\gamma\,[v\rho \operatorname{tang}\varphi - u]^2 \cos\varphi \sin\varphi \end{cases}$$

als Propulsion und Umdrehungsarbeit für ein Element der conoidischen oder gewöhnlichen Propellerschraube.

Mit Bezug auf die unter b in Nr. 3 besprochenen Modificationen erhält man aus den allgemeinen Formeln (α) für

$$y=o$$

$$\sin\omega = \frac{\operatorname{tang}x\cos\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x\cos^2\varphi}},\quad \cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x\cos^2\varphi}}$$

mithin

$$1.\begin{cases} dP_1 = k.\rho d\rho.d\gamma\,[v\rho\operatorname{tang}\varphi - u]^2 \dfrac{\cos^2\varphi}{1+\operatorname{tang}^2 x\cos^2\varphi} \\ dW_1 = dQ_1\,\rho v = k\rho^2 d\rho d\gamma v\,[v\rho\operatorname{tang}\varphi - u]^2 \dfrac{\cos\varphi\sin\varphi}{1+\operatorname{tang}^2 x\cos^2\varphi} \end{cases}$$

und zwar bezogen Fig. 7 auf ein Element jener modificirten Schraubenfläche, deren Erzeugende gh in der Axenebene und geneigt zur Umdrehungsebene ($\sphericalangle x$) liegt; wie bekannt die Fläche für Schrauben mit scharfem Gewinde.

Wird bloss $x=o$ gesetzt, so findet man.

$$\sin\omega = \frac{-\sin y\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 y\cos^2\varphi}},\quad \cos\omega = \frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin^2 y\cos^2\varphi}}$$

mithin

$$2.\begin{cases} dP_2 = k\rho d\rho d\gamma\,[v\rho\operatorname{tang}\varphi - u]^2 \dfrac{\cos^2\varphi\cos^2 y}{1-\sin^2 y\cos^2\varphi} \\ dW_2 = dQ_2\rho v = k.v.\rho^2 d\rho.d\gamma\,[v\rho\operatorname{tang}\varphi - u]^2 \dfrac{\cos\varphi\sin\varphi\cos^2 y}{1-\sin^2 y\cos^2\varphi} \end{cases}$$

die genannten Grössen nach Fig. 8 bezogen auf ein Element jenes Systems von Propellerflächen, deren Erzeugende $g\,m$ in der Umdrehungsebene und geneigt zur Axenebene ($\sphericalangle y$) liegen.

Anmerkung. Das Entstehungsgesetz dieses Flächensystems (Fig. 8) kann übrigens auch dem Elemente des ersten Variantensystems in Fig. 7 zu Grunde gelegt werden; bezeichnet man nämlich den Radiusvector eines beliebigen Elementes a dieser Fläche mit ρ (Fig. 7), ferner mit $R\gamma$ den entsprechenden Bogen der äussersten Erzeugenden von der Neigung α, und endlich mit z die Höhe des Elementes a über der Projectionsebene, so ist

$$z = R\gamma \operatorname{tang} \alpha + [R - \rho] \operatorname{tang} x;$$

schneidet man nun die Schraubenfläche durch eine Horizontalebene in der Höhe z, so ist

$$R\gamma \operatorname{tang} \varphi + [R - \rho] \operatorname{tang} x = o$$

die Gleichung des Schnittes, oder, bezogen auf den Anfangspunkt h der, der Höhe z entsprechenden Erzeugenden gh,

$$\rho = \frac{R\gamma \operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} x}$$

bekanntlich eine archimedische Spirale.

Da für sämmtliche Schnitte parallel zur Umdrehungsebene die Bestimmungsstücke R, tang a, tang x constant bleiben, so kann man sich auch diese Propellerfläche des ersten Variantensystems durch die Bewegung der genannten archimedischen Spirale als Erzeugende längs der Leitlinie von constanter Neigung α entstanden denken, mithin lässt sich auch durch Bestimmung des Krümmungswinkels y die Bewegung des Elementes a (beziehungsweise der entsprechenden Tangente $a'b$) in Übereinstimmung mit dem Entstehungsgesetz der zweiten Propellerfläche (Fig. 8) bringen.

Indem die Polarsubnormale

$$h'c = \frac{d\rho}{d\gamma} = \frac{R \operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} x} = \frac{\rho}{\operatorname{tang} y}$$

und ferner

$$R \operatorname{tang} \alpha = \rho \operatorname{tang} \varphi$$

ist, findet man

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} y \,.\, \operatorname{tang} \varphi$$

mithin

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tang}^2 y \,.\, \operatorname{tang}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tang}^2 y \operatorname{tang}^2 \varphi}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 y \,.\, \operatorname{tang}.^2 \varphi}.$$

Diese Grössen in dP_1 und dW_1 des ersten Systems substituirt, geben wieder das analoge dP_2 und dW_2 des zweiten Systems.

7.

Schon durch Vergleichung der gefundenen Differentialresultate α) 1) 2) für die einzelnen Varianten mit jenen o) für die conoidische Propellerschraube, ergibt sich, dass, bei vorausgesetzt gleichen Werthen für ρ, v, φ u. s. w. (unter übrigens sonst gleichen Verhältnissen), und da ferners auch

$$\frac{dP}{dW} = \frac{dP_1}{dW_1} = \frac{dP_2}{dW_2} = \frac{dP_0}{dW_0}$$

wird, die Propulsion P_0 des Elementes der conoidischen Propellerschraube in so lange relativ grösser bleibt, als

$$\cos\omega < 1$$

mithin ω von o verschieden ist.

Diese Resultate werden praktisch brauchbar eine genauere Vergleichung und selbst eine numerische Effectsbestimmung ermöglichen, wenn sie sich auf die Integrale der Systeme α), o), 1), 2), beziehen, angewendet auf ein Flächenstück von gleich grosser Projection für sämmtliche Varianten und genommen innerhalb so enger Grenzen γ' bis γ'', r' bis r'', dass der Neigungswinkel φ der Leitlinie des Elementes vom Radius ρ als constant und von gleicher Grösse, bei den einzelnen Varianten vorausgesetzt werden kann. (Mit Bezug auf das in Nr. 3 unter a Gesagte.) Es ist mithin

$$P = \int_{\gamma_,}^{\gamma''}\int_{r_,}^{r''} dP \text{ und } W = \int_{\gamma'}^{\gamma''}\int_{r'}^{r''} dW$$

zu bilden, wobei

$$\gamma'' > \gamma_, \text{ und } r'' > r_,$$

ist, und die den Radien r'', r' entsprechenden Winkel der Leitlinie und Erzeugenden beziehungsweise mit φ'', φ', und y'', y' bezeichnet werden (x ist constant).

Da

$$\rho \tan\varphi = r'' \operatorname{tang}.\varphi'' \text{ ist,}$$

so folgt

$$\cos\varphi = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + r''^2 \operatorname{tang}^2\varphi''}}$$

$$\sin\varphi = \frac{r'' \operatorname{tang}\varphi''}{\sqrt{\rho^2 + r_{''}^2 \operatorname{tang}^2\varphi''}};$$

und weil ferner nach dem Bildungsgesetz der Fläche

$$\rho \sin y = r'' \sin y''$$

sein muss, so folgt weiters

$$\cos^2 y = \frac{\rho^2 - r''^2 \sin^2 y''}{\rho^2};$$

mithin wird (Rel. (β)

$$\cos^2\omega = \frac{[\rho^2 - r''^2 \sin^2 y_{''}][\rho^2 + r_{''}^2 \operatorname{tang}^2\varphi_{''}]}{[\rho^2 - r''^2 \sin^2 y''][\rho^2 + r''^2 \operatorname{tg}.^2\varphi''] + [\rho^2 \operatorname{tg}.x - r''^2 \operatorname{tg}.\varphi'' \sin y'']^2}$$

und man findet nach sorgfältiger Reduction

$$\rho . d\rho . \cos^2\varphi . \cos^2\omega = \frac{\rho . d\rho\, [\rho^2 - r''^2 \sin^2 y'']}{\rho^2 \sec^2 x + r''^2 [\operatorname{tg}.^2\varphi'' - 2 . \operatorname{tg}.x . \sin y'' \operatorname{tg}.\varphi'' - \sin^2 y'']}$$

und

$$\int \rho d\rho \cos^2\varphi \cos^2\omega =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{\rho^3 d\rho}{\rho^2 \sec^2 x + r''^2 [\operatorname{tang}^2\varphi'' - 2 \operatorname{tang} x \sin y'' \operatorname{tang}\varphi'' - \sin^2 y_{''}]} \\ \displaystyle -r''^2 \sin^2 y'' \int \frac{\rho . d\rho}{\rho^2 \sec^2 x + r''^2 [\operatorname{tg}.^2\varphi'' - 2 \operatorname{tg}.x \sin y'' \operatorname{tg}.\varphi'' - \sin^2 y'']} \end{array} \right.$$

Da die beiden Integrale in der Form:

$$\int \frac{\rho^3 d\rho}{a + b\rho^2} = \frac{\rho^2}{2b} - \frac{a}{2b^2} \log . nat. [a + b\rho^2]$$

und

$$\int \frac{\rho . d\rho}{a + b\rho^2} = \frac{1}{2b} \log.\ nat.\ [a + b\rho^2]$$

erscheinen, so findet man durch Substitution von

$$a = r''^2 [\tan^2\varphi'' - 2 \tan x \sin y'' \tan \varphi'' - \sin^2 y_{\prime\prime}]$$

$$b = \sec^2 . x$$

und entsprechender Reduction

$$\int_{(\rho)} \rho . d\rho . \cos^2\varphi . \cos^2\omega =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\rho^2}{2 \sec^2 x} - \dfrac{r''^2}{2 \sec^4 x} \left[\tan \varphi'' - \tan x \sin y_{\prime\prime}\right]^2 \times \\ \times \text{ log. nat.} \left[\rho^2 \sec^2 x + r''^2 (\text{tg.}^2\varphi'' - 2 \text{ tg.} x \sin y'' \text{ tg.} \varphi'' - \sin^2 y_{\prime\prime})\right] \end{cases}$$

mithin

$$\int_{r_{\prime}}^{r_{\prime\prime}} \rho d\rho \cos^2\varphi \cos^2\omega =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{r''^2 - r'^2}{2 \sec^2 x} + \dfrac{r_{\prime\prime}^2}{2 \sec^4 x} \left[\tan \varphi'' - \tan x \sin y_{\prime\prime}\right]^2 \times \\ \times \text{log.nat.} \dfrac{r''^2 [\text{tg.}\varphi'' - \text{tg.} x \sin y'']^2 + r''^2 \cos^2 y'' \sec^2 x - [r''^2 - r'^2] \sec^2 x}{r''^2 [\tan \varphi_{\prime\prime} - \tan x \sin y_{\prime\prime}]^2 + r''^2 \cos^2 y_{\prime\prime} \sec^2 x} \end{cases}$$

in der Form

$$\int_{r_{\prime}}^{r''} \rho d\rho \cos^2\varphi \cos^2\omega = A + B . \text{log. nat. } C;$$

ferner ist

$$\rho^2 d\rho . \cos^2\omega . \cos \varphi . \sin \varphi =$$

$$= \frac{r'' \tan \varphi_{\prime\prime} [\rho^2 - r''^2 \sin^2 y_{\prime\prime}] \rho^2 d\rho}{[\rho^2 - r''^2 \sin^2 y''] [\rho^2 + r''^2 \text{tg.}^2 y''] + [\rho^2 \text{tg.} x - r''^2 \text{tg.} \varphi'' \sin y'']^2}$$

$$= \frac{r'' \tan \varphi'' [\rho^2 - r''^2 \sin^2 y_{\prime\prime}] \rho d\rho}{\rho^2 \sec^2 x + r''^2 [\tan^2\varphi'' - 2 \tan x \sin y'' \tan \varphi'' - \sin^2 y_{\prime\prime}]}$$

mithin auch

$$\int_{r'}^{r''} \rho^2 d\rho \cos^2\omega \cos \varphi \sin \varphi = r'' \tan \varphi'' [A + B \text{ log. nat. } C];$$

also schliesslich

$$P = \int_{\gamma_{\prime}}^{\gamma''}\int_{r_{\prime}}^{r''} dP = \int_{\gamma_{\prime}}^{\gamma''}\int_{r_{\prime}}^{r''} k.d\gamma.[v\rho\,\text{tg}.\varphi - u]^2 \cos^2\varphi.\cos^2\omega.\rho d\rho$$

das ist:

$$P = k.[vr''\ \text{tang}\ \varphi'' - u]^2 (\gamma'' - \gamma')\ (A + B.\text{log. nat.}\ C)$$

und

$$W = \int_{\gamma_{\prime}}^{\gamma''}\int_{r_{\prime}}^{r''} dW = \int_{\gamma_{\prime}}^{\gamma''}\int_{r_{\prime}}^{r''} k.d\gamma.[v\rho\text{tg}.\varphi - u]^2 \cos^2\omega \cos\varphi \sin\varphi v\rho^2 d\rho$$

das ist:

$$W = k.v.r''\text{tang}\,\varphi''[vr''\ \text{tang}\ \varphi'' - u]^2\ (\gamma'' - \gamma')\ [A + B\ \text{log. nat.} C].$$

Indem das **Verhältniss der Arbeit des Vorwärtstriebes zur Umdrehungsarbeit**, d. i. der **Wirkungsgrad des Propellers**

$$\frac{Pu}{W} = \frac{u}{r''v\ \text{tang}\ \varphi''} \qquad (\delta)$$

für gegebene Geschwindigkeiten nur vom Winkel φ'' abhängt, im übrigen aber um so grösser ausfällt, je näher $\frac{u}{r''\ v\ tang\ \rho''}$ der Einheit, d. h. je mehr der Rücklauf $[v\ r''\ tang\ \rho'' - u]$ gleich o wird, so ist daraus zu ersehen, dass durch zweckmässige **Abänderung des Steigungswinkels der Leitlinie** φ'', d. i. durch eine **zu oder abnehmende Schraubenwindung** [jedoch mit Rücksicht auf das in Nr. 3 unter *a* Angeführte] bei **allen** in Rede stehenden Varianten eine **Effectsvergrösserung** erzielt werden kann.

Für einen gegebenen Winkel φ'' hängt aber weiters die **Propulsion** P der in Rede stehenden Varianten von der Grösse $[A+B$ log. nat. $C]$, d. i. von der Grösse der Winkel x oder y, also von der **Veränderung der Erzeugenden** (Nr. 3 unter b) ab; und zwar wächst die Propulsion, wie zu ersehen, proportional dieser Grösse $[A+B\ log.\ nat.\ C]$.

Es wird aber für die gewöhnliche conoidische Schraube, d. i. für

$$x = o, y = o$$

$$0) \quad \begin{cases} \left[A_0 + B_0 \log. C_0\right] = \dfrac{r'' - r'^2}{2} + \dfrac{r''^2}{2} \operatorname{tang}^2 \varphi'' \\ \log.\text{nat.} \dfrac{r''^2 \operatorname{tang}^2 \varphi'' + r'^2}{r''^2 (1 + \operatorname{tang}^2 \varphi'')} \end{cases}$$

Für das erste System der Varianten, deren Erzeugende in der Axenebene liegen, d. i. für

$$y'' = o$$

wird

$$1) \quad \begin{cases} \left[A_1 + B_1 \log. C_1\right] = \dfrac{1}{\sec^2 x}\left[\dfrac{r_{,,}^2 - r_{,}^2}{2} + \dfrac{r''^2}{2 \sec^2 x} \operatorname{tang}^2 \varphi''.\right. \\ \log.\text{nat.} \left.\dfrac{r''^2 \operatorname{tang}^2 \varphi'' + r''^2 \sec^2 x - [r'' - r'^2] \sec^2 x}{r''^2 [\operatorname{tang}^2 \varphi'' + \sec^2 x]}\right]; \end{cases}$$

in Bezug auf das zweite System hingegen, dessen Erzeugende in der Umdrehungsebene liegen, d. i. für

$$x = o$$

wird

$$2) \quad \begin{cases} \left[A_2 + B_2 \log. C_2\right] = \left[\dfrac{r_{,,}^2 - r_{,}^2}{2} + \dfrac{r_{,,}^2}{2} \operatorname{tang}^2 \varphi''\right. \\ \log.\text{nat.} \left.\dfrac{r''^2 \operatorname{tang}^2 \varphi'' + r''^2 \cos^2 y'' - [r''^2 - r'^2]}{r''^2 [\operatorname{tang}^2 \varphi_{,,} + \cos^2 y'']}\right]. \end{cases}$$

Wie zu ersehen, ist der Werth von log. nat. C entscheidend für die Grösse $A + B$ log. nat. C in diesen drei Fällen.

Der oben gefundene allgemeine Ausdruck

$$\log.\text{nat.} C = \frac{r''^2[\operatorname{tg}.\varphi'' - \operatorname{tg}.x \sin y_{,,}]^2 + r''^2 \cos^2 y_{,,} \sec^2 x - [r''^2 - r'^2] \sec^2 x}{r''^2 [\operatorname{tang} \varphi'' - \operatorname{tang} x \sin y_{,,}]^2 + r''^2 \cos^2 y_{,,} \sec^2 x}$$

$$= 1 - \frac{1}{\dfrac{r''^2}{[r'' - r'^2] \sec^2 x}\left[(\operatorname{tang} \varphi_{,,} - \operatorname{tang} x \sin y_{,,})^2 + \cos^2 y_{,,} \sec^2 x\right]}$$

erscheint in der Form

$$\log.\text{nat.}\, C = \log.\text{nat.}\left[1 - \frac{1}{N}\right];$$

N muss für alle Fälle positiv und grösser als Eins sein; weil andernfalls der Ausdruck $1 - \frac{1}{N}$ negativ, mithin $log\left(1-\frac{1}{N}\right)$ unmöglich wird; ausserdem wird selbst für den denkbar kleinsten Werth von r', d. i. für $r' = r'' \sin y''$ (Fig. 6), für welchen also die Differenz

$$r''^2 - r'^2 = r''^2 \sin^2 y''$$

am grössten ist, N relativ ein Minimum, nämlich

$$N = \left[\text{tang}\,\varphi'' - \text{tang}\,x \sin y_{\prime\prime}\right]^2 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 y''} + 1\,;$$

und selbst in diesem Falle ist [für jeden endlichen Werth von φ, x und y] $N > 1$; es erscheint sonach

$$\log. C = \log.\left[1 - \frac{1}{N}\right] = \log.\left[\frac{1}{\frac{N}{N-1}}\right]$$

in der Form des log. eines echten Bruches, mithin wird

$$A + B \log. C = A - B \log. \frac{N}{N-1}$$

um so grösser, je kleiner $\log \frac{N}{N-1}$, d. h. da sowohl $\frac{N}{N-1}$ als auch N stets kleiner als eins und positiv sein muss, so wird $A + B \log C$ um so grösser, je grösser N wird.

Der allgemeine Ausdruck

$$N = \frac{r''^2 \cos^2 x}{r''^2 - r'^2}\left[(\text{tang}\,\varphi'' - \text{tang}\,x \sin y'')^2 + \frac{\cos^2 y''}{\cos^2 x}\right]$$

übergeht aber für die conoidische Propellerschraube, d. i. für

$$x = o,\ y = o$$

in

$$N_0 = \frac{r''^2}{r''^2 - r'^2}\left[1 + \text{tang}^2 \varphi''\right];$$

für das erste Variantensystem, d. i. für

$$y'' = o$$

in

$$N_1 = \frac{r''^2}{r''^2 - r'^2}\left[\tang^2\varphi_{,,} \cos^2 x + 1\right]$$

für das zweite, $x = o$ in

$$N_2 = \frac{r_{,,}^2}{r_{,,}^2 - r_{,}^2}\left[\tang^2\varphi_{,,} + \cos^2 y_{,,}\right].$$

Ein Blick auf die gefundenen Werthe von N_1 und N_2 überzeugt, dass diese stets kleiner sein müssen als der correspondirende von N_0, dass mithin die Propulsion der besprochenen Varianten unter übrigens ganz gleichen Umständen (gleich grosser Umdrehungsprojection der Fläche u. s. w.) geringer sein müsse, als jene des conoidischen Propellers mit zweckmässig gewählter Leitlinie (Rel. δ); zwar schliesst dies nicht aus, dass sich bei einer numerischen Effectsbestimmung gegenüber den in Nr. 1 angeführten Kraft- oder Arbeitsverlusten manche Vortheile ergeben können, jedoch, die bereits oben citirte Bemerkung Ledieu's (Nr. 1), so wie eine ähnliche weit ältere von Bourgois[1]), welcher sich unter Anführung eines Urtheils über diessbezügliche Versuche dahin äussert, „dass nicht die Zahl der patentirten Propeller für Schiffe von allen Formen und Grössen zu vermehren sei, sondern vielmehr die Form und Dimensionen der gewöhnlichen Propellerschraube zu studiren wären“ sprechen dafür, dass auch in dieser Beziehung die Vortheile der besprochenen Varianten gegenüber der conoidischen Propellerfläche nicht jene Grösse erreichen, welche ihnen die einzelnen Constructeure und Erfinder zuzuschreiben bemüht waren.

8.

Die für

$$dP = k\rho d\rho d\gamma\,[v\rho \tang\varphi - u]^2 \cos^2\varphi \cos^2\omega$$

und

$$dW = k.v.\rho^2 d\rho d\gamma\,[v\rho \tang\varphi - u]^2 \cos\varphi \sin\varphi \cos^2\omega$$

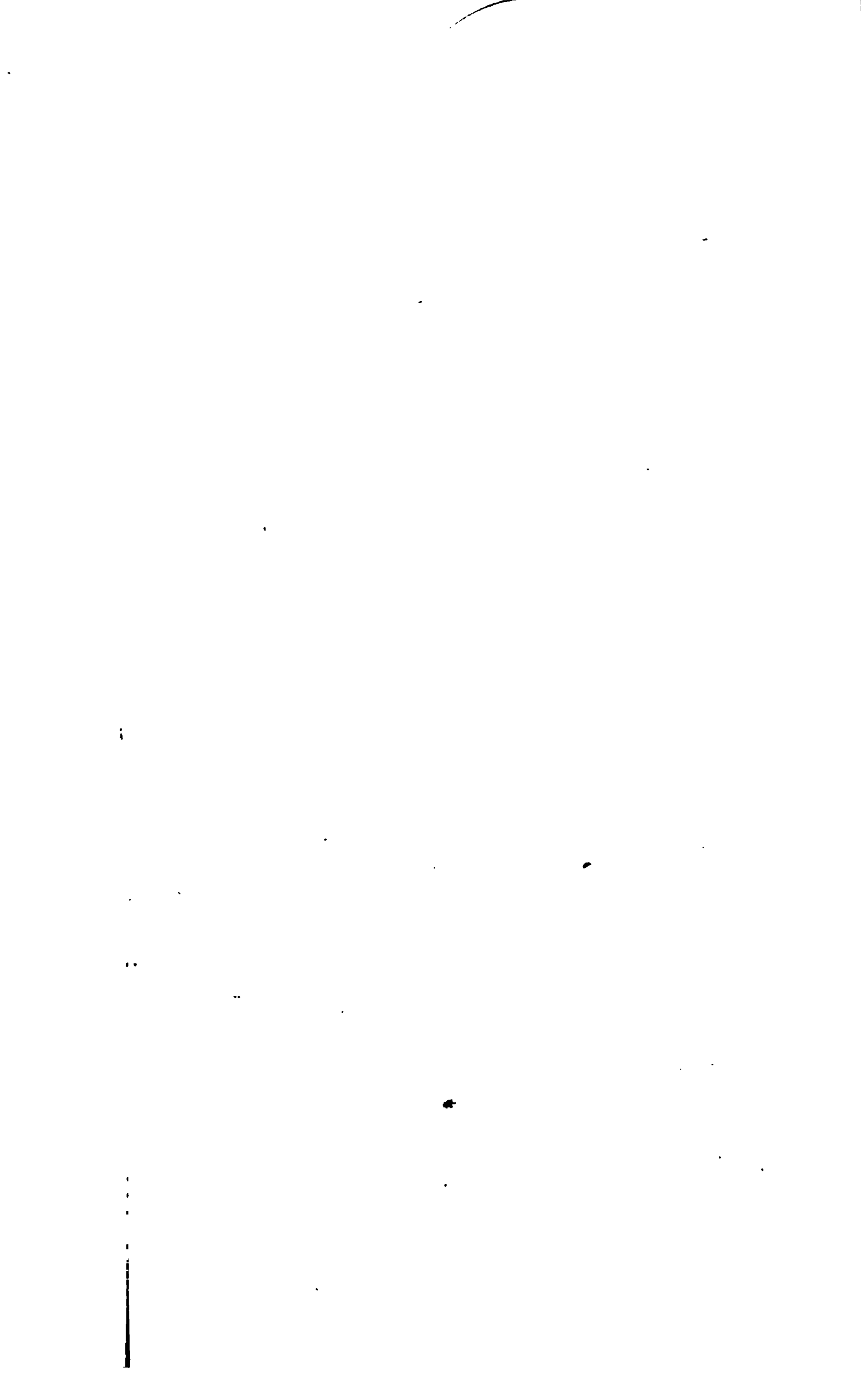
---

1) Paragraph 10 in seiner bereits genannten Abhandlung.

Dieselben Grössen ergeben sich für die übrigen unter Nr. 3 besprochenen Varianten der conoidischen Propellerschraube durch Integration der allgemeinen Diff. Formeln α (Nr. 6), jedoch unter Berücksichtigung der in Nr. 3 unter a, b, c aufgestellten Bedingungen

$$\begin{aligned} \varphi &= f(\gamma) \\ x &= f_1(\rho) \\ y &= f_2(\rho) \\ \gamma &= f_3(\rho). \end{aligned}$$

Wir behalten uns für eine zweite Gelegenheit vor, das vorstehende Theorem weiter zu entwickeln und auf einzelne praktische Fälle anzuwenden.



Mosha

α. 21° 40'

Bahnbestimmung von (66) Maja.

Von **Dr. Edmund Weiss,**
Adjunct der k. k. Sternwarte.

Von den verschiedenen Asteroiden, die nach ihrer Entdeckung, theils wegen mangelnder Vorausberechnung, theils wegen ungenügenden Beobachtungsmateriales wieder in Verlust gerathen waren, sind durch die vereinten Bemühungen von Rechnern und Beobachtern mit Ausnahme von Maja jetzt nach und nach sämmtliche wieder aufgefunden worden. Zur Herbeiführung dieses temporären Verlustes von Maja wirken übrigens mehrere Umstände zusammen. Der Planet war gleich bei seiner Entdeckung auf der Sternwarte zu Cambridge (U. S.) durch Herrn Tuttle am 9. April 1861 ungemein schwach, und wurde desshalb in Amerika nur an den beiden mit mächtigen Refractoren ausgerüsteten Sternwarten zu Cambridge und Clinton verfolgt. Da er überdies erst nach der Opposition entdeckt worden war, war er, als Ephemeriden zu seiner Aufsuchung in Europa eintrafen, schon so sehr in die Abenddämmerung vorgerückt, dass an eine Beobachtung desselben in der ersten Erscheinung nicht mehr gedacht werden konnte. Zu diesen an und für sich schon ungünstigen Umständen gesellte sich noch ein weiterer. Bei der Berechnung der Beobachtungen zeigte sich nämlich, dass auf der Sternwarte zu Clinton statt Maja in den meisten Fällen ein anderer bis dahin unbekannter Planet *(Feronia)* beobachtet worden sei, der in jener Zeit Maja zufälliger Weise optisch so nahe stand, dass eine Verwechslung beider leicht eintreten konnte. Dadurch wird es erklärlich, dass Maja im Ganzen nur an zwölf Abenden beobachtet wurde, die jedoch glücklicherweise ziemlich gleichmässig über einen Zeitraum von 48 Tagen vertheilt sind. Es wäre daher trotzdem der Planet, wenn auch nicht in der Opposition des Jahres 1862, so doch in jener, für dessen Sichtbarkeitsverhältnisse so günstigen, des Jahres 1863 höchst wahrscheinlich wieder aufgefunden worden, wenn die Beobachtungen zu einer Bahnbestimmung so gut als möglich wären verwerthet, und Aufsuchungsephe-

meriden geliefert worden. Bisher war jedoch keines von beiden der Fall; ich habe mir daher die Aufgabe gestellt, aus dem vorliegenden Materiale für die, Ende Februar dieses Jahres bevorstehende Opposition, die möglichst sichere Basis zu den Nachsuchungen nach dem Planeten zu ermitteln, weil diese Opposition, wenn auch keine grossen, so doch immerhin noch weit grössere Chancen für die Wiederauffindung darbietet, als die beiden folgenden in den Jahren 1866 und 1867.

Zu diesem Zwecke rechnete ich mir zuerst aus den vier am 11. April, 3., 16. und 27. Mai in Cambridge angestellten Beobachtungen nach der Methode von Gauss ein Elementensystem, weil mir das aus drei Beobachtungen von Hall berechnete zur Bildung von Normalorten nicht sicher genug schien, da die Breiten des Planeten sehr klein sind, und in diesem Falle die Bahnbestimmung aus drei Orten bekanntlich keine zuverlässigen Resultate gewährt. Das Elementensystem, das ich erhielt, lautet:

1861, April 9·75 mittl. Berl. Zeit.

$$
\begin{aligned}
M &= 125° \; 16' \; 10''2 \\
\pi &= 47 \; 22 \; 12\cdot6 \\
\Omega &= 8 \; 13 \; 5\cdot9 \\
i &= 3 \; 5 \; 39\cdot3 \\
\varphi &= 9 \; 48 \; 14\cdot5 \\
\mu &= 824''100 \\
la &= 0\cdot422685
\end{aligned}
$$

(π und Ω: mittl. Äq. 1861·0.)

Zur Vergleichung der Beobachtungen rechnete ich mir aus demselben die nachstehenden Ephemeriden.

1861, mittl. Berl. Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. Entfernung (66) von ♁	Aberrationszeit
April 9·75	11h 59m 50s13	+0° 9' 3"5	0·29894	16m 30s8
„ 10·75	59 6·23	12 52·4	0·30023	33·7
„ 11·75	11 58 23·25	+0 16 33·3	0·30158	16 36·8
Mai 3·5	11 47 30·17	+1 8 8·5	0·34137	18 12·5
„ 4·5	47 14·56	9 2·7		18·0
„ 5·5	47 0·29	9 48·7	0·34578	23·6
„ 6·5	46 47·36	10 26·5		29·3
„ 7·5	11 46 35·77	+1 10 56·2	0·35026	18 35·1

1861, mittl. Berl. Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. Entfernung (66) von ♁	Aberrationszeit
Mai 8.5	11ʰ 46ᵐ 25ˢ52	+1° 11' 17"8		18ᵐ 40ˢ9
„ 9·5	46 16·61	11 31·2	0·35482	46·8
„ 10·5	46 9·03	11 36·4		52·8
„ 11·5	46 2·78	11 33·6	0·35945	18 58·9
„ 12·5	45 57·85	11 22·8		19 5·0
„ 13·5	45 54·25	11 3·9	0·36412	11·2
„ 14·5	45 51·96	10 37·0		17·5
„ 15·5	45 50·97	10 2·1	0.36884	23·8
„ 16·5	45 51·28	9 19·3		30·2
„ 17·5	11 45 52·87	+1 8 28·8	0.37360	19 36·6

Die Resultate der Vergleichung enthält das folgende Tableau.

Beobachtungsort	Mittlere, von Aberration befreite Berl. Beob.-Zeit	Geocentrische Rectascension	Geocentrische Declination	Beob. — Rech. Δα	Beob. — Rech. Δδ
Cambridge	April 9·83192	11ʰ 59ᵐ 46ˢ02	+0° 9' 16"6	—0ˢ48	—5"9
„	„ 10·64308	11 59 10·68	+0 12 18·4	—0·20	—9·9
„	„ 11·70432	11 58 24·80	+0 16 17·7	—0·39	—5·7
„	Mai 3·71295	11 47 26·46	+1 8 19·7	—0·27	—1·0
„	„ 4·63674	11 47 12·48	+1 9 9·0	—0·04	—0·5
„	„ 5·61699	11 46 58·32	+1 9 53·4	—0·41	0·0
Clinton	„ 9·63815	11 46 15·56	+1 11 34·3	+0.08	+1·9
„	„ 11·68949	11 46 1·94	+1 11 35·7	+0·20	+3·5
„	„ 12·71804	11 45 57·11	+1 11 19·5	+0·16	+0·1
Cambridge	„ 15·60711	11 45 50·16	+1 9 56·1	—0·78	—1·8
„	„ 16·60873	11 45 51·06	+1 9 14·9	—0·33	+0·7

Vor Allem fällt hier der constante Unterschied zwischen den Beobachtungen der beiden Sternwarten zu Cambridge und Clinton auf. Zuerst suchte ich diese Abweichung in einer Eigenbewegung des Vergleichssternes, weil allen drei Beobachtungen derselbe zu Grunde liegt, und bei der Reduction der Beobachtungen nur die Position aus Bessel's Zonen benützt wurde. Allein eine Vergleichung des Sternortes aus den verschiedenen Katalogen, in denen er sich vorfindet, macht diese Annahme höchst unwahrscheinlich. Es ist nämlich, wenn man alle Kataloge mit den von Auwers gege-

benen Relationen auf Bessel reducirt, der mittlere Ort des Vergleichssternes:

				Zahl der Beob.
1861·0	Piazzi XI 178	11ʰ 46ᵐ 43ˢ33	+1° 19' 31"7	(3,4)
	Bessel Z. 152......	43·41	30·5	(1,1)
	Taylor 6348	43·74	29·8	(5,7)
	Santini Cat. 812...	43·33	31·9	(2.2)
also:	$\frac{P+B+2T+2S}{6}$	11 46 43·48	+1 19 30·9.	

Diese letztere Position habe ich auch statt der in den Brünnow'schen „Astronomical Notices“ angeführten, als mittleren Ort des Vergleichsternes angenommen, und alle Kataloge auf Bessel reducirt, weil sämmtliche Vergleichsterne in Cambridge den Harvard Zones entnommen sind, und in diesen fast ausschliesslich Bessel'sche Sterne die Fundamentalpunkte bilden.

Auf Rechnung des mittleren Sternortes kann also nach dem Obigen die Abweichung nicht gesetzt werden: ob sie vielleicht ihren Grund habe in der Reduction des Sternes vom mittleren auf scheinbaren Ort, kann wohl nicht mit Sicherheit entschieden werden, da in den schon citirten „Astromical Notices“, der einzigen mir bekannten Quelle, in der die Clintoner Beobachtungen veröffentlicht sind, die Mittel zur Controlirung dieses Theiles der Reduction mangeln. Doch halte ich das letztere nicht für wahrscheinlich; ich glaube vielmehr, dass hier wieder ein constanter Auffassungsunterschied vorliegt, der seine Entstehung dem Umstande verdanken dürfte, dass der Planet in Cambridge mittelst des Filar-, in Clinton aber mittelst des Kreismikrometers beobachtet wurde. Aus diesem Grunde habe ich, wie aus dem Folgenden erhellen wird, wohl die Beobachtungen zu Clinton in einen eigenen Normalort zusammengefasst, allein bei der Bahnverbesserung nicht weiter benützt.

Ich theilte nun auf die im Tableau angedeutete Art die Beobachtungen in vier Normalorte ab, und indem ich das Mittel der Abweichungen jeder Gruppe als Ephemeridencorrection für das (bequemlichkeitshalber auf den nächstliegenden Vierteltag abgerundete) dazu gehörige Zeitmittel gelten liess, gelangte ich nach Hinzufügung der isolirten Cambridger Beobachtung vom 27. Mai zu folgenden fünf Positionen.

	mittl. Berl. Zeit	Scheinb. AR.	Scheinb. Decl.	Red. auf mittl. Äq. 1861·0.	
1861.	April 10·75000	11h 59m 5s87	+0° 12' 45"2	−1s80	+11"8
	Mai 4·50000	11 47 14·32	+1 9 2·2	−1·99	+12·8
	„ 11·50000	11 46 2·93	+1 11 35·4	−2·05	+13·1
	„ 16·00000	11 45 50·42	+1 9 41·1	−2·08	+13·3
	„ 27·60938	11 47 18·04	+0 52 55·6	−2·20	+14·3

Indem ich nun die scheinbaren Rectascensionen und Declinationen durch Hinzufügung der ebenfalls mitgetheilten Reductionen in mittlere verwandelte, und hierauf die Äquatorcoordinaten in Ekliptikcoordinaten umsetzte, erhielt ich:

	mittl. Berl. Zeit	mittl. Länge	mittl. Breite
I. 1861.	April 10·75000	179° 42' 1"04	+0° 6' 18"81
II.	Mai 4·50000	176 36 23·19	−0 12 49·09
III.	„ 11·50000	176 18 58·95	−0 17 31·66
IV.	„ 16·00000	176 16 51·60	−0 20 33·50
V.	„ 27.60938	176 43 35·04	−0 26 13·78

Die dazu gehörigen Sonnenorte sind die Nachstehenden:

	mittl. Berl. Zeit	Sonnenlänge	Sonn. Br.	log. R.	Reduct. auf loc. fict. ΔL	Reduct. auf loc. fict. ΔlR in Einh. 7 Stell.
1861.	April 10·75000	21° 17' 24"1	+0"58	0·0012590	−1' 56"2	+6183
	Mai 4·50000	44 24 35·3	+0·57	0·0039721	+1 53·3	−2161
	„ 11·50000	51 10 28·4	+0·37	0·0046676	+0 59·3	— 879
	„ 16·00000	55 30 42·7	—0·17	0·0050663	—0 24·4	+ 306
	„ 27·60938	66 39 41·6	+0·17	0·0059650	+0 20·2	— 155

Zu den Sonnencoordinaten bemerke ich nur, dass sich dieselben ebenfalls bereits auf das mittlere Äquinoctium 1861·0 beziehen, dass sie durch Anbringung der Powalky'schen Correctionen (Astr. Nach. Nr. 1343) auf Hansen's Sonnentafeln reducirt sind, und dass ich oben noch die Reduction auf den Gauss'schen *Locus fictus* beigesetzt habe, weil die Breite der Sonne durch Einführung desselben bekanntlich am einfachsten ihre Berücksichtigung findet.

Da ich wegen des früher erwähnten Umstandes den mit Nr. III bezeichneten (Clintoner) Normalort vorläufig ganz ausser Acht lassen wollte, standen mir nur vier Orte zur Disposition. Ich hielt es desshalb für das zweckmässigste, diesen vier Orten unter Ausscheidung zweier Coordinaten eine neue Bahn anzupassen, wegen der geringen Zwischenzeit zwischen den beiden mittleren Beobachtun-

gen jedoch nicht für gerathen, nach der von Gauss gegebenen Methode vorzugehen, sondern für sicherer, ausser den vier Längen noch die Breiten der beiden äusseren Orte, und nicht die der beiden mittleren, genau darzustellen. Obgleich nun die für diesen Fall in Anwendung zu bringenden Formeln, sich, wenn man mit Bahnberechnungen vertraut ist, ohne grosse Mühe entwickeln lassen, will ich dieselben doch an diesem Orte anführen, theils weil sich bei der raschen Aufeinanderfolge von Planetenentdeckungen leicht wieder eine Gelegenheit zu deren Anwendung ergeben könnte, theils aber auch, weil der Mangel einer übersichtlichen Zusammenstellung der Formeln, welche bei der Bahnbestimmung aus vier Orten in Gebrauch kommen, dazu mitgewirkt haben mag, dass nach dieser Methode so selten gerechnet wird. Um mich jedoch so kurz als möglich fassen zu können, werde ich überall die in der *Theoria motus* eingeführten Bezeichnungen beibehalten, und demgemäss verstehen unter:

t, t', t'', t''' die vier Beobachtungszeiten;

$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ die geocentrischen Längen;

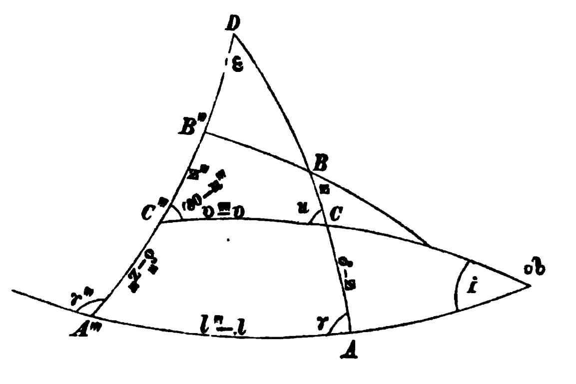
$\beta, \beta', \beta'', \beta'''$ die geocentrischen Breiten des Planeten;

r, r', r'', r''' und $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$ dessen Entfernungen von Sonne und Erde;

l, l', l'', l''' die heliocentrischen Längen der Erde, und

R, R', R'', R''' die Entfernungen von Erde und Sonne.

Die Breiten der Erde werde ich nicht berücksichtigen, indem ich annehme, dass man sie entweder vernachlässigt, oder durch Einführung des *locus fictus* in Rechnung zieht, in welchem Falle dann l, l', l'', l''' die heliocentrischen Längen des *locus fictus* und R, R', R'', R''' dessen Entfernung von der Sonne bedeuten. Ferner seien $(n\ 01)$, $(n\ 02)$, $(n\ 03)$, $(n\ 13)$ und $(n\ 23)$ die doppelten Flächenräume der Dreiecke zwischen der Sonne und den beiden in



der Klammer genannten Planetenorten, und (η 01), (η 02), (η 03) (η 13) und (η 23) das Verhälltniss der Sectoren zu den entsprechenden Dreieckflächen.

Dies vorausgesetzt, findet man die Neigung (γ und γ'') der beiden grössten Kreise, welche die beiden heliocentrischen Erdorte (A und A'') mit den entsprechenden geocentrischen Planetenorten (B und B'') verbinden, gegen die Ekliptik, und die Bögen $AB = \delta$; $A''B'' = \delta''$, bekanntlich aus den Formeln:

$$[1] \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{tg\,\beta}{\sin(\alpha - l)}$$

$$[2] \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{tg\,(\alpha - l)}{\cos\gamma},$$

denen man zur Probe und zur leichteren Orientirung über den Quadranten von γ und δ hinzufügen kann:

$$\cos\delta = \cos\beta\cos(\alpha - l) \quad \sin\delta = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Vertauscht man in [1] und [2] α, β und l mit α'' β'' und l'', so erhält man ganz eben so γ'' und δ'', und hierauf die Neigung der beiden grössten Kreise AB und $A''B''$ gegen einander (ε) und die Lage des Durchschnittspunktes (D) derselben aus:

$$[3] \qquad \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}(AD + A''D) = \sin\tfrac{1}{2}(l'' - l)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma'' + \gamma)$$
$$[4] \qquad \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}(AD + A''D) = \cos\tfrac{1}{2}(l'' - l)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma'' - \gamma)$$
$$[5] \qquad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}(AD - A''D) = \sin\tfrac{1}{2}(l'' - l)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma'' + \gamma)$$
$$[6] \qquad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}(AD - A''D) = \cos\tfrac{1}{2}(l'' - l)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma'' - \gamma)$$

Durch Vergleichung der Dreiecke zwischen der Sonne und dem ersten und zweiten, dann zweiten und vierten und ersten und vierten Planetenort; ferner jener zwischen Sonne und dritten und vierten, ersten und dritten und ersten und vierten Planetenort gewinnt man die beiden Relationen:

$$0 = (n.13)\,[\rho\cos\beta\sin(\alpha' - \alpha) + R\sin(\alpha' - l)] - (n.03)\,R'\sin(\alpha' - l') + (n.01)\,[\rho''\cos\beta''\sin(\alpha' - \alpha'') + R''\sin(\alpha' - l'')]$$

$$0 = (n.23)\,[\rho\cos\beta\sin(\alpha' - \alpha) + R\sin(\alpha' - l)] - (n.03)\,R'\sin(\alpha' - l') + (n.02)\,[\rho''\cos\beta''\sin(\alpha' - \alpha'') + R''\sin(\alpha' - l'')]$$

welche sich durch Einführung der Hilfsgrössen:

$$[7] \qquad R \sin \delta = a$$

$$[8] \qquad R'' \sin \delta'' = a''$$

$$[9] \qquad \frac{R \sin(\alpha' - l)}{\cos \beta \sin(\alpha' - \alpha)} - R \cos \delta = b$$

$$[10] \qquad \frac{R'' \sin(\alpha' - l'')}{\cos \beta'' \sin(\alpha' - \alpha'')} - R'' \cos \delta'' = b''$$

$$[11] \qquad \frac{R \sin(\alpha' - l)}{\cos \beta \sin(\alpha' - \alpha)} - R \cos \delta = \varkappa$$

$$[12] \qquad \frac{R'' \sin(\alpha' - l'')}{\cos \beta'' \sin(\alpha' - \alpha'')} - R'' \cos \delta'' = \varkappa''$$

$$[13] \qquad \frac{R' \sin(\alpha' - l')}{\cos \beta'' \sin(\alpha' - \alpha'')} = \lambda'$$

$$[14] \qquad \frac{R' \sin(\alpha' - l')}{\cos \beta \sin(\alpha' - \alpha)} = \lambda''$$

$$[15] \qquad \frac{\cos \beta \sin(\alpha' - \alpha)}{\cos \beta'' \sin(\alpha' - \alpha'')} = \mu$$

$$[16] \qquad \frac{\cos \beta'' \sin(\alpha' - \alpha'')}{\cos \beta \sin(\alpha' - \alpha)} = \mu''$$

und der Bezeichnungen:

$$x = \rho + R \cos \delta,$$
$$x'' = \rho'' + R'' \cos \delta''$$

durch welche

$$r = \sqrt{x^2 + a^2}$$
$$r'' = \sqrt{x''^2 + a''^2}$$

wird, in die nachstehenden vereinfachen:

$$0 = (n.13)(x + b)\,\mu - (n.03)\,\lambda' + (n.01)(x'' + \varkappa'')$$
$$0 = (n.02)(x'' + b'')\,\mu'' - (n.03)\,\lambda'' + (n.23)(x + \varkappa)$$

Setzt man nun ferner:

$$P = -\frac{(n.03)}{(n.01)} = -\frac{t'' - t}{t' - t} \cdot \frac{(\eta.01)}{(\eta.03)}$$

$$P'' = -\frac{(n.03)}{(n.23)} = -\frac{t''-t}{t''-t'} \cdot \frac{(\eta.23)}{(\eta.03)}$$

$$Q = \left(\frac{(n.03)-(n.01)}{(n.13)} - 1\right) r^3$$

$$= -\tfrac{1}{2} k^2 (t'-t)(t''-t) \cdot \frac{r^2}{r'r''} \cdot \frac{\sec\tfrac{1}{2}(v''-v')\sec\tfrac{1}{2}(v'-v)\sec\tfrac{1}{2}(v''-v)}{(\eta.01).(\eta.03)}$$

$$Q'' = \left(\frac{(n.03)-(n.23)}{(n.02)} - 1\right) r''^3$$

$$= -\tfrac{1}{2} k^2 (t''-t')(t''-t) \cdot \frac{r''^2}{rr'} \cdot \frac{\sec\tfrac{1}{2}(v''-v')\sec\tfrac{1}{2}(v''-v)\sec\tfrac{1}{2}(v'-v)}{(\eta.03)(\eta.23)}$$

und hierauf:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & -\varkappa''-\lambda' P = c \\ \text{II.} & -\varkappa -\lambda' P'' = c'' \\ \text{III.} & \mu (1+P) = d \\ \text{IV.} & \mu'' (1+P'') = d'', \end{array}$$

so erhält man schliesslich die beiden Gleichungen:

$$\text{VII.} \qquad x = c'' + \frac{d'' (x'' + b'')}{1 + \frac{Q''}{r''^3}}$$

$$\text{VIII.} \qquad x'' = c + \frac{d (x + b)}{1 + \frac{Q}{r^3}},$$

welche auf die bekannte Weise durch Versuche aufzulösen sind.

Zur Erleichterung der Berechnung der Radienvectoren kann man die Hilfswinkel z und z'' mittelst der Substitution

$$\text{V.} \qquad \operatorname{tg} z = \frac{a}{x}$$

$$\text{VI.} \qquad \operatorname{tg} z'' = \frac{a''}{x''}$$

einführen, wo dann r und r'' gefunden werden aus

$$r = \frac{a}{\sin z} = \frac{x}{\cos z}$$

$$r'' = \frac{a''}{\sin z''} = \frac{x''}{\cos z''}$$

Da die Hilfswinkel z und z'' durch die Bögen BC und $B''C''$ repräsentirt werden, wenn C und C'' die heliocentrischen Planetenorte auf der Himmelssphäre vorstellen, hat man mit Berücksichtigung früherer Bezeichnungen:

$$CD = \zeta = AD - \delta + z$$
$$C''D'' = \zeta'' = A''D - \delta'' + z''$$

und findet daher die Differenz der wahren Anomalien $C''C = v'' - v$ und die erst in der letzten Hypothese zur Bestimmung der Bahnlage nöthigen Winkel u und u'' aus dem Dreiecke DCC'' durch:

$$\text{IX.} \quad \sin\tfrac{1}{2}(v''-v)\sin\tfrac{1}{2}(u''+u) = \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}(\zeta+\zeta'')$$
$$\text{X.} \quad \sin\tfrac{1}{2}(v''-v)\cos\tfrac{1}{2}(u''+u) = \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin\tfrac{1}{2}(\zeta-\zeta'')$$
$$\text{XI.} \quad \cos\tfrac{1}{2}(v''-v)\sin\tfrac{1}{2}(u''-u) = \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}(\zeta+\zeta'')$$
$$\text{XII.} \quad \cos\tfrac{1}{2}(v''-v)\cos\tfrac{1}{2}(u''-u) = \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}(\zeta-\zeta'')$$

Die Grössen r' und r', ferner $v'-v$ und $v''-v'$ erhält man sodann aus den Gleichungen:

$$\text{XIII.} \quad r'\sin(v'-v) = -\frac{r''\sin(v''-v)}{P}$$

$$\text{XIV.} \quad r'\cos(v'-v) = \frac{1+P}{P}\cdot\frac{r}{1+\frac{Q}{r^3}} - \frac{r''}{P}\cos(v''-v)$$

$$\text{XV.} \quad r'\sin(v''-v') = -\frac{r}{P''}\sin(v''-v)$$

$$\text{XVI.} \quad r''\cos(v''-v') = \frac{1+P''}{P''}\cdot\frac{r''}{1+\frac{Q'''}{r'''^3}} - \frac{r}{P''}\cos(v''-v).$$

Der weitere Verlauf der Rechnungen gestaltet sich ganz eben so, wie es in der *Theoria motus* auseinander gesetzt ist; und da die dazu nöthigen Formeln bereits an mehreren Orten zusammengestellt sind, übergehe ich sie hier, will jedoch noch auf die kleine Erleichterung aufmerksam machen, die dadurch eintritt, dass man in der letzten Hypothese die Gleichungen XIII — XVI nicht mehr aufzulösen braucht. Trotzdem möchte ich, wegen der im Allgemeinen weit geringeren Convergenz der Reihen für P, P'', Q und Q'' den Gauss'schen P', P'', Q' und Q'' gegenüber die vollständige Darstellung der äusseren Orte bei einer ersten Bahnbestimmung nicht

anrathen, sondern erst dann empfehlen, wenn bereits ein genähertes Elementensystem vorhanden ist.

Auf dem so eben auseinander gesetzten Wege gelangte ich schliesslich zu folgendem Elementensysteme:

1861, April 10·75 mittl. Berl. Zeit.

$M = 130° \; 8' \; 3''21$
$\pi = 44 \; 38 \; 0·55$ ⎫
$\Omega = 8 \; 12 \; 24·17$ ⎬ mittl. Äq. 1861·0.
$i = 3 \; 4 \; 15·50$ ⎭
$\varphi = 9 \; 1 \; 46·72$
$\mu = 821''9898$
$la = 0·4234268.$

Die Vergleichung dieser Bahn mit den fünf Normalorten ergab wieder im Sinne Beob.-Rech.

	Δλ	Δβ	Zahl der Beob.	Beob. Ort.
I.	0''0	0''0	3	Cambridge
II.	+ 0·1	+ 1·0	3	„
III.	+ 7·7	+ 0·6	3	Clinton
IV.	+ 0·1	— 1·7	2	Cambridge
V.	0·0	0·0	1	„

Wie man sieht, sind auch die unabhängigen Breiten der Cambridger Orte recht befriedigend dargestellt; beim Clintoner Orte ist aber, wie auch zu erwarten stand, die Abweichung zurückgeblieben, obwohl sie etwas kleiner geworden ist. Sie beträgt jetzt, in Rectascension und Declination umgesetzt;

$$\Delta\alpha = +0^s49 \quad \Delta\delta = +2''5.$$

Da die Breiten der mittleren Orte nicht nur bis auf Grössen von der Ordnung der Beobachtungsfehler dargestellt werden, sondern überdies die beiden Abweichungen das entgegengesetzte Zeichen besitzen, und der Clintoner Normalort wegen der Wahrscheinlichkeit des Vorhandenseins eines constanten Fehlers nicht ins Gewicht fallen kann, habe ich eine nochmalige Verbesserung der Bahn, durch ein gleichmässigeres Vertheilen der Fehler nicht mehr vorgenommen, weil dadurch meiner Ansicht nach nichts an Genauigkeit wäre gewonnen worden. Bemerkenswerth ist übrigens die grosse Ähnlichkeit dieser Elemente von Maja mit denen der Fides. Diese Ähnlichkeit war schon Lespiault aufgefallen; aber die

jetzt vorliegenden Elemente nähern sich noch mehr denen der Fides als die früheren von Hall, so dass nun schwerlich noch zwei andere Planeten, eine in allen Stücken so ähnliche Bahn besitzen dürften wie diese beiden.

Um den Ort des Planeten in der diesjährigen Opposition möglichst sicher zu erhalten, berechnete ich die Störungen erster Ordnung, welche derselbe durch Jupiter seit seiner Entdeckung erlitten hat. Die höheren Potenzen der Masse Jupiters zu berücksichtigen, hielt ich für unnütz, weil auch das letzte Elementensystem noch ein ziemlich unsicheres genannt werden muss. Es war dies schon von vorne herein wegen der ungemein geringen geocentrischen Bewegung der Maja während ihrer ersten Erscheinung zu erwarten, und zeigt sich auch ohne weiteres darin, dass meine zuerst angeführte, und die Hall'sche, nicht unbedeutend von ihr abweichende Bahn, mit den Beobachtungen nahe gleich gut übereinstimmen.

Da ich nicht die Absicht habe, die Bearbeitung des Planeten weiter fortzuführen, gleichviel ob er in dieser Opposition aufgefunden wird oder nicht, theile ich ausser den Störungen der recktwinkeligen Coordinaten auch noch die doppelt summirten Functionen mit, um dem künftigen Berechner die Möglichkeit zu bieten, die Störungsrechnungen, wenn er es für wünschenswerth hält, zu controliren und fortzusetzen. Ich füge noch hinzu, dass als Fundamentalebene die Ekliptik, als Osculationspunkt der 8. Mai 1861 gewählt wurde, dass die Störungen der Coordinaten in Einheiten der siebenten Decimale angegeben sind und sich auf das mittlere Äquinoctium des Jahres 1860 beziehen.

Datum			$''f(x)$		$''f(y)$		$''f(z)$	
1861.	März	9	—	10·9	+	221·1	+	5·9
	April	18	—	0·1	+	7·8	+	0·3
	Mai..........	28	—	0·5	+	8·9	+	0·3
	Juli	7	—	2·2	+	197·4	+	6·4
	August.......	16	+	5·8	+	548·3	+	18·7
	September...	25	+	37.8	+	1041·4	+	37·1
	November ...	4	+	111·9	+	1664·0	+	61·6
	December ...	14	+	249·1	+	2413·6	+	92·5

Datum			$''f(x)$	$''f(y)$	$''f(z)$
1862.	Jänner	23	+ 470·9	+ 3300·4	+ 130·6
	März	4	+ 796·0	+ 4349·1	+ 177·1
	April	13	+ 1235·7	+ 5599·6	+ 234·3
	Mai	23	+ 1788·5	+ 7107·4	+ 305·2
	Juli	2	+ 2433·5	+ 8942·4	+ 393·6
	August	11	+ 3122·4	+ 11185·4	+ 504·0
	September	20	+ 3771·2	+ 13922·0	+ 641·4
	October	30	+ 4251·7	+ 17232·1	+ 810·8
	December	9	+ 4384.0	+ 21174·5	+ 1016·5
1863.	Jänner	18	+ 3933·2	+ 25764·7	+ 1260·9
	Februar	27	+ 2614·2	+ 30945·8	+ 1543·1
	April	8	+ 109·2	+ 36554·3	+ 1856·7
	Mai	18	— 3893·5	+ 42286·4	+ 2187·9
	Juni	27	— 9635·1	+ 47675·4	+ 2513·7
	August	6	— 17198·7	+ 52099·8	+ 2801·7
	September	15	— 26410·6	+ 54842·4	+ 3012·6
	October	25	— 36767·9	+ 55213·7	+ 3106·0
	December	4	— 47437·9	+ 52726·8	+ 3050·0
1864.	Jänner	13	— 57364·7	+ 47270·6	+ 2830·7
	Februar	22	— 65480·1	+ 39206·5	+ 2459·1
	April	2	— 70945·9	+ 29327·7	+ 1971·0
	Mai	12	— 73336.1	+ 18686·0	+ 1418·9
	Juni	21	— 72687·6	+ 8356·5	+ 860·1
	Juli	31	— 69424·4	— 766·3	+ 345·3
	September	9	— 64204·3	— 8085·6	— 88·9
	October	19	— 57759·1	— 13322·9	— 422·1
	November	28	— 50771·6	— 16469·7	— 648·9
1865.	Jänner	7	— 43801·8	— 17713·0	— 774·8
	Februar	16	— 37258·1	— 17355·5	— 812·7
	März	28	— 41399·0	— 15750·1	— 779·1
	Mai	7	— 26354·0	— 13257·0	— 691·4

Datum			ξ		η		ζ	
1861.	April	18	—	1	+	26	+	1
	Mai	28	—	1	+	25	+	1
	Juli	7	—	1	+	211	+	7
	August......	16	+	8	+	560	+	19
	September ..	25	+	41	+	1052	+	38
	November ...	4	+	117	+	1674	+	62
	December ...	14	+	256	+	2426	+	93
1862.	Jänner......	23	+	480	+	3312	+	131
	März	4	+	806	+	4365	+	178
	April	13	+	1246	+	5620	+	235
	Mai	23	+	1796	+	7134	+	307
	Juli	2	+	2437	+	8976	+	395
	August......	11	+	3119	+	11227	+	506
	September...	20	+	3757	+	13971	+	644
	October	30	+	4223	+	17285	+	814
	December....	9	+	4336	+	21229	+	1020
1863.	Jänner......	18	+	3861	+	25814	+	1264
	Februar	27	+	2515	+	30982	+	1546
	April	8	—	15	+	36565	+	1858
	Mai	18	—	4039	+	42258	+	2187
	Juni	27	—	9788	+	47595	+	2511
	August	6	—	17337	+	51959	+	2795
	September...	15	—	26507	+	54644	+	3003
	October	25	—	36795	+	54974	+	3094
	December....	4	—	47376	+	52477	+	3036
1864.	Jänner......	13	—	57213	+	47052	+	2818
	Februar	22	—	65258	+	39053	+	2449
	April	2	—	70688	+	29264	+	1966
	Mai	12	—	73081	+	18713	+	1419
	Juni	21	—	72469	+	8458	+	864
	Juli	31	—	69261	—	615	+	352

Datum		ξ	η	ζ
	September... 9	— 64102	— 7911	— 80
	October..... 19	— 57714	— 13148	— 413
	November... 28	— 50774	— 16311	— 640
1865.	Jänner...... 7	— 43839	— 17579	— 767
	Februar..... 16	— 37316	— 17252	— 807
	März 28	— 31467	— 15676	— 775

Wegen des bereits ziemlich unregelmässigen Ganges der Störungen schien es mir zweckmässig, für die Berechnung der Aufsuchungsephemeriden den Osculationspunkt in die Nähe der Opposition dieses Jahres zu verlegen, und ich wählte demgemäss als neue Osculationsepoche den 27. Jänner 1865. Für diesen Zeitpunkt sind nach den oben mitgetheilten Elementen und Störungswerthen die Ekliptik-Coordinaten wieder auf das mittlere Äquinoctium 1860·0 bezogen und deren Geschwindigkeiten:

$$x = -\ 2\cdot3211197 \qquad \frac{dx}{dt} = -\ 0\cdot006615883$$

$$y = +\ 1\cdot3683816 \qquad \frac{dy}{dt} = -0\cdot007998153$$

$$z = +\ 0\cdot0903928 \qquad \frac{dz}{dt} = -\ 0\cdot000374176.$$

Aus diesen Grössen findet man auf die bekannte Weise das untenstehende für den 27. Jänner 1865 osculirende Elementensystem, welches ich Kürze halber bereits auf das mittlere Äquinoctium 1865·0 reducirt mittheile.

1865, Jänner 27·0 mittl Berl. Zeit.

$$M = 87^\circ\ 7'\ 3''18$$

$$\pi - \Omega = 36\ \ 9\ \ 36\cdot9$$

$$\left.\begin{array}{l} \Omega = 8\ \ 15\ \ 20\cdot1 \\ i = 3\ \ 4\ \ 15\cdot1 \end{array}\right\}\ \text{mittl. Äq. 1865·0.}$$

$$\varphi = 9\ \ 5\ \ 46\cdot9$$

$$\mu = 821''9211$$

$$la = 0\cdot4234510$$

Ein für die Wiederauffindung des Planeten wichtiges Element ist auch seine Helligkeit, und um diese zu beurtheilen, haben wir zwei Angaben. Bei der Anzeige der Entdeckung nennt Bond (Astr. Nach. Nr. 1308) den Planeten „a planet of the 13th mg.“ Dem scheint zu widersprechen die Bemerkung des Berechners Hall (Astr. Nach. 1427), nach dem bei der Entdeckung der Planet gewesen sei „not much brighter than a star of the 12 mg.“ Obwohl er nun auch später noch einmal sagt, bei der Berechnung der mittleren Oppositionshelligkeit habe er die Grösse des Planeten Mitte April zu 12·0 angenommen, scheint die Notiz doch durch Schreib- oder Druckfehler entstellt zu sein, weil die Richtigkeit derselben vorausgesetzt die mittlere Oppositionsgrösse nicht 12·4 werden könnte, indem auch nach der Bahn von Hall der Planet bei der Entdeckung schwächer war als in der mittleren Opposition. Ich lese daher oben statt 12 beide Male 13, wodurch nicht nur Halls Angabe mit der von Bond, sondern auch mit seiner eigenen späteren über die mittlere, und die im Jahre 1863 stattfindende Helligkeit in Übereinstimmung kommt. Es scheint demnach das sicherste zu sein, dem Planeten bei der Entdeckung die Grösse 12·7 zuzuschreiben. Die zweite Angabe rührt aus Clinton her, wo gesagt wird, „the planet scarcely ever exceeded the 13th mg.“, wesshalb ich als Grösse für den 11. Mai 13·0 annehme. Man hat also:

	Helligkeit	geschätzte Grösse	Red. auf mittl. Opp.	mittlere Opp. Helligkeit
1861. April 10	0·55	12·7	— 0·7	12·0
Mai 11	0·41	13·0	— 1·0	12·0

Also übereinstimmend aus beiden Grössenschätzungen $M = 12{\cdot}0$, wofür ich aber $M = 11{\cdot}5$ adoptire, da die amerikanischen Astronomen schwächer schätzen als die deutschen.

Die nun folgenden Aufsuchungsephemeriden sind wohl von selbst verständlich; es erübrigt mir daher nur noch hinzuzusetzen, dass die Änderung der Epoche $dM = \mp 16\,\mu$ beträgt und einer Änderung von μ, der wahrscheinlichsten Hypothese gegenüber um $d\mu = \mp 9''2$ entspricht. Eine so grosse Änderung ist wohl kaum mehr zulässig, es ist desshalb Grund zu hoffen, der Planet werde sich innerhalb des von den Ephemeriden eingeschlossenen Raumes aufhalten.

Hypothetische Ephemeriden zur Aufsuchung von (66) Maja

während der Opposition des Jahres 1865.

1865 0^h Berliner Zeit	I. Hypothese $dM = -8°39'2$		II. Hypothese $dM = 0°0'0$		III. Hypothese $dM = +8°39'2$	
	α	δ	α	δ	α	δ
Jän. 18	$10^h41^m41^s$	+11°39'2	$10^h59^m13^s$	+ 9°34'7	$11^h15^m38^s$	+ 7°34'3
„ 19			58 51	36·9		
„ 20			58 28	39·3		
„ 21			58 4	41·8		
„ 22			57 38	44·4		
„ 23			57 11	47·2		
„ 24			56 42	50·1		
„ 25			56 12	53·1		
„ 26	10 37 17	+12 5·1	10 55 40	+ 9 56·3	11 12 56	+ 7 51·0
„ 27			55 7	+ 9 59·6		
„ 28			54 32	+10 3·0		
„ 29			53 56	6·5		
„ 30			53 19	10·1		
„ 31			52 40	13·8		
Febr. 1			52 0	17·6		
„ 2			51 18	21·5		
„ 3	10 31 27	+12 37·1	10 50 36	+10 25·4	11 8 38	+ 8 16·2
„ 4			49 53	29·4		
„ 5			49 8	33·5		
„ 6			48 22	37·7		
„ 7			47 35	42·0		
„ 8			46 47	46·3		
„ 9			45 58	50·7		
„ 10			10 45 8	+10 55·1		

1865 0h Berliner Zeit	I. Hypothese $dM = -3°39'2$		II. Hypothese $dM = 0°0'0$		III. Hypothese $dM = +3°39'2$	
	α	δ	α	δ	α	δ
Febr. 11	10h24m35s	+13°12'4	10h44m18s	+10°59'6	11h 2m58s	+ 8°48'0
„ 12			43 27	+11 4·1		
„ 13			42 35	8·6		
„ 14			41 42	13·1		
„ 15			40 49	17·7		
„ 16			39 55	22·3		
„ 17			39 1	26·9		
„ 18			38 7	31·5		
„ 19	10 17 8	+13 47·9	10 37 12	+11 36·0	10 56 18	+ 9 23·9
„ 20			36 17	40·6		
„ 21			35 22	45·1		
„ 22			34 26	49·6		
„ 23			33 30	54·1		
„ 24			32 34	+11 58·6		
„ 25			31 38	+12 3·0		
„ 26			30 43	7·3		
„ 27	10 9 41	+14 20·5	10 29 47	+12 11·6	10 49 4	+10 1·0
„ 28			28 52	15·8		
März 1			27 57	20·0		
„ 2			27 2	24·1		
„ 3			26 8	28·2		
„ 4			25 14	32·2		
„ 5			24 21	36·1		
„ 6			23 29	39·8		
„ 7	10 2 47	+14 47·6	10 22 37	+12 43·4	10 41 48	+10 36·0
„ 8			21 46	46·9		
„ 9			20 56	50·3		
„ 10			10 20 7	+12 53·6		

1865 0h Berliner Zeit	I. Hypothese $dM = -3°39'2$		II. Hypothese $dM = 0°0'0$		III. Hypothese $dM = +3°39'2$	
	α	δ	α	δ	α	δ
März 11			10h 19m 18s	+12°56'8		
„ 12			18 30	+12 59·9		
„ 13			17 44	+13 2·9		
„ 14			16 59	5·8		
„ 15	9h 56m 55s	+15° 7'2	10 16 14	+13 8·6	10h 35m 2s	+11° 6'2
„ 16			15 30	11·3		
„ 17			14 48	13·9		
„ 18			14 7	16·4		
„ 19			13 27	18·7		
„ 20			12 48	20·8		
„ 21			12 10	22·8		
„ 22			11 34	24·6		
„ 23	9 52 25	+15 18·6	10 11 0	+13 26·3	10 29 13	+11 29·6
„ 24			10 27	27·9		
„ 25			9 55	29·4		
„ 26			9 24	30·7		
„ 27			8 55	31·9		
„ 28			8 27	33·0		
„ 29			8 1	33·9		
„ 30			7 36	34·7		
März 31	9 49 29	+15 21·5	10 7 13	+13 35·4	10 24 40	+11 44·8

Ferner ist in der wahrscheinlichsten Hypothese ($dM = 0°0'0$).

1865 0^h Berliner Zeit	Log. der Entfernung		Lichtstärke	Grösse
	(66) von ☉	(66) von ♁		
Jänner 18	0·42833	0·27513	0·75	11·8
„ 26	0·43045	0·26171		
Februar 3	0·43255	0·25133		
„ 11	0·43461	0·24474		
„ 19	0·43664	0·24246		
„ 27	0·43865	0·24479	0·82	11·7
März 7	0·44062	0·25166		
„ 15	0·44256	0·26263		
„ 23	0·44446	0·27706		
„ 31	0·44633	0·29420	0·63	12·0

(66) ☍ ☉ Februar 24.

Die Auflösung des sphärischen Dreieckes durch seine drei Höhen.

Von Franz Unferdinger,
Lehrer der Mathematik an der Oberrealschule am Bauernmarkt in Wien.

(Mit 1 Holzschnitt.)

Von jedem Punkte auf der Kugel können auf einen grössten Kreis zwei sphärische Perpendikel gefällt werden, welche sich zu 180° ergänzen und wir verstehen unter sphärischer Höhe dieses Punktes über dem grössten Kreis das kleinere der beiden Perpendikel, welches also immer kleiner als 90° ist. Die drei Höhen eines sphärischen Dreieckes sind also immer je einzeln kleiner als 90°.

Bezeichnen $a, b, c,$ die drei Seiten eines sphärischen Dreieckes, h_1, h_2, h_3 die auf diese Seiten in derselben Ordnung sich beziehenden sphärischen Höhen der Gegenecken und setzen wir voraus, dass die Seiten einzeln genommen kleiner als 180° sind, so bestehen zwischen diesen sechs Grössen, nach den Elementen der sphärischen Trigonometrie, folgende drei Gleichungen:

$$\sin h_1 = \frac{2H}{\sin a}, \quad \sin h_2 = \frac{2H}{\sin b}, \quad \sin h_3 = \frac{2H}{\sin c}, \tag{1}$$

worin unter H folgende immer positiv zu nehmende symmetrische Function der drei Seiten zu verstehen ist:

$$H = \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}. \tag{2}$$

Die Aufgabe, welche im Titel dieser Abhandlung ausgesprochen ist, besteht also darin, aus den drei Gleichungen (1) die Grössen a, b, c zu bestimmen oder mittelst dieser die drei Seiten a, b, c als Functionen der Höhen darzustellen [1]).

[1]) Dr. Junghann hat sich im zweiten Theile seiner Tetraedrometrie p. 115 ebenfalls mit diesem Problem beschäftiget. Unsere in der Anlage und in den End-resultaten verschiedene und vollständige Auflösung ist zu denjenigen Ausdrücken gelangt, welche geeignet sind, den Anforderungen der Wissenschaft zu entsprechen.

Zur Erreichung dieses Zieles ist es nothwendig zuerst die symmetrische Wurzelgrösse H auf eine andere Form zu bringen, wozu wir nun übergehen.

Goniometrische Verwandlungsformeln.

Bezeichnen a, b, c, drei beliebige Winkel oder Bogen und zerlegen wir die Differenz der Quadrate

$$(a) \qquad (\sin b \sin c)^2 - (\cos a - \cos b \cos c)^2$$

in das Product aus Summe und Unterschied, so werden die beiden Factoren gleich

$$\cos a - \cos(b+c), \quad \cos(b-c) - \cos a;$$

verwandelt man die beiden Cosinusdifferenzen in Productformen, nach der bekannten Formel

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y),$$

so zeigt sich, dass der Ausdruck (a) gleich ist

$$4 \sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) \sin\tfrac{1}{2}(b+c-a) \sin\tfrac{1}{2}(a+c-b) \sin\tfrac{1}{2}(a+b-c) = 4H^2.$$

Entwickelt man hingegen im Ausdruck (a) die Quadrate, so wird nach einfacher Rechnung auch

$$(3) \qquad 4H^2 = (\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c) - 2(1 - \cos a \cos b \cos c).$$

Setzen wir zur Vereinfachung der weiteren Transformationen

$$\sin\frac{1}{2}a = \alpha \quad \sin\frac{1}{2}b = \beta \quad \sin\frac{1}{2}c = \gamma$$
$$\cos\frac{1}{2}a = \alpha' \quad \cos\frac{1}{2}b = \beta' \quad \cos\frac{1}{2}c = \gamma',$$

so dass also

$$(b) \qquad \alpha^2 + \alpha'^2 = \beta^2 + \beta'^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 = 1$$

ist, so wird

$$\cos a \cos b \cos c = (\alpha'^2 - \alpha^2)(\beta'^2 - \beta^2)(\gamma'^2 - \gamma^2)$$

oder wenn man entwickelt:

$$\cos a \cos b \cos c = (\alpha'\beta'\gamma')^2 + (\alpha'\beta\,\gamma\,)^2 + (\alpha\,\beta'\gamma\,)^2 + (\alpha\,\beta\,\gamma')^2$$
$$- (\alpha\,\beta\,\gamma\,)^2 - (\alpha\,\beta'\gamma')^2 - (\alpha'\beta\,\gamma')^2 - (\alpha'\beta'\gamma\,)^2.$$

Die vier Glieder der ersten Zeile werden aber der Reihe nach gleich, wenn man die Gleichung (b) anwendet:

$$(\beta'\gamma')^2 - (\alpha\,\beta'\gamma')^2,$$
$$(\beta\,\gamma')^2 - (\alpha'\beta\,\gamma')^2,$$
$$(\beta'\gamma\,)^2 - (\alpha'\beta'\gamma\,)^2,$$
$$(\beta\,\gamma\,)^2 - (\alpha\,\beta\,\gamma\,)^2$$

und da die Summe der vier ersten Glieder in den letzteren Ausdrücken offenbar gleich $\gamma'^2 + \gamma^2 = 1$ ist, so wird

$$\cos a \cos b \cos c = 1 - 2\{(\alpha\beta\gamma)^2 + (\alpha\beta'\gamma')^2 + (\alpha'\beta\gamma')^2 + (\alpha'\beta'\gamma)^2\}$$

Sei nun

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta &= \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c, \\ \Delta_1 &= \sin \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c, \\ \Delta_2 &= \sin \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} c, \\ \Delta_3 &= \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b, \end{aligned} \right.$$

so folgt

$$(c) \qquad 1 - \cos a \cos b \cos c = 2(\Delta^2 + \Delta_1^2 + \Lambda_2^2 + \Delta_3^2).$$

Nach unserer Bezeichnung ist aber auch, wenn man statt der Functionen der ganzen Bogen a, b, c, die der halben einführt

$$2 \sin a \sin b = 8\alpha\alpha'\beta\beta'(\gamma^2 + \gamma'^2) = 8\Delta\Delta_3 + 8\Delta_1\Delta_2,$$
$$2 \sin a \sin c = 8\alpha\alpha'\gamma\gamma'(\beta^2 + \beta'^2) = 8\Delta\Delta_2 + 8\Delta_1\Delta_3,$$
$$2 \sin b \sin c = 8\beta\beta'\gamma\gamma'(\alpha^2 + \alpha'^2) = 8\Delta\Delta_1 + 8\Delta_2\Delta_3,$$

addirt man diese drei Gleichungen zu jener (3), indem gleichzeitig für $1 - \cos a \cos b \cos c$ der Werth aus (c) gesetzt wird, so gelangt man zu folgender Transformationsgleichung:

$$4H^2 = (\sin a + \sin b + \sin c)^2 - 4(\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)^2$$

welche für beliebige Werthe der darin vorkommenden Winkel oder Bogen a, b, c giltig ist. Dieselbe wird also auch dann noch gelten, wenn man $-a$ statt a setzt. Hierdurch ändert sich der erste Theil gar nicht, aber im zweiten Theile ändern $\sin a$, Δ und Δ_1 das Zeichen. Setzt man ebenso $-b$ statt b und $-c$ statt c, so formirt sich folgendes System von Transformationsgleichungen:

$$(5)\quad \begin{cases} 4H^2 = (\sin a + \sin b + \sin c)^2 - 4\,(\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)^2, \\ 4H^2 = (\sin b + \sin c - \sin a)^2 - 4\,(\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta)^2, \\ 4H^2 = (\sin a + \sin c - \sin b)^2 - 4\,(\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2 - \Delta)^2, \\ 4H^2 = (\sin a + \sin b - \sin c)^2 - 4\,(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta)^2. \end{cases}$$

Trigonometrische Auflösung.

Lassen wir in den vorhergehenden Verwandlungsgleichungen (5) von jetzt an a, b, c die drei 180° nicht übersteigenden Seiten eines sphärischen Dreieckes bedeuten und setzen für $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ die Werthe aus (1) so folgt:

$$(\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)^2 = H^2 \left\{ \left(\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_2} + \frac{1}{\sin h_3} \right)^2 - 1 \right\},$$

$$(\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta)^2 = H^2 \left\{ \left(\frac{1}{\sin h_2} + \frac{1}{\sin h_3} - \frac{1}{\sin h_1} \right)^2 - 1 \right\},$$

$$(\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2 - \Delta)^2 = H^2 \left\{ \left(\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_3} - \frac{1}{\sin h_2} \right)^2 - 1 \right\},$$

$$(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta)^2 = H^2 \left\{ \left(\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_2} - \frac{1}{\sin h_3} \right)^2 - 1 \right\},$$

oder wenn zur Vereinfachung der Rechnungsoperationen mittelst der Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} f = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_2} + \frac{1}{\sin h_3} \right)^2 - 1}, \\ f_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\sin h_2} + \frac{1}{\sin h_3} - \frac{1}{\sin h_1} \right)^2 - 1}, \\ f_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_3} - \frac{1}{\sin h_2} \right)^2 - 1}, \\ f_3 = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_2} - \frac{1}{\sin h_3} \right)^2 - 1}, \end{cases}$$

die vier Hilfsgrössen f, f_1, f_2, f_3, welche wir Auflösungsfunctionen nennen wollen, eingeführt werden:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 = Hf, \\ \Delta_2+\Delta_3-\Delta_1-\Delta = Hf_1, \\ \Delta_1+\Delta_3-\Delta_2-\Delta = Hf_2, \\ \Delta_1+\Delta_2-\Delta_3-\Delta = Hf_3. \end{array}\right. \tag{7}$$

Die von uns behandelte Aufgabe wird als gelöset zu betrachten sein, wenn es gelingt, die Seiten und Winkel des sphärischen Dreieckes durch die Functionen f darzustellen.

Durch Addition der vier Gleichungen (7) wird

$$2(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3-\Delta) = H(f+f_1+f_2+f_3) \tag{8}$$

und indem man die vier Gleichungen (7) mit 2 multiplicirt und von der (8) der Reihe nach subtrahirt, schliesslich die Resultate durch 4 dividirt

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta = \frac{1}{4} H(f_1+f_2+f_3-f), \\ \Delta_1 = \frac{1}{4} H(f+f_2+f_3-f_1), \\ \Delta_2 = \frac{1}{4} H(f+f_1+f_3-f_2), \\ \Delta_3 = \frac{1}{4} H(f+f_1+f_2-f_3), \end{array}\right\} \tag{9}$$

wodurch Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, deren trigonometrische Bedeutung in den Gleichungen (4) festgesetzt ist, durch die Auflösungsfunctionen f, f_1, f_2, f_3 und H dargestellt werden.

Addirt man zur ersten Gleichung in (7) der Reihe nach die zweite, dritte, vierte und subtrahirt von der Summe, die Summe der beiden andern, so zeigt sich nach Abkürzung mit 2:

$$\left.\begin{array}{l} 2(\Delta+\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1) = H(f+f_1-f_2-f_3), \\ 2(\Delta+\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2) = H(f+f_2-f_1-f_3), \\ 2(\Delta+\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3) = H(f+f_3-f_1-f_2). \end{array}\right\} \tag{10}$$

Die ersten Theile in den vier Gleichungen (8) und (10) sind aber nach der in (4) eingeführten Bedeutung der Δ der Reihe nach gleich

$$2\sin\frac{1}{2}(a+b+c),\qquad 2\sin\frac{1}{2}(b+c-a),$$

$$2\sin\frac{1}{2}(a+c-b),\qquad 2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)$$

und man hat daher

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\frac{1}{2}(a+b+c) &= \frac{1}{2}H(f+f_1+f_2+f_3),\\
\sin\frac{1}{2}(b+c-a) &= \frac{1}{2}H(f+f_1-f_2-f_3),\\
\sin\frac{1}{2}(a+c-b) &= \frac{1}{2}H(f+f_2-f_1-f_3),\\
\sin\frac{1}{2}(a+b-c) &= \frac{1}{2}H(f+f_3-f_1-f_2).
\end{aligned}\right.$$

Die Multiplication dieser vier Gleichungen gibt, wenn man mit Rücksicht auf die in (2) gegebene Bedeutung von H abkürzt und H aus dem Resultat bestimmt:

$$H=\frac{4}{\sqrt{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-f_1-f_2)}},$$

worin, da H immer positiv auch die im Nenner stehende Wurzelgrösse mit positivem Vorzeichen zu nehmen ist.

Da nunmehr H durch die Auflösungsfunctionen dargestellt ist, so geben die Gleichungen (1)

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}
\sin a &= \frac{8}{\sin h_1\sqrt{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-f_1-f_2)}},\\
\sin b &= \frac{8}{\sin h_2\sqrt{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-f_1-f_2)}},\\
\sin c &= \frac{8}{\sin h_3\sqrt{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-f_1-f_2)}}.
\end{aligned}\right.$$

Bezeichnen A, B, C die drei Winkel des sphärischen Dreieckes, so wie sie den Seiten a, b, c der Ordnung nach gegenüberliegen, so ist

$$\sin A = \frac{2H}{\sin b \sin c}, \quad \sin B = \frac{2H}{\sin a \sin c}, \quad \sin C = \frac{2H}{\sin a \sin b}$$

und die Substitution der Werthe von H, $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ aus (12) und (13) gibt nach gehöriger Reduction:

$$\left.\begin{aligned}
\sin A &= \frac{1}{8} \sin h_2 \sin h_3 \sqrt{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-f_1-f_2)}, \\
\sin B &= \frac{1}{8} \sin h_1 \sin h_3 \sqrt{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-f_1-f_2)}, \\
\sin C &= \frac{1}{8} \sin h_1 \sin h_2 \sqrt{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-f_1-f_2)}.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Aus diesem und dem System (13) erhält man auch durch Multiplication

$$\sin a \sin A = \frac{\sin h_2 \sin h_3}{\sin h_1}, \quad \sin b \sin B = \frac{\sin h_1 \sin h_3}{\sin h_2}, \quad \sin c \sin C = \frac{\sin h_1 \sin h_2}{\sin h_3}. \quad (15)$$

Um den Winkel A aus den drei Seiten zu bestimmen, lehrt man in den Elementen auch folgende Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+c+b) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}}$$

und ähnlich gebaute Formeln gelten für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} B$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C$. Substituirt man in denselben für die Sinusfactoren ihre Werthe aus (11) und kürzt ab, so gelangt man zur Berechnung der drei Winkel A, B, C aus den drei Höhen h_1, h_2, h_3 zu folgendem System von Gleichungen

$$(16)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)}{(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-f_1-f_2)}}, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(f+f_1-f_2-f_3)(f+f_3-f_1-f_2)}{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_2-f_1-f_3)}}, \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(f+f_1-f_2-f_3)(f+f_2-f_1-f_3)}{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_3-f_1-f_2)}}. \end{cases}$$

Zur Berechnung des sphärischen Excesses ε aus den drei Seiten a, b, c hat man die bekannte Formel (S. Note I am Ende)

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{H}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

und man überzeugt sich leicht, dass im Sinne unserer Bezeichnung in (4) identisch

$$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{\Delta}},$$

so dass jetzt

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{1}{2}H\sqrt{\frac{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{\Delta}}.$$

Werden in diesem Ausdruck die Δ durch ihre Werthe aus (9) ersetzt, so folgt nach einfacher Reduction

$$(17)\quad \sin\frac{1}{2}\varepsilon=2\sqrt{-\frac{f_1+f_2+f_3-f}{(f+f_2+f_3-f_1)(f+f_1+f_3-f_2)(f+f_1+f_2-f_3)}}.$$

Die Radien ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3 der vier Berührungskreise eines sphärischen Dreieckes und die Radien r, r_1, r_2, r_3, der dem Hauptdreiecke und seinen drei Seitendreiecken umschriebenen Kreise, werden aus den drei Seiten desselben durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(18)\quad \begin{cases} \operatorname{ctg}\rho=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{H}, & \operatorname{ctg}\rho_2=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{H}, \\ \operatorname{ctg}\rho_1=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{H}, & \operatorname{ctg}\rho_3=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{H}, \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg} r &= \frac{2\Delta}{H},\\ \operatorname{tg} r_1 &= \frac{2\Delta_1}{H},\\ \operatorname{tg} r_2 &= \frac{2\Delta_2}{H}.\\ \operatorname{tg} r_3 &= \frac{2\Delta_3}{H}.\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

(S. meine Abhandlung: „Das sphärische Dreieck dargestellt in seinen Beziehungen zum Kreis," in **Grunert's** Archiv Thl. XXIX, p. 491 u. 508.) Mit Rücksicht auf (11) und (9) geben dieselben unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctg} \rho &= \tfrac{1}{2}(f+f_1+f_2+f_3),\\ \operatorname{ctg} \rho_1 &= \tfrac{1}{2}(f+f_1-f_2-f_3),\\ \operatorname{ctg} \rho_2 &= \tfrac{1}{2}(f+f_2-f_1-f_3),\\ \operatorname{ctg} \rho_3 &= \tfrac{1}{2}(f+f_3-f_1-f_2),\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg} r &= \tfrac{1}{2}(f_1+f_2+f_3+f),\\ \operatorname{tg} r_1 &= \tfrac{1}{2}(f+f_2+f_3-f_1),\\ \operatorname{tg} r_2 &= \tfrac{1}{2}(f+f_1+f_3-f_2),\\ \operatorname{tg} r_3 &= \tfrac{1}{2}(f+f_1+f_2-f_3).\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Die vorstehenden Systeme von Gleichungen, aus welchen auch mit Leichtigkeit

$$\left.\begin{aligned}f &= \operatorname{tg} r + \operatorname{ctg} \rho,\\ f_1 &= \operatorname{tg} r - \operatorname{ctg} \rho_1,\\ f_2 &= \operatorname{tg} r - \operatorname{ctg} \rho_2,\\ f_3 &= \operatorname{tg} r - \operatorname{ctg} \rho_3\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

gefolgert werden kann, interpretiren die geometrische Bedeutung der Auflösungsfunctionen f, f_1, f_2, f_3 und ihrer Gebilde.

Überblicken wir den Gang der vorstehenden Entwicklungen, so wird vor allem ersichtlich, dass die Auflösung unseres Problems (aus den drei Höhen eines sphärischen Dreieckes seine Seiten und Winkel zu finden), auf den Gleichungen (5) beruht, welche als goniometrische Transformationsformeln für alle Werthe der in ihnen enthaltenen Bogen a, b, c, giltig sind. Indem wir aber für sin a, sin b, sin c die Werthe aus (1) substituiren, gelangen wir zum System (7), welches sich jetzt nothwendig auf dasjenige sphärische Dreieck bezieht, dessen Seiten $a, b. c$ und dessen zugehörige Höhen h_1, h_2, h_3, sind. Die früher identischen Gleichungen haben sich in Bestimmungsgleichungen verwandelt.

In der That, da die Δ nur a, b, c enthalten, so enthalten die vier Gleichungen (7) auch nur vier Unbekannte, nämlich a, b, c und H. Wir haben aus ihnen die drei Seiten eliminirt und gelangen in (1) zum Werth von H. Dieser Werth in die Ausgangsgleichungen (1) substituirt, führte uns zu den Ausdrücken (13), welche direct die Sinus der Seiten durch die Sinus der Höhen bestimmen. Die Gleichungen (14), (16), (17), (20) und (21) geben noch die Winkel A, B, C, den sphärischen Excess ε, die Radien $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ der eingeschriebenen, r, r_1, r_2, r_3 der umschriebenen Kreise, direct durch die drei Höhen h_1, h_2, h_3, indem für die Auflösungsfunctionen f, f_1, f_2, f_3 die Ausdrücke (6) substituirt werden. Hiermit ist das vorgelegte Problem in seinem wesentlichen Theile gelöset. (S. Note II am Ende.)

Mit Hilfe der Gleichungen (4) findet man durch Substitution, dass identisch

$$\sin^2\frac{1}{2}a=\frac{\Delta\Delta_1}{\Delta\Delta_1+\Delta_2\Delta_3},\quad \cos^2\frac{1}{2}a=\frac{\Delta_2\Delta_3}{\Delta\Delta_1+\Delta_2\Delta_3},\quad \cos a=\frac{\Delta_2\Delta_3-\Delta\Delta_1}{\Delta_2\Delta_3+\Delta\Delta_1}$$

$$\sin^2\frac{1}{2}b=\frac{\Delta\Delta_2}{\Delta\Delta_2+\Delta_1\Delta_3},\quad \cos^2\frac{1}{2}b=\frac{\Delta_1\Delta_3}{\Delta\Delta_2+\Delta_1\Delta_3},\quad \cos b=\frac{\Delta_1\Delta_3-\Delta\Delta_2}{\Delta_1\Delta_3+\Delta\Delta_2}$$

$$\sin^2\frac{1}{2}c=\frac{\Delta\Delta_3}{\Delta\Delta_3+\Delta_1\Delta_2},\quad \cos^2\frac{1}{2}c=\frac{\Delta_1\Delta_2}{\Delta\Delta_3+\Delta_1\Delta_2},\quad \cos c=\frac{\Delta_1\Delta_2-\Delta\Delta_3}{\Delta_1\Delta_2+\Delta\Delta_3}$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}a=\frac{\Delta\Delta_1}{\Delta_2\Delta_3},\quad \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}b=\frac{\Delta\Delta_2}{\Delta_1\Delta_3},\quad \mathrm{tg}^2\frac{1}{2}c=\frac{\Delta\Delta_3}{\Delta_1\Delta_2}$$

und durch Einführung der Werthe von $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ aus (9) ergeben sich noch die folgenden vier Systeme von Gleichungen (23), (24),

(25), (26) zur Bestimmung der Seiten eines sphärischen Dreieckes aus seinen drei Höhen.

Bezeichnet man die Summe der vier f mit $2g$, so ist nach (9):

$$\Delta_2\Delta_3 + \Delta\Delta_1 = \frac{1}{4} H^2 \{(g-f_2)(g-f_3) + (g-f)(g-f_1)\}$$

$$\Delta_2\Delta_3 - \Delta\Delta_1 = \frac{1}{4} H^2 \{(g-f_2)(g-f_3) - (g-f)(g-f_1)\}$$

oder nach Ausführung der Entwickelung und Reduction

$$\Delta_2\Delta_3 + \Delta\Delta_1 = \frac{1}{8} H^2 (f^2+f_1^2-f_2^2-f_3^2),$$

$$\Delta_2\Delta_3 - \Delta\Delta_1 = \frac{1}{4} H^2 (ff_1+f_2f_3).$$

Indem man die Quadrate der f in der ersten Gleichung durch die Werthe aus (6) ersetzt, zeigt sich

$$f^2-f_2^2 = \left(\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_2} + \frac{1}{\sin h_3}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_3} - \frac{1}{\sin h_2}\right)^2$$
$$= \frac{4}{\sin h_2}\left(\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_3}\right)$$

$$f_1^2-f_3^2 = \left(\frac{1}{\sin h_2} + \frac{1}{\sin h_3} + \frac{1}{\sin h_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sin h_1} + \frac{1}{\sin h_2} - \frac{1}{\sin h_3}\right)^2$$
$$= \frac{4}{\sin h_2}\left(\frac{1}{\sin h_3} - \frac{1}{\sin h_1}\right)$$

also

$$f^2+f_1^2-f_2^2-f_3^2 = \frac{8}{\sin h_2 \sin h_3}$$

und

$$\Delta_2\Delta_3 + \Delta\Delta_1 = \frac{H^2}{\sin h_2 \sin h_3},$$

ebenso wird

$$\Delta_1\Delta_3+\Delta\Delta_2 = \frac{H^2}{\sin h_1 \sin h_3}, \quad \Delta_1\Delta_3-\Delta\Delta_2 = \frac{1}{4} H^2 (ff_2+f_1f_3),$$

$$\Delta_1\Delta_2+\Delta\Delta_3 = \frac{H^2}{\sin h_1 \sin h_2}, \quad \Delta_1\Delta_2-\Delta\Delta_3 = \frac{1}{4} H^2 (ff_3+f_1f_2).$$

mithin

$$(23)\quad\begin{cases}\sin\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}\sqrt{-\sin h_2\sin h_3\,(f_1+f_2+f_3-f)\,(f+f_2+f_3-f_1)},\\ \sin\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}\sqrt{-\sin h_1\sin h_3\,(f_1+f_2+f_3-f)\,(f+f_1+f_3-f_2)},\\ \sin\frac{1}{2}c=\frac{1}{4}\sqrt{-\sin h_1\sin h_2\,(f_1+f_2+f_3-f)\,(f+f_1+f_2-f_3)},\end{cases}$$

$$(24)\quad\begin{cases}\sin\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}\sqrt{\sin h_2\sin h_3\,(f+f_1+f_3-f_2)\,(f+f_1+f_2-f_3)},\\ \sin\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}\sqrt{\sin h_1\sin h_3\,(f+f_2+f_3-f_1)\,(f+f_1+f_2-f_3)},\\ \sin\frac{1}{2}c=\frac{1}{4}\sqrt{\sin h_1\sin h_2\,(f+f_2+f_3-f_1)\,(f+f_1+f_3-f_2)},\end{cases}$$

$$(25)\quad\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{1}{2}a=\sqrt{-\frac{(f_1+f_2+f_3-f)\,(f+f_2+f_3-f_1)}{(f+f_1+f_3-f_2)\,(f+f_1+f_2-f_3)}},\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}b=\sqrt{-\frac{(f_1+f_2+f_3-f)\,(f+f_1+f_2-f_3)}{(f+f_2+f_3-f_1)\,(f+f_1+f_3-f_2)}},\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}c=\sqrt{-\frac{(f+f_1+f_2-f_3)\,(f+f_1+f_2-f_3)}{(f+f_2+f_3-f_1)\,(f+f_1+f_3-f_2)}},\end{cases}$$

$$(26)\quad\begin{cases}\cos a=\frac{1}{4}\sin h_2\sin h_3\,(ff_1+f_2f_3),\\ \cos b=\frac{1}{4}\sin h_1\sin h_3\,(ff_2+f_1f_3),\\ \cos c=\frac{1}{4}\sin h_1\sin h_2\,(ff_3+f_1f_2).\end{cases}$$

Werden die beiden Ausdrücke

$$u=\frac{1}{2}\{\cos a-\cos(b-c)\},$$

$$v=\frac{1}{2}\{\cos a-\cos(b+e)\},$$

addirt und subtrahirt, so erhält man

$$u+v=\cos a-\cos b\cos c,$$
$$u-v=\sin b\sin c$$

und da für jedes sphärische Dreieck bekanntlich

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

so ist auch

$$\cos A=\frac{u+v}{u-v}.$$

Verwandelt man die Differenzen der Cosinus in u und v nach der bekannten goniometrischen Formel

$$\cos x-\cos y=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$$

in Productformen, so wird

$$\cos A=$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)-\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)+\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}$$

und wenn man hierin für die Sinus der vier Seitenfunctionen die Ausdrücke in (11) substituirt und abkürzt

$$\cos A=$$
$$\frac{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)+(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-f_1-f_2)}{(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)-(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-{}_1f-f_2)}.$$

Nun ist

$$(f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)=(f+f_1)^2-(f_2+f_3)^2$$
$$=(f^2+f_1^2-f_2^2-f_3^2)+2(ff_1-f_2f_3),$$
$$(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-f_1-f_2)=(f-f_1)^2-(f_2-f_3)^2$$
$$=(f^2+f_1^2-f_2^2-f_3^2)-2(ff_1-f_2f^2),$$

mithin ist der Zähler des vorstehenden Bruches für cos A gleich $4(ff_1-f_1f_3)$ und der Nenner gleich

$$2(f^2+f_1^2-f_2^2-f_3^2)=\frac{16}{\sin h_2\sin h_3},$$

endlich durch Substitution

$$(27)\quad \begin{cases} \cos A = \frac{1}{4} \sin h_2 \sin h_3 \, (ff_1 - f_2 f_3). \text{ und ebenso} \\ \cos B = \frac{1}{4} \sin h_1 \sin h_3 \, (ff_2 - f_1 f_3). \\ \cos C = \frac{1}{4} \sin h_1 \sin h_2 \, (ff_3 - f_1 f_2). \end{cases}$$

(S. Note III am Ende.)

Aus den Gleichungen (23) und (24) für Sinus und Cosinus der halben Seiten, lassen sich auch Formeln für die Sinus der ganzen Seiten herstellen, indem $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x$, aber die resultirenden Ausdrücke sind von jenen (13) verschieden. Es wird nämlich jetzt

$$(28)\quad \begin{cases} \sin a = \frac{1}{8} \sin h_2 \, \sin h_3 \times \\ \sqrt{-(f+f_1+f_2-f_3)(f+f_2+f_3-f_1)(f+f_1+f_3-f_2)(f+f_1+f_2-f_3)}, \\ \sin b = \frac{1}{8} \sin h_1 \, \sin h_3 \times \\ \sqrt{-(f_1+f_2+f_3-f)(f+f_2+f_3-f_1)(f+f_1+f_3-f_2)(f+f_1+f_2-f_3)}, \\ \sin c = \frac{1}{8} \sin h_1 \, \sin h_2 \times \\ \sqrt{-(f_1+f_2+f_3-f)(f+f_2+f_3-f_1)(f+f_1+{}_3f-f_2)(f+f_1+f_2-f_3)} \end{cases}$$

Stellt man diese mit den Werthen unter (13) zusammen, so erhält man folgende Transformationsgleichung zwischen den Auflösungsfunctionen f, f_1, f_2, f_3:

$$(29)\quad \sqrt{\begin{matrix} -(f_1+f_2+f_3-f)(f+f_2+f_3-f_1)(f+f_1+f_3-f_2)(f+f_1+f_2-f_3) \\ \times (f+f_1+f_2+f_3)(f+f_1-f_2-f_3)(f+f_2-f_1-f_3)(f+f_3-f_1-f_2) \end{matrix}} \\ = \frac{64}{\sin h_1 \sin h_2 \sin h_3},$$

welche bei der in (6) gegebenen Bedeutung der f, in Bezug auf die Höhen h_1, h_2, h_3 als eine identische Gleichung zu betrachten ist, was durch Ausführung der hier angedeuteten Multiplication auch direct nachgewiesen werden kann. Solche Transformationsgleichungen zwischen den Auflösungsfunctionen gibt es noch mehrere.

Aus den Gleichungen (6), mit welchen die Auflösungsfunctionen f in unsere Rechnung eingeführt werden, ist zu ersehen, dass diese f nur dann reel werden, wenn die Differenzen unter dem Wurzelzeichen positiv sind. Bei der ersten in f ist diese Bedingung augenscheinlich immer erfüllt. Zu drei gegebenen Höhen h_1, h_2, h_3, wird also nur dann ein Dreieck gefunden werden können, wenn

$$val.abs.\left(\frac{1}{\sin h_2}+\frac{1}{\sin h_3}-\frac{1}{\sin h_1}\right)>1,$$

bei jeder Vertauschung der h stattfindet. Diese Bedingung der Möglichkeit der Auflösung, wollen wir im Folgenden als erfüllt voraussetzen.

Wenn wir nun bedenken, dass die reelen Auflösungsfunctionen f_1, f_2, f_3 doppeltes Vorzeichen haben, während f immer positiv ist, den $Hf=\Delta+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$ ist die Summe von vier immer positiven Grössen, so werden die vorhergehenden Formeln so viele Auflösungen geben als die Reihe

$$\pm f_1,\ \pm f_2,\ \pm f_3,$$

verschiedene Zeichenstellungen zulässt, nämlich acht:

$$\begin{array}{l}
+f_1,\ +f_2,\ +f_3,\\
-f_1,\ -f_2,\ +f_3,\\
-f_1,\ +f_2,\ -f_3,\\
+f_1,\ -f_2,\ -f_3,\\
-f_1,\ +f_2,\ +f_3,\\
+f_1,\ -f_2,\ +f_3,\\
+f_1,\ +f_2,\ -f_3,\\
-f_1,\ -f_2,\ -f_3,
\end{array}$$

und die einzelnen Auflösungen werden erhalten, wenn man in den vorhergehenden Formeln statt f_1, f_2, f_3, der Reihe nach diese Zeichenstellungen substituirt. Um die den einzelnen Auflösungen entsprechenden Dreiecke von einander trennen zu können, eignen sich besonders die Cosinusformeln (26) und (27), da der Cosinus vom ersten zum zweiten Quadranten sein Zeichen ändert und in ihnen wollen wir nun die Vertauschung der Zeichen vornehmen.

Nimmt man nach der ersten Zeichenstellung die Reihe

$$\cos a,\quad \cos b,\quad \cos c,\quad \cos A,\quad \cos B,\quad \cos C,$$

so verwandeln sich die ihnen entsprechenden Ausdrücke für die übrigen sieben Zeichenstellungen, wie man aus dem Anblick der Formeln sogleich erkennt, in die folgenden:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
-\cos a, & -\cos b, & \cos c, & -\cos A, & -\cos B, & \cos C,\\
-\cos a, & \cos b, & -\cos c, & -\cos A, & \cos B, & -\cos C,\\
\cos a, & -\cos b, & -\cos c. & \cos A, & -\cos B, & -\cos C,\\
-\cos A, & \cos B, & \cos C, & -\cos a, & \cos b, & \cos c,\\
\cos A, & -\cos B, & \cos C, & \cos a, & -\cos b, & \cos c,\\
\cos A, & \cos B, & -\cos C, & \cos a, & \cos b, & -\cos c,\\
-\cos A, & -\cos B, & -\cos C, & -\cos a, & -\cos b, & -\cos c,
\end{array}
$$

und die acht Dreiecke sind:

$$
\begin{array}{lrrrrrr}
1. & a, & b, & c, & A, & B, & C,\\
2. & 180^\circ-a, & 180^\circ-b, & c, & 180^\circ-A, & 180^\circ-B, & C,\\
3. & 180^\circ-a, & b, & 180^\circ-c, & 180^\circ-A, & B, & 180^\circ-C,\\
4. & a, & 180^\circ-b, & 180^\circ-c, & A, & 180^\circ-B, & 180^\circ-C,\\
5. & 180^\circ-A, & B, & C, & 180^\circ-a, & b, & c,\\
6. & A, & 180^\circ-B, & C, & a, & 180^\circ-b, & c,\\
7. & A, & B, & 180^\circ-C, & a, & b, & 180^\circ-c,\\
8. & 180^\circ-A, & 180^\circ-B, & 180^\circ-C, & 180^\circ-a, & 180^\circ-b, & 180^\circ-c.
\end{array}
$$

Heisst man das erste Dreieck das Hauptdreieck, so sieht man sogleich, dass 2, 3, 4 die drei Seitendreiecke sind, 8 ist das Polardreieck und 5, 6, 7 sind die Polaren der Seitendreiecke. Alle diese Dreiecke haben dieselben drei Höhen h_1. h_2, h_3.

Beispiel.

Man soll die Seiten und Winkel desjenigen sphärischen Dreieckes bestimmen, dessen Höhen sind:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= 67^\circ 20' 45'',\\
h_2 &= 71\ \ 10\ \ 12,\\
h_3 &= 62\ \ 51\ \ 39.
\end{aligned}
$$

Mittelst dieser Angaben findet man zunächst

$$
\begin{aligned}
\lg \sin h_1 &= 9\cdot 9651295,\\
\lg \sin h_2 &= 9\cdot 9761116,\\
\lg \sin h_3 &= 9\cdot 9493418.
\end{aligned}
$$

und hiermit nach den Formeln (6):

$$\lg f = 0\cdot4923276,$$
$$\lg f_1 = 9\cdot6533444,$$
$$\lg f_2 = 9\cdot7554501,$$
$$\lg f_3 = 9\cdot2601107,$$

und es wird

$$\lg (ff_1+f_2f_3) = 0\cdot1767217, \quad \lg (ff_1-f_2f_3) = 0\cdot1122395,$$
$$\lg (ff_2+f_1f_3) = 0\cdot2674382, \quad \lg (ff_2-f_1f_3) = 0\cdot2271849,$$
$$\lg (ff_3+f_1f_2) = 9\cdot9147868, \quad \lg (ff_3-f_1f_2) = 9\cdot4902118,$$

wodurch man nach den Formeln (26) und (27), welche zum praktischen Gebrauch die bequemsten sind, erhält:

$$\lg\cos a = 9\cdot5001151, \quad \lg\cos A = 9\cdot4356329,$$
$$\lg\cos b = 9\cdot5798495, \quad \lg\cos B = 9\cdot5395961,$$
$$\lg\cos c = 9\cdot2539671, \quad \lg\cos C = 8\cdot8293929.$$

Diese Logarithmen geben unter Berücksichtigung der vorhergehenden Discussion als Auflösung folgende acht Dreiecke:

	a	*b*	*c*
1.	71° 33' 36"0	67° 39' 46"0	79°39' "42·1
2.	108 26 24·0	112 20 14·0	79 39 42·1
3.	108 26 24·0	67 39 46·0	100 20 17·9
4.	71 33 36·0	112 20 14·0	100 20 17·9
5.	105 49 23·0	69 43 54·6	86 7 43·7
6.	74 10 37·0	110 16 5·4	86 7 43·7
7.	74 10 37·0	69 43 54·6	93 52 16·3
8.	105 49 23·0	110 16 5·4	93 52 16·3
	A	*B*	*C*
1.	74° 10' 37"0	69° 43' 54"6	86° 7' 43"7
2.	105 49 23·0	110 16 5·4	86 7 43·7
3.	105 49 23·0	69 43 54·6	93 52 16·3
4.	74 10 37·0	110 16 5·4	93 52 16·3
5.	108 26 24·0	67 39 46·0	79 39 42·1
6.	71 33 36·0	112 20 14·0	79 39 42·1
7.	71 33 36·0	67 39 46·0	100 20 17·9
8.	108 26 24·0	112 20 14·0	100 20 17·9

Note I.

Bestimmung des sphärischen Excesses aus den drei Seiten.

Zur Bestimmung der drei Seiten eines sphärischen Dreieckes aus den drei Winkeln desselben hat man in der sphärischen Trigonometrie folgende Formeln:

$$\sin\frac{1}{2}a=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}},$$

$$\sin\frac{1}{2}b=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-B)}{\sin A\sin C}},$$

$$\sin\frac{1}{2}c=\sqrt{-\frac{\cos S\cos(S-C)}{\sin B\sin A}},$$

wobei $S=\frac{1}{2}(A+B+C)$, auch ist

$$\sin a=\frac{2\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{\sin B\sin C}$$

durch Multiplication der drei ersten Gleichungen erhält man:

$$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c$$

$$=-\frac{\cos S}{\sin A\sin B\sin C}\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}$$

$$=-\frac{\cos S\sin a}{2\sin A},$$

da aber bekanntlich

$$\sin A=\frac{2H}{\sin b\sin c},$$

so wird

$$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c=-\cos S\frac{\sin a\sin b\sin c}{4H}.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung $-\cos S=\sin\frac{1}{2}\varepsilon$, zerlegt $\sin a\sin b\sin c$ nach der goniometrischen Formel $\sin x=2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x$ und kürzt ab, so gelangt man zur Gleichung

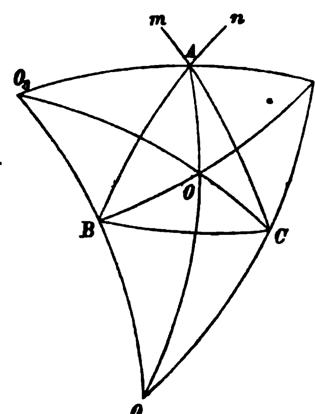
$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{H}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

ein Ausdruck für den Sinus des halben sphärischen Excesses, welcher sonst mit Hilfe der Gaus'schen Gleichungen auf ungleich weitläufigerem Wege abgeleitet wird.

Note II.

Zwei geometrische Sätze von den drei Höhen eines sphärischen Dreieckes.

Mit Hilfe der Lehre von den symmetrischen Dreiecken wird mit Leichtigkeit bewiesen, dass die drei winkelhalbirenden Hauptbogen eines sphärischen Dreieckes sich in einem Punkt durchschneiden und zwar im Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.



Ist nun O (Fig. 1) der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kreises und legt man die Hauptbogen OA, OB, OC, so liegen auf diesen winkelhalbirenden Transversalen auch die Mittelpunkte der äussern Berührungskreise, denn jeder Punkt eines solchen Hauptbogens ist von den Schenkeln des durch ihn halbirten Winkels gleichweit entfernt. Seien O_1, O_2, O_3 diese Mittelpunkte, so wie sie der Ordnung nach den Ecken A, B, C gegenüber liegen. Legen wir durch A und O_3 und ebenso durch A und O_2 Hauptbogen AO_3 und AO_2, so müssen diese die Winkel BAm und CAn halbiren, denn O_3 und O_2 sind die Mittelpunkte der den Seitendreiecken an AB und AC eingeschriebenen Kreise. Es ist also

$$\sphericalangle mAO_3 = \sphericalangle BAO_3,\quad \sphericalangle nAO_2 = \sphericalangle CAO_2,$$

da aber die Winkel mAB und nAC Scheitelwinkel sind, so geht daraus hervor, dass AO_3 und AO_2 in demselben Hauptkreis liegen oder, dass der durch die Mittelpunkte O_3, O_2 gelegte Hauptbogen O_3O_2 auch durch die Ecke A geht.

Auf dieselbe Art wird gezeigt, dass die Hauptbogen O_3O_1 und O_2O_1 durch die Ecken B und C gehen.

Nach dem Obigen ist $\sphericalangle BAO_1 = \frac{1}{2} A$ und $\sphericalangle BAO_3 = \frac{1}{2}(180^\circ - A)$, mithin die Summe $\sphericalangle O_3AO_1 = 90^\circ$ oder O_1A steht senkrecht auf O_3O_2. Ebenso steht O_2B senkrecht auf O_1O_3 und O_3C senkrecht auf O_1O_2.

Betrachtet man also das Dreieck $O_1O_2O_3$, so sind die Höhen desselben

$$O_1A,\ O_2B,\ O_3C$$

und O ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt. Für das Dreieck OO_1O_2 sind

$$O_2A,\ O_1B,\ OC$$

die Höhen und O_3 ist ihr Durchschnitt. Das Dreieck OO_1O_3 hat die Höhen

$$O_3A,\ OB,\ O_1C,$$

mit dem Durchschnitt in O_2. Endlich das Dreieck OO_2O_3 hat zu Höhen

$$OA,\ O_3B,\ O_2C$$

mit dem Durchschnitt in O_1.

Fasst man diese Ergebnisse zusammen, so gelangt man zu folgendem

I. Lehrsatz.

Die drei Höhen eines sphärischen Dreieckes schneiden sich in einem Punkt und dieser ist entweder der Mittelpunkt des dem Fusspunktdreieck eingeschriebenen Kreises, oder der Mittelpunkt eines äussern Berührungskreises.

Anmerkung. Dr. Gudermann hat in seiner niederen Sphärik p. 47 für denselben Satz einen indirecten Beweis gegeben. Doch ist seine Fassung des Satzes nicht für alle Dreiecksformen richtig. Ist das Dreieck $O_1O_2O_3$ gleichseitig und rechtwinkelig, so gibt es unendlich viele Fusspunktdreiecke. In Theil XXIX von Grunert's Archiv p. 489 habe ich gezeigt, dass der Umfang jedes dieser Dreiecke constant gleich 180° ist.

Schneidet man von den Fusspunkten der Höhen auf den Seiten des Dreieckes Bogen von 90° Länge ab, so ist jeder dieser Punkte offenbar von allen Punkten der zugehörigen Höhe um 90° entfernt. Diese Punkte sind also die Pole der drei Höhen und sie stehen hiernach alle vom gemeinschaftlichen Durchschnitt der Höhen um 90° ab. Sie liegen also in einem grössten Kreis, dessen Pol der Höhendurchschnitt ist. Verbindet man die Pole der Höhen je mit der zugehörigen Ecke des Dreieckes durch einen Hauptbogen, so misst auch dieser 90° und hieraus ergibt sich folgender

II. Lehrsatz.

Zieht man von den drei Ecken eines sphärischen Dreieckes zu den Gegenseiten Bogen von 90° Länge, so liegen die Endpunkte derselben in einem Hauptkreis, dessen Pol der Durchschnitt der drei Höhen ist.

Die Winkel, welche diese Bogen mit den Gegenseiten bilden, haben die drei Höhen zum Maasse, da ihre Scheitel die Pole der Höhen sind. Die Aufgabe, mit deren Lösung wir uns im Vorhergehenden beschäftiget haben, kann also auch so ausgesprochen werden:

Von den drei Ecken eines sphärischen Dreieckes sind zu den Gegenseiten Hauptbogen von 90° Länge gezogen und es sind die Winkel h_1, h_2, h_3 bekannt, welche dieselben mit den Gegenseiten einschliessen. Man soll das Dreieck bestimmen.

Note III.

Übergang auf das ebene Dreieck.

Die im Text entwickelten Formeln beziehen sich selbstverständlich auf den Kugelradius 1. Bezeichnen hingegen h_1. h_2, h_3 die drei sphärischen Höhen, a, b, c die drei Seiten eines Dreieckes auf der Kugel vom Radius r, so sind

$$\frac{h_1}{r},\ \frac{h_2}{r},\ \frac{h_3}{r},\ \frac{a}{r},\ \frac{b}{r},\ \frac{c}{r},$$

die entsprechenden Grössen für den Radius 1. Werden diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen statt h_1, h_2, h_3 a, b, c eingesetzt, während die Winkel ungeändert bleiben, so beziehen sich die neuen Formeln auf das Dreieck zum Kugelradius r.

Alsdann wird z. B.

$$f=\sqrt{\left(\frac{1}{\sin\frac{h_1}{r}}+\frac{1}{\sin\frac{h_2}{r}}+\frac{1}{\sin\frac{h_3}{r}}\right)^2-1}$$

und ähnlich verwandeln sich f_1, f_2, f_3. Wird nun der Kugelradius unendlich gross, während h_1, h_2, h_3 etc. ihre endliche Grösse beibehalten, so verwandelt sich das sphärische Dreieck in ein ebenes, die Sinus werden den Bogen gleich und man hat

$$f=r\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)^2-\frac{1}{r^2}},$$

ähnlich f_1, f_2, f_3. Die erste Gleichung in (27) verwandelt sich hierdurch in

$$\cos A=\frac{1}{4}h_2h_3\times$$

$$\left\{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)-\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\right\}$$

oder wenn man im Innern der Klammer entwickelt und reducirt, da das erste Glied

$$=\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)^2-\frac{1}{h_1^2},$$

das zweite Glied

$$=\frac{1}{h_1^2}-\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)^2,$$

$$(d)\quad\begin{cases}\cos A=\frac{1}{2}h_2h_3\left(\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)\text{ und ebenso}\\[2mm] \cos B=\frac{1}{2}h_1h_3\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_3^2}-\frac{1}{h_2^2}\right),\\[2mm] \cos C=\frac{1}{2}h_1h_2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}-\frac{1}{h_3^2}\right).\end{cases}$$

Hat man auf diese Art die drei Winkel des Dreieckes aus den Höhen gefunden, so geben die Gleichungen (15):

$$a = \frac{h_2 h_3}{h_1 . \sin A},$$

$$b = \frac{h_1 h_3}{h_2 \sin . B},$$

$$c = \frac{h_1 h_2}{h_3 \sin . C},$$

oder da nach den Gleichungen (1) für das ebene Dreieck $ah_1 = bh_2 = ch_3$ und auch

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

so wird

$$(e) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{h_2}{\sin . C} = \frac{h_3}{\sin . B}, \\ b &= \frac{h_1}{\sin C} = \frac{h_3}{\sin A}, \\ c &= \frac{h_1}{\sin B} = \frac{h_2}{\sin A}, \end{aligned} \right.$$

und mit diesen sechs Gleichungen (d) und (e) bestimmt man aus den drei Höhen eines ebenen Dreieckes seine Winkel und Seiten.

Beitrag zu den Berechnungsmethoden der Zwillingskrystalle.

Von Dr. Albrecht Schrauf,
Universitätsdocent und Custosadjunct am k. k. Hof-Mineralien-Cabinete.

(Mit 1 Tafel.)

§. 1. Zu jenen Problemen, welche trotz ihrer Wichtigkeit bisher in der Krystallographie vernachlässigt, ja beinahe vollständig unberücksichtigt geblieben sind, ist auch das allgemeine Problem der Zwillingsberechnung zu zählen, für welches in einzelnen speciellen Fällen nur Naumann (Krystallographie 1830) Berechnungsformeln mittheilt.

In nachfolgenden Zeilen sind die Gleichungen angegeben, welche die Ermittlung aller mathematischen Verhältnisse der Zwillingskrystalle gewähren.

Das allgemeine Problem der Zwillingsberechnung besteht in der Aufgabe „die Kenntniss der Zwillingsfläche und den morphologischen Elementen der Species genüge, um die Winkel jeder Fläche des Indiv. (II) gegen jede Fläche des Indiv. (I) zu berechnen" und erfordert hierzu zwei vorhergehende Bestimmungen. 1. Die Ermittlung der Lage der Krystallaxen $X'Y'Z'$ von (II) gegen die Krystallaxen XYZ von (I) und Identificirung der ersteren mit Normalen auf Flächen von (I). 2. Die Transformation der Flächenindices von Ind. (II) in solche Zahlen, welche Functionen der Krystallaxen XYZ sind.

Zur Beantwortung dieser Fragen sind nebst den allgemeinen krystallographischen Relationen nur zu benützen die Gesetze der Zwillingsbildung: „dass die gleichnamigen Pole beider Individuen in einer Zone mit der Zwillingsaxe liegen und letztere deren Winkel halbirt."

§. 2. Zur Ermittlung der Lage der Krystallaxen des Indiv. II dient die Figur 1 und 2, in welchen XYZ die Axen des Indiv. (I); $X'Y'Z'$ die des Indiv. (II) ξ, η, ζ, a, b, c, die Axenneigungen und Parametergrössen des Systems sind, P die Zwillingsaxe und daher der Pol der Zwillingsfläche (hkl).

In dieser Figur ist

$$XX' = 2PX$$
$$\cos X'Z = \cos\eta \cos XX' + \sin\eta \sin XX' \cos PXZ$$
$$\cos Z'X = \cos X'Z.$$

Entwickelt man nun hieraus mittelst der bekannten Gleichung [1]), welche die Lage eines Poles als Function von $\xi\eta\zeta$ hkl abc darstellt, alle Cosinuse, so erhält man folgende Gleichungen:

1. Triclinisches System:

$$A_1 = 1 + 2\cos\xi \cos\eta \cos\zeta - \cos^2\xi - \cos^2\eta - \cos^2\zeta$$
$$M_1 = h^2b^2c^2 \sin^2\xi + k^2a^2c^2 \sin^2\eta + l^2a^2b^2 \sin^2\zeta$$
$$- 2abc[chk(\cos\zeta - \cos\xi\cos\eta) + bhl(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta)$$
$$+ akl(\cos\xi - \cos\zeta\cos\eta)]$$
$$M_1 \cos X'X = 2h^2b^2c^2A_1 - M_1$$
$$M_1 \cos Y'Y = 2k^2a^2c^2A_1 - M_1$$
$$M_1 \cos Z'Z = 2l^2a^2b^2A_1 - M_1$$
$$M_1 \cos X'Z = M_1 \cos Z'X = 2hlab^2cA_1 - M_1\cos\eta$$
$$M_1 \cos X'Y = M_1 \cos Y'X = 2hkabc^2A_1 - M_1\cos\zeta$$
$$M_1 \cos Y'Z = M_1 \cos Z'Y = 2kla^2bcA_1 - M_1\cos\xi$$

2. Monoclinisches System:

$$M_2 \cos X'X = 2h^2b^2c^2 \sin^2\eta - M_2$$
$$M_2 \cos Y'Y = 2k^2a^2c^2 \sin^2\eta - M_2$$
$$M_2 \cos Z'Z = 2l^2a^2b^2 \sin^2\eta - M_2$$
$$M_2 \cos X'Z = M_2 \cos Z'X = 2hlab^2c \sin^2\eta - M_2\cos\eta$$
$$M_2 \cos X'Y = M_2 \cos Y'X = 2hkabc^2 A_2$$
$$M_2 \cos Y'Z = M_2 \cos Z'Y = 2kl\, a^2bc\, A_2$$

3. Prismatisches System:

$$M_3 \cos X'X = h^2b^2c^2 - k^2a^2c^2 - l^2a^2b^2$$
$$M_3 \cos Y'Y = k^2a^2c^2 - h^2b^2c^2 - l^2a^2b^2$$
$$M_3 \cos Z'Z = l^2a^2b^2 - h^2b^2c^2 - k^2a^2c^2$$
$$M_3 \cos X'Y = M_3 \cos Y'X = 2hkabc^2$$
$$M_3 \cos X'Z = M_3 \cos Z'X = 2hl\,ab^2c$$
$$M_3 \cos Y'Z = M_3 \cos Z'Y = 2kl\,a^2bc$$

---

[1]) Vergl. Schrauf Lehrbuch der physikalischen Mineralogie. I. Theil. Mineral-Morphologie. Cap. IX.

4. Orthohexagonales System:

$$M_4 \cos X'X = h^2c^2 - 3k^2c^2 - 3l^2a^2$$
$$M_4 \cos Y'Y = 3k^2c^2 - h^2c^2 - 3l^2a^2$$
$$M_4 \cos Z'Z = 3l^2a^2 - h^2c^2 - 3k^2c^2$$
$$M_4 \cos X'Y = M_4 \cos Y'X = 2hk\sqrt{3}c^2$$
$$M_4 \cos X'Z = M_4 \cos Z'X = 2hl\sqrt{3}ac$$
$$M_4 \cos Y'Z = M_4 \cos Z'Y = 2kl\quad 3ac$$

5. Pyramidales System:

$$M_5 \cos X'X = h^2c^2 - k^2c^2 - l^2a^2$$
$$M_5 \cos Y'Y = k^2c^2 - h^2c^2 - l^2a^2$$
$$M_5 \cos Z'Z = l^2a^2 - h^2c^2 - k^2c^2$$
$$M_5 \cos X'Y = M_5 \cos Y'X = 2hkc^2$$
$$M_5 \cos X'Z = M_5 \cos Z'X = 2hlac$$
$$M_5 \cos Y'Z = M_5 \cos Z'Y = 2klac$$

6. Tesserales System: [1])

$$M_6 \cos X'X = h^2 - k^2 - l^2$$
$$M_6 \cos Y'Y = k^2 - h^2 - l^2$$
$$M_6 \cos Z'Z = l^2 - k^2 - h^2$$
$$M_6 \cos X'Y = M_6 \cos Y'X = 2hk$$
$$M_6 \cos X'Z = M_6 \cos Z'X = 2hl$$
$$M_6 \cos Y'Z = M_6 \cos Z'Y = 2kl$$

§. 3. Diese Gleichungen machen es möglich, die Lage der Krystallaxen $X'Y'Z'$ dadurch zu bestimmen, dass man dieselben als Normalen auf Flächen des Indiv. (I) betrachtet und die Indices dieser letzteren bestimmt. Seien also die Indices jener Fläche von Indiv. (I), deren Normale mit X' parallel ist

$$x_1\, x_2\, x_3$$

analog für Y'

$$y_1\, y_2\, y_3$$

und für Z'

$$z_1\, z_2\, z_3$$

---

[1]) Die Werthe $M_2 \ldots M_6$ ergeben sich durch Specialisirung von a, b, c, ξ, η, ζ, aus M_1 — Behufs ihrer Ableitung vergl. Schrauf phys. Miner. I, Cap. IX.

wobei sich $x_1 \ldots z_3$ der numerischen Ordnung nach auf $X, Y, Z,$ bezieht, so gelten nachstehende Bestimmungsgleichungen:

$$
\begin{array}{lll}
x_1 = a \cos X'X & x_2 = b \cos X'Y & x_3 = c \cos X'Z \\
y_1 = a \cos Y'X & y_2 = b \cos Y'Y & y_3 = c \cos Y'Z \\
z_1 = a \cos Z'X & z_2 = b \cos Z'Y & z_3 = c \cos Z'Z.
\end{array}
$$

§. 4. Mittelst der erlangten Kenntniss der Indices $x_1 x_2 \ldots z_3$ ist es möglich, die Indices der Flächen des Indiv. (I) als Functionen der Axen $X'Y'Z'$ des Indiv. (II) darzustellen.

Sind nämlich uvw die Indices der Fläche M vom Indiv. (I) bezogen auf die Axen XYZ und sollen nun die Indices $u'v'w'$ — die Indices bezogen auf $X'Y'Z'$ — gefunden werden, so müssen die nachfolgenden Gleichungen gelten:

$$
\frac{a}{u'} \cos MX' = \frac{b}{v'} \cos MY' = \frac{c}{w'} \cos MZ'
$$

$$
\begin{aligned}
\cos MX' &= \cos (uvw\, x_1\, x_2\, x_3) \\
\cos MY' &= \cos (uvw\, y_1\, y_2\, y_3) \\
\cos MZ' &= \cos (uvw\, z_1\, z_2\, z_3)
\end{aligned}
$$

welche aus der wechselseitigen Transponirung der Axensysteme folgen. Aus der Auflösung dieser Gleichungen erhält man dann $(u'v'w')$ als Function von (uvw); da aber die Individuen (I) und (II) ident sind, so müssen die Transformationsgleichungen allgemeine Gültigkeit haben, also auch die Relationen der Indices von Flächen des Indiv. (II) auf die Axen (XYZ) des Indiv. (I) darstellen.

Es gelten somit zur Transformirung der Indices folgende Gleichungen:

1. Triclinisches System:

$$
u' = \frac{u(2h^2b^2c^2A_1 - M_1) + v(2hkabc^2A_1 - \cos\zeta M_1) + w(2hlab^2cA_1 - \cos\eta M_1)}{\sqrt[2]{\left[(2h^2b^2c^2A_1 - M_1)^2 + (2hkabc^2A_1 - \cos\zeta M_1)^2 + (2hlab^2cA_1 - \cos\eta M_1)^2\right]}}
$$

$$
v' = \frac{u(2hkabc^2A_1 - \cos\zeta M_1) + v(2k^2a^2c^2A_1 - M_1) + w(2kla^2bcA_1 - \cos\xi M_1)}{\sqrt[2]{\left[(2hkabc^2A_1 - \cos\zeta M_1)^2 + (2k^2a^2c^2A_1 - M_1)^2 + (2kla^2bcA_1 - \cos\xi M_1)^2\right]}}
$$

$$
w' = \frac{u(2hlab^2cA_1 - \cos\eta M_1) + v(2kla^2bcA_1 - \cos\xi M_1) + w(2l^2a^2b^2A_1 - M_1)}{\sqrt[2]{\left[(2hlab^2cA_1 - \cos\eta M_1)^2 + (2kla^2bcA_1 - \cos\xi M_1)^2 + (2l^2a^2b^2A_1 - M_1)^2\right]}}
$$

2. Monoclinisches System:

$$u' = \frac{u(2h^2b^2c^2 \sin^2\eta - M_2) + v(2hk\,abc^2 \sin^2\eta) + w(2hl\,ab^2c \sin^2\eta - \cos\eta\, M_2)}{\sqrt{\left[(2h^2b^2c^2 \sin^2\eta - M_2)^2 + (2hk\,abc^2 \sin^2\eta)^2 + (2hl\,ab^2c \sin^2\eta - \cos\eta\, M_2)^2\right]}}$$

$$v' = \frac{u(2hk\,abc^2 \sin^2\eta) + v(2k^2a^2c^2 \sin^2\eta - M_2) + w(2kl\,a^2bc \sin^2\eta)}{\sqrt{\left[(2hk\,abc^2 \sin^2\eta)^2 + (2k^2a^2c^2 \sin^2\eta - M_2)^2 + (2kl\,a^2bc \sin^2\eta)^2\right]}}$$

$$w' = \frac{u(2hl\,ab^2c \sin^2\eta - \cos\eta\, M_2) + v(2kl\,a^2bc \sin^2\eta) + w(2l^2a^2b^2 \sin^2\eta - M_2)}{\sqrt{\left[(2hl\,ab^2c \sin^2\eta - \cos\eta\, M_2)^2 + (2kl\,a^2bc \sin^2\eta)^2 + (2l^2a^2b^2 \sin^2\eta - M_2)\right]}}$$

3. Prismatisches System:

$$u' = u(h^2b^2c^2 - k^2a^2c^2 - l^2a^2b^2) + 2ha^2(vkc^2 + wlb^2)$$
$$v' = v(k^2a^2c^2 - h^2b^2c^2 - l^2a^2b^2) + 2kb^2(wla^2 + uhc^2)$$
$$w' = w(l^2a^2b^2 - h^2b^2c^2 - k^2a^2c^2) + 2lc^2(uhb^2 + vka^2)$$

4. Orthohexagonales System:

$$u' = u(h^2c^2 - 3k^2c - 3l^2a^2) + 6h(vkc^2 + wla^2)$$
$$v' = v(3k^2c^2 - h^2c^2 - 3l^2a^2) + 2k(3wla^2 + uhc^2)$$
$$w' = w(3l^2a^2 - h^2c^2 - 3k^2c^2) + 2lc^2(uh + 3vk)$$

5. Pyramidales System:

$$u' = u(h^2c^2 - k^2c^2 - l^2a^2) + 2h(vkc^2 + wla^2)$$
$$v' = v(k^2c^2 - h^2c^2 - l^2a^2) + 2k(wla^2 + uhc^2)$$
$$w' = w(l^2a^2 - h^2c^2 - k^2c^2) + 2lc^2(uh + vk)$$

6. Tesserales System:

$$u' = u(h^2 - k^2 - l^2) + 2h(vk + wl)$$
$$v' = v(k^2 - h^2 - l^2) + 2k(wl + uh)$$
$$w' = w(l^2 - h^2 - k^2) + 2l(uh + vk)$$

§. 5. Durch diese Transformationsgleichungen werden die Indices der Flächen beider Individuen des Zwillings als Functionen eines Axensystems dargestellt; und hierdurch ermöglicht, die allgemeinen Berechnungsformeln für die Winkel zweier Flächen auch auf die Flächen der beiden Zwillingsindividuen anzuwenden.

Denn ist $P(pqr)$ eine Fläche des Individuums (I) und Q (uvw) eine Fläche des Individuums (II), ferner $(u'v'w')$ die auf (XYZ) transformirten Indices von Q, so ist

$$\cos(PQ) = \cos(pqr)(u'v'w')$$

womit das Problem gelöst ist, da bekanntlich (l. c.)

$$\cos PQ = \frac{\begin{array}{l} pu'b^2c^2\sin^2\xi + qv'a^2b^2\sin^2\eta + rw'a^2b^2\sin^2\zeta \\ -(ru'+pw')ab^2c[\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta] \\ -(rv'+qw')a^2bc[\cos\xi - \cos\eta\cos\zeta] \\ -(qu'+pv')abc^2[\cos\zeta - \cos\xi\cos\eta] \end{array}}{\left\{\begin{array}{l} p^2b^2c^2\sin^2\xi + q^2a^2c^2\sin^2\eta + r^2a^2b^2\sin^2\zeta \\ -2abc[prb(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta) + qra(\cos\xi - \cos\eta\cos\xi) \\ \qquad + pqc(\cos\zeta - \cos\eta\cos\xi)] \end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times \left\{\begin{array}{l} u'^2b^2c^2\sin^2\xi + v'^2a^2b^2\sin^2\eta + w'^2a^2b^2\sin^2\xi \\ -2abc[u'w'b(\cos\eta - \cos\xi\cos\zeta) + v'w'a(\cos\xi - \cos\eta\cos\zeta) \\ \qquad + u'v'c(\cos\zeta - \cos\eta\cos\xi)] \end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

§. 6. Im nachfolgenden sind einige Beispiele der Transformation der Indices durchgeführt.

Die variablen Elemente der früheren Gleichungen sind die Werthe von $(\xi\eta\zeta\, abc)$ und der Indices (hkl) der Zwillingsfläche: Die Formeln werden daher sowohl mit den Systemen als auch mit der Vereinfachung der Zwillingsfläche weniger complicirt. In der Natur sind auch immer die möglichst einfachen Indices für die Zwillingsflächen vorkommend und nur in den wenigstan Fällen treten Pyramiden als solche auf.

Voraus berechnen lassen sich aber nur die Transformationen des tesseralen Systemes, da für dieselben die Axenverhältnisse und Neigungen eliminirt sind. Im tesseralen Systeme kommen zwei Zwillingsflächen vor a (110) und b (111). Die Gleichungen sind für diese Fälle:

$$a)\quad \begin{aligned} u' &= v \\ v' &= u \\ w' &= -w \end{aligned}$$

$$b)\quad \begin{aligned} u' &= (-u + 2v + 2w) \\ v' &= (-v + 2u + 2w) \\ w' &= (-w + 2u + 2v) \end{aligned}$$

Es ergibt sich somit für den gewöhnlichen Fall der Zwillingsbildung im tesseralen Systeme, Octaederfläche (111) oder $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ gleich Zwillingsfläche folgende Parallelstellung von Indices des positiven Quadranten:

$$(u\,v\,w) = 100,\ 110,\ 111,\ 211,\ 221,\ 321,$$
$$(u'v'w') = \bar{1}22,\ 114,\ 111,\ 255,\ 447,\ 123.$$

Diese Parallelstellung gilt jedoch nur für die specielle Fläche *uvw* und nicht für den vollständigen Complex der Form [*uvw*].

Für die Figur (3), welche einen Hexaeder Zwilling nach $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ darstellt, haben daher die Flächen des Individuums (II) eine solche Lage gegen die Axen (*XYZ*) von (I), dass nachfolgende Indices gelten können:

$$u\,v\,w = 100,\quad 010,\quad 001$$
$$u'v'w' = \bar{1}22,\quad 2\bar{1}2,\quad 22\bar{1}.$$

Dieser Zwilling ist zugleich derjenige, der am Golde von Vörös-patak vorkommt und Missverständnisse veranlasste.

Einen zweiten Zwilling will ich hier noch erwähnen, den des Tetrakishexaeder (Zwilling nach $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$), welcher an Kupfer beobachtet wird. Fig. (4) stellt denselben dar. An demselben ist interessant, dass die Flächen des positiven Quadranten von einem Individuum parallel sind Flächen des positiven Quadranten vom zweiten Individuum. Es ergibt sich nämlich durch Transformation:

$$\left\{\begin{array}{l} u\,v\,w = 210,\quad 120,\quad 201,\quad 102,\quad 021,\quad 012, \\ u'v'w' = 012,\quad 102,\quad 021,\quad 120,\quad 201,\quad 210, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} u\,v\,w = \bar{2}10,\quad \bar{1}20,\quad 20\bar{1},\quad 10\bar{2},\quad 02\bar{1},\quad 01\bar{2}, \\ u'v'w' = 45\bar{2},\quad 5\bar{4}2,\quad \bar{4}25,\quad \bar{5}24,\quad 2\bar{4}5,\quad \bar{2}54. \end{array}\right.$$

Während für das tesserale System die Indices ziemlich einfach sind, nehmen sie mit den höheren Systemen an Complication zu. Als Beispiel für das pyramidale System kann Rutil gelten, dessen Axenverhältniss infolge (001) (101) = 32°47′ als

$$a : a : c = 1 : 1 : 0{\cdot}64409 = 1 : 1 : \sqrt{\frac{7}{17}}$$

angenommen werden kann.

Die Transformationsgleichungen werden hierfür, da die Zwillingsfläche für die Figur 5 und 6 $(10\bar{1})$ ist:

$$\begin{aligned} u' &= u\,(c^2-1) - 2w &&= -10\,u - 34\,w \\ v' &= -v\,(c^2-1) &&= \quad 10\,v \\ w' &= 2uc^2 - w\,(c^2-1) &&= \quad 14\,u + 10\,w. \end{aligned}$$

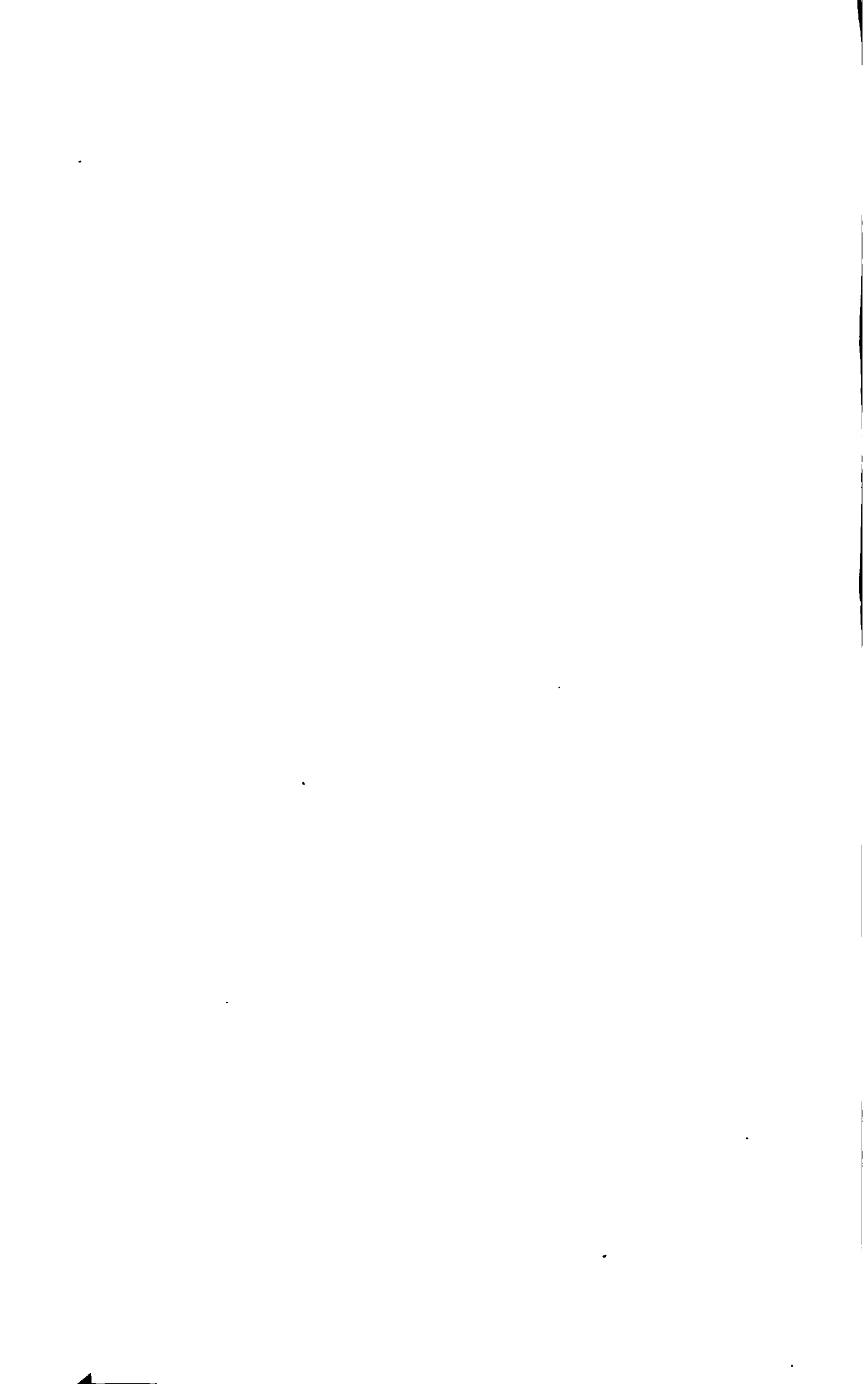
Man erhält hiedurch folgende Transformationen für die Flächen des zweiten Individuums:

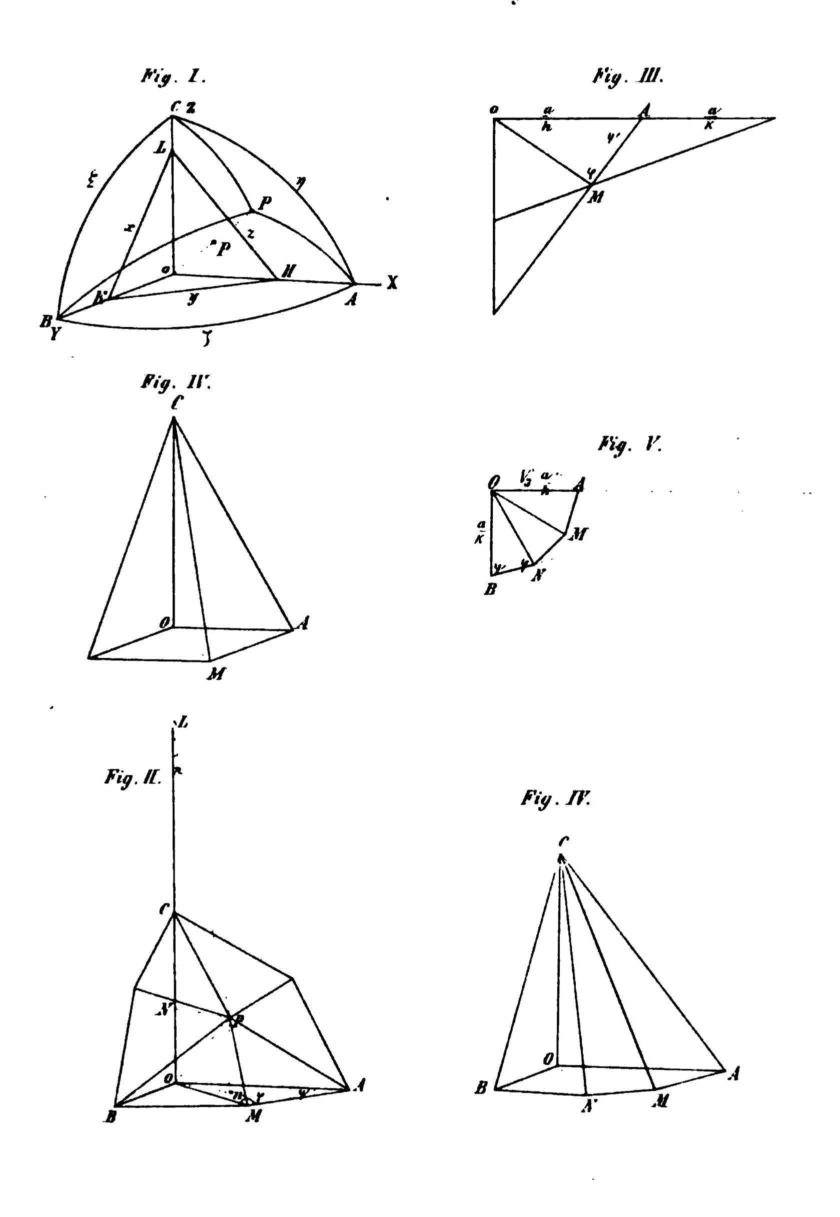
$$\begin{cases} u\,v\,w = 100,\ 010,\ 110,\ \bar{1}10,\ \ 101,\ \ \bar{1}01,\ \ \ 111,\ \ \bar{1}11 \\ u'v'w' = \bar{5}07,\ 010,\ \bar{5}57,\ 55\bar{7},\ \ \bar{1}\bar{1},06,\ \bar{6}01,\ \ 2\bar{2},5,12\ \ \bar{1}2\,5.\,2. \end{cases}$$

Diese Indices sind mit den genäherten Werthen $c = \sqrt{\frac{7}{17}}$ berechnet worden und die Grenzwerthe für die, zum Zwecke der absoluten Winkelbestimmung aus dem Werthe $c = 0\cdot64409$ zu ermittelnden, Indices.

Auf analoge Weise können die genäherten Werthe zur Construction und Definirung der Krystalle, die genauen hingegen zur Berechnung verwendet werden.

Weitere Beispiele anzuführen, halte ich für unnöthig, indem durch die beiden durchgeführten der Gang der Untersuchung wohl genügend erläutert ist.




Fig. I.
C Z
L
ξ
η
P
x
z
p
o
H
X
K
y
A
B
Y
ζ
Fig. III.
o
a/h
A
a/k
φ'
φ
M
Fig. IV.
C
O
A
M
Fig. V.
O
A
M
N
B
Fig. II.
L
C
N
O
B
M
A
Fig. IV.
C
O
B
N
M
A

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LI. BAND.

ZWEITE ABTHEILUNG.

2.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.



IV. SITZUNG VOM 3. FEBRUAR 1865.

Herr Dr. A. Vogl dankt, mit Schreiben vom 16. Jänner, für die ihm bewilligte Subvention von 150 fl. Ö. W.

Herr Prof. Dr. E. Mach in Gratz übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Untersuchungen über den Zeitsinn des Ohres".

Herr Prof. E. Brücke übergibt eine vorläufige Notiz, betitelt: „Zur Blutanalyse", von Herrn Th. Zawarykin, nebst einer Mittheilung des c. M., Herrn Prof. J. Czermak in Prag, welche den Titel führt: „Nachweis der Erscheinung der sogenannten Pulsverspätung beim Frosche und das Verfahren dieselbe wahrzunehmen".

Herr Dr. G. Tschermak überreicht eine Abhandlung: „Chemisch-mineralogische Studien. II. Kupfersalze".

Die betreffenden Untersuchungen wurden mit Unterstützung der Akademie ausgeführt.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, Königl. Bayer. zu München: Sitzungsberichte. 1864. II. Heft 2. München, 1864; 8°.

Alvarenga, Pedro Francisco da Costa, Relatorio sobre a epidemai de Cholera-Morbus no Hospital de Sant'Anna em 1856. Lisboa, 1858; 8°. — Naticias ácerca do Relatorio sobre a epidemia de Cholera-Morbus em 1856. Lisboa, 1858; 8°. — Parecer de alguns medicos estrangeiros e nacionaes ácerca do Anatomia pathologica e symptomatologia da febre amarella em Lisboa no anno de 1857. Lisboa, 1862; 8°. — Estado da questão ácerca do duplo sopro crural na insufficiencia das valvulas aorticas. Lisboa, 1863; 8°. — Noticia sobre a these e concurso na escola medico-cirurgica de Lisboa em 1862. Lisboa, 1863; 8°. — Como actuam as substancia branca e cinzenta da Medulla espinhal na transmissão das impressões sensitivas e determinacões de vontade? Lisboa, 1862; 8°.

American Journal of Science and Arts. Vol. XXXVIII. Second Series. Nr. 144. New Haven, 1864; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1510—1511. Altona, 1865; 4°.

Bulletin du Congrès international d'horticulture à Bruxelles, les 24, 25 & 26 Avril 1864. Gand, 1864; 8°.

Commission hydrométrique de Lyon: Résumé des observations recueillies en 1862 dans le bassin de la Saone et quelques autres régions. 19ᵉ Année. 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LX. Nros. 1—2. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2ᵉ Serie, XIVᵉ Année, 1ᵉʳ Volume, 3ᵉ—5ᵉ Livraisons. Paris, 1865; 8°.

Entwurf eines Organisations-Statutes für das k. k. polytechnische Institut in Wien, sammt Motiven. Im Auftrage des hohen k. k. Staats-Ministeriums verfasst von dem Professoren-Collegium dieser Anstalt. Wien, 1864; 8°.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde: Mittheilungen. IV. Vereinsjahr 1864. Salzburg; 8°.

Gewerbe-Verein, nied.-österr.: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrg. 1864. 10.—12. Heft. Wien, 1865; 8°. — Wochenschrift. XXVI. Jahrg. No. 4—5. Wien, 1865; 8°.

Hebert, Ed., Réponse à la note de M. Ch. d'Orbigny, intitulée: Sur l'âge véritable des poudingues de Nemours et des sables coquilliers d'Ormoy. — Du terrain jurassique supérieur sur les côtes de la Manche. — Note sur le travertin de Champigny et sur les couches entre lesquelles il est compris. (Extraits du Bulletin de la Soc. géolog. de France, 2ᵉ sér. t. 17.); 8°. — Quelques remarques sur la mer jurassique et les théories imaginées pour rendre compte de ses déplacements. — Gisement de couches marines de Sinceny (Aisne). — Observations sur les rivages de la mer jurassique à l'époque de la grande oolite dans le bassin méditerranéen, jurassique et parisien. (Extraits du même Bulletin. 2ᵉ sér. t. 18.) — Du terrain jurassique de la Provence; sa division en étages; son indépendance des calcaires dolomitiques associés aux gypses. — Observations sur les systèmes bruxellien et laekénien de Dumont et sur leur position dans la série parisienne, faites à l'occasion du mémoire de M. Le Hon. — Sur l'argile à silex, les sables

marins tertiaires et les calcaires d'eau douce du nord-ouest de la France. (Extr. du même Bulletin. t. 19.) — Sur le non-synchronisme des étages campanien et dordonien de M. Coquand avec la craie de Meudon et celle de Maestricht. Réponse à M. Coquand. — Note sur la craie blanche et la craie marneuse dans le bassin de Paris et sur la division de ce dernier étage en quartre assises. (Extr. du même Bulletin, t. 20.) Observations sur les principaux éléments du terrain quaternaire, sur les théories proposées pour en expliquer la formation et sur l'âge de l'argile à silex. (Extr. du même Bulletin t. 21.) 8°. — Mémoire sur les fossiles de Montreuil-Bellay (Maine-et-Loire.) (Extr. du 5e Vol. du Bull. de la Soc. Linn. de Normandie.) 8°. — Note sur les trigonies clavellées de l'Oxford-Clay et du Coral-Rag. (Extr. du numéro d'avril 1861 du Journal de Conchyliologie.) 8°. — Sur les formations d'eau douce du bassin de Paris et en particulier sur les calcaires lacustres à Lophiodon de Provins et leur extension dans la Beauce. (Extr. de la séance du 21 Juillet 1862 de l'Acad. des Sciences.) 8°. — Observations géologiques sur quelques points du département de l'Yonne. (Extr. du Bulletin de la Soc. des sciences hist. et natur. de l'Yonne 1863.) 8°.

Hoek, Recherches astronomiques de l'Observatoire d'Utrecht. 2e Livraison. La Haye, 1864; 4°.

— et A. C. Oudemans, Sur les contractions dans les mélange, de liquides. La Haye, 1864; 4°. — Recherches sur la quantité d'éther contenue dans les liquides. La Haye, 1864; 4°.

Jahrbuch, Berliner Astronomisches, für 1867, herausgegeben unter der Redaction von Wolfers. Berlin, 1864; 8°.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. No. 3—4. Wien, 1865; 4°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Jahrgang 1864. XII. Heft nebst Ergänzungsheft No. 14. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique. 150e Livraison. Tome Ve, Année 1863 & 194e Livraison. Tome VIIe, Année 1865. Paris; 4°.

Programm des k. k. Staats-Obergymnasiums zu Eger am Schlusse des Schuljahres 1864. Eger; 8°.

Reader. Nros. 108—109. Vol. V. London, 1865; Fol.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. 1864. XIV. Band. No. 3—4. Wien; kl.-4°.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'orient. VIIIe Année, Nro. 9. Constantinople, 1864; 4°.

Übersichten der Witterung in Österreich und einigen auswärtigen Stationen im Jahre 1863. Wien, 1865; Quer-4°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 6—9. Wien, 1865: 4°.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. Nr. 6. Gratz, 1865, 4°.

Zeitschrift des allgemeinen österreichischen Apotheker-Vereins. III. Jahrg. Nr. 2. Wien, 1865; 8°.

— Für Chemie und Pharmacie von Erlenmeyer. VII. Jahrg. Heft 23. Heidelberg; 1864. 8°.

Untersuchungen über den Zeitsinn des Ohres.

Von Dr. Ernst Mach.

(Mit 3 Holzschnitten.)

Als ich vor einigen Jahren anfing, mich intensiver mit physiologisch-psychologischen Studien zu beschäftigen, fiel mir sogleich die mangelhafte Bearbeitung der Lehre vom Zeitsinn auf. In der ganzen mir zugänglichen Literatur fand ich bloss eine ganz kurze Notiz von J. Czermak[1]) über diesen Gegenstand. Ich entschloss mich auf die betreffenden Fragen näher einzugehen und unternahm schon im Sommer 1860 eine vorläufige Untersuchung, die gelegentlich fortgesetzt wurde und im Winter 1864 eine grössere Ausdehnung annahm. — Vor kurzem kam mir eine eben erschienene Inaugural-Dissertation von Adolph Höring[2]) in die Hände, welche denselben Gegenstand behandelt. Da mir nun diese erst bekannt wurde, während ich meine Arbeit zum Druck vorbereitete, da sie nichts enthielt, was meine Ansichten ändern konnte, da ich ferner glaube, sowohl der Methode als der Sache nach über dieselbe hinausgegangen zu sein, so sei es mir gestattet, auf diese übrigens sehr verdienstliche Arbeit vorläufig nicht näher einzugehen und meine Darstellung unverändert zu lassen.

I. Meine erste Versuchsreihe, im Sommer 1860 unternommen, hatte zunächt den Zweck, zu entscheiden, ob das von Fechner[3]) sogenannte Weber'sche Gesetz auch für die Wahrnehmung der Zeit gelte. Die Form des Versuches war eine sehr einfache. Ein Bleikügelchen an einem feinen Faden bildete ein Pendel von rasch veränderlicher Länge. Dieses Pendel liess ich bei bestimmter Länge einige Schwingungen machen, welche mit dem Auge oder nach

[1]) J. Czermak, Ideen zur Lehre vom Zeitsinn. Sitzb. d. Wien. Akad. VII.

[2]) A. Höring, Über das Unterscheidungsvermögen des Hörsinnes für Zeitgrössen Tübingen 1864.

[3]) Fechner, Psychophysik I, II.

Umständen mit dem Ohr (wobei das Pendel natürlich an einen tönenden Körper anschlug) beobachtet wurden. Dann wurde die Länge rasch variirt und der eben merkliche Unterschied bestimmt.

Nennen wir t die wirkliche, τ die empfundene Schwingungsdauer, l die Pendellänge; so haben wir für den Fall des Weber'schen Gesetzes:

$$\tau = a.\log\left(\frac{t}{b}\right),\ t = c\sqrt{l},\ \tau = a.\log\left(\frac{c\sqrt{l}}{b}\right)$$

wobei a, b, c Constanten sind. Wir finden ferner, auf die eben merklichen Unterschiede übergehend

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta l} = \frac{\frac{1}{2}a}{l} = \frac{a'}{l},$$

wo a' wieder constant ist.

Da nun $\Delta\tau$ als eben merklicher Empfindungsunterschied constant ist, so sollte $\Delta l = p.l$, d. h. Δl der Grösse l proportional sein.

Meine Versuche, welche von 2—59cm Pendellänge reichten, zeigten nun ein entschiedenes Anwachsen von Δl mit l, und da Schwankungen vorkamen, widersprachen sie wenigstens nicht der Annahme der Proportionalität. Es zeigte sich jedoch ebenso entschieden, dass zur Erlangung sicherer Resultate eine feinere Methode nothwendig sei. Diess Resultat theilte ich (im December 1860) Herrn Fechner brieflich mit. Eine Notiz darüber befindet sich im Wochenblatte der k. k. Gesellschaft der Ärzte zu Wien [1]) und in meinen Vorträgen über Psychophysik [2]).

II. Die folgenden Versuche wurden mit Mälzel's Metronom angestellt. Ich beschränkte mich nämlich von da an in der Untersuchung des Zeitsinnes auf das Ohr, indem ich wegen der ungleich grösseren Zeitempfindlichkeit des Ohres hier die besten Resultate hoffte.

Zunächst beobachtete ich an einem Metronom und bestimmte durch rasche Verschiebung des Laufgewichtes die eben merklichen Unterschiede. Das am Metronom befindliche Laufgewicht bewirkte zu starke Variationen und ich fügte desshalb demselben ein weit kleineres bei. Die Hauptschwierigkeit liegt bei diesen Beobach-

---

1) Bei Gelegenheit eines Vortrages über Psychophysik gab ich dieselbe.

2) Österr. Zeitschrift für praktische Heilkunde. 1863.

tungen in der Zwischenpause, welche zum Verschieben verwendet wird und möglichst kurz gewählt werden muss. Es ist sehr schwer, sie immer gleich zu machen. Dies hat auf die Schätzung einen bedeutenden Einfluss.

Ich verglich später zwei Metronome, wobei diese Pause nahe = 0 gemacht werden konnte, erzielte jedoch keine besseren Resultate. Denn jedes Metronom für sich zeigt eine wenn auch sehr geringe Ungleichmässigkeit der Schläge. Diese Ungleichmässigkeit ist bei beiden immer verschieden; zudem stört der ungleiche Ton beider Metronome. Nebenbei bemerke ich, dass die Metronome, welche ich im Handel vorfand, sehr schlecht sind. Man findet nicht zwei, welche bei gleicher Einstellung auch nur nahe zu gleich schlagen. Das Lauf- und das Pendelgewicht ist meist willkürlich gewählt. Viele Metronome schlagen bei hoher Einstellung gar nicht mehr, sondern schnappen einfach um. Ich musste mir desshalb die Mühe nehmen, für jeden Theilstrich und jedes Metronom die Schwingungsdauer mit der Secundenuhr zu bestimmen und Tabellen anzufertigen.

Trotz diesen Unzukömmlichkeiten habe ich eine beträchtliche Anzahl von Beobachtungsreihen angestellt, indem ich eben erst durch diese Reihen und ihre Schwierigkeit zu andern Methoden geführt wurde. Einige Reihen wurden, da ich mehrere Beobachter zu vergleichen wünschte, mit besonderer Freundlichkeit von Herrn Prof. F. Pless und meinen Zuhörern, den Herren Joseph Križan und Joseph Schmölzer ausgeführt.

Für jeden Unterschied wurde eine grössere Anzahl von Versuchen gemacht, und nur solche Unterschiede wurden als merklich notirt, die eben in einer überwiegenden Zahl (3 : 1) als merklich erkannt wurden. Ich lasse die Resultate einiger Reihen folgen.

1. Herr Joseph Schmölzer philos. studios.

t	$\frac{\Delta t}{t}$	t	$\frac{\Delta t}{t}$
0·255	0·055	0·890	0·101
0·269	0·052	0·800	0·112
0·312	0·049	1·220	0·285
0·368	0·071	1·070	0·112
0·594	0·109		

In dieser und den folgenden Tabellen enthält die erste Rubrik t die Schwingungsdauer des Metronoms in Secunden, die zweite $\frac{\Delta t}{t}$ den Quotienten aus dem eben merklichen Unterschied in die Zeit.

2. Herr Prof. F. Pless.

t	$\frac{\Delta t}{t}$	t	$\frac{\Delta t}{t}$
0·260	0·030	0·500	0·070
0·269	0·013	0·535	0·047
0·312	0·048	0·800	0·071
0·327	0·058	1·170	0·050
0·394	0·048	1·220	0·140

3. Herr Joseph Križan, philos. stud.

t	$\frac{\Delta t}{t}$	t	$\frac{\Delta t}{t}$
0·277	0·061	0·290	0·034
0·277	0·042	0·350	0·046
0·290	0·020	0·447	0·042

4. Derselbe.

t	$\frac{\Delta t}{t}$	t	$\frac{\Delta t}{t}$
0·334	0·045	0·822	0·078
0·334	0·040	0·882	0·028
0·638	0·033	0·882	0·132

5. Mach.

t	$\frac{\Delta t}{t}$	t	$\frac{\Delta t}{t}$
0·277	0·079	0·659	0·086
0·277	0·115	1·070	0·093
0·351	0·059	1·070	0·131
0·447	0·051		

Die Reihen 1, 2, 3 sind mit einem Metronom mit Hilfe des grossen und kleinen Laufgewichtes ausgeführt, 4 und 5 mit zwei Metronomen.

Überall zeigt sich ein zwar schwankendes aber entschiedenes Ansteigen von $\frac{\Delta t}{t}$ mit t, welches nicht auf Zufälligkeiten geschrieben werden kann und daher mit dem Fechner-Weber'schen Gesetz unvereinbar ist, nach welchem im Gegentheil $\frac{\Delta t}{t}$ eine Constante sein müsste. Diess tritt noch auffallender hervor, wenn wir alle Reihen zusammenfassend einige plausible Mittelwerthe rechnen: Es ergeben sich beispielweise folgende Zahlen:

t	$\frac{\Delta t}{t}$
0·300	0·050
0·504	0·064
0·804	0·080
1·136	0·135

Die Ergebnisse einer oder weniger Reihen zeigen immer, mitunter bedeutende, Schwankungen. Die Versuche können nur als vorläufige gelten. Die Methode erweist sich, mir wenigstens, als zu unvollkommen. Doch zeigt sich hier schon ein deutliches Gesetz. Auch interessante Einzelnheiten bemerkt man bei diesen Beobachtungen. An manchen Tagen, in manchen Reihen, werden Zeitverlängerungen weit leichter bemerkt als Zeitverkürzungen, an anderen Tagen finde constant wieder das Umgekehrte statt.

III. Ich bemerkte, dass die Ungleichmässigkeit der Metronomschläge, die von der schlecht gearbeiteten Hemmung herrührte, auch wenn sie nur gering war, besonders auffiel und störte. Diess brachte mich auf den Gedanken, gerade das Störende zur genauern Bestimmung zu verwenden. Ich construirte also ein Schallpendel, welches, um es kurz zu sagen, Jamben schlug, und zwar Jamben, in welchen das Verhältniss der langen zur kurzen Silbe beliebig variirt werden konnte. Es wurde nun der kurze mit dem unmittelbar darauf folgenden längeren Schlage verglichen. Die missliche Beobachtungspause fiel hiemit weg.

Nebenstehende Zeichnung (Fig. 1) gibt eine Ansicht von dem zur Anwendung gebrachten Apparat. Derselbe besteht hauptsächlich aus einem Pendel von variabler Länge, indem an der dünnen stählernen Pendelstange, welche durch längere und kürzere ersetzt werden kann, eine sehr schwere Linse (3 Pfund) verschoben werden

kann. Die Axe des Pendels enthält eine eigenthümliche Hemmung, in welche ein sehr gering belastetes Triebrad (4 Loth) eingreift. Die Hemmung ist, kurz gesagt, so eingerichtet, dass der Elongations-

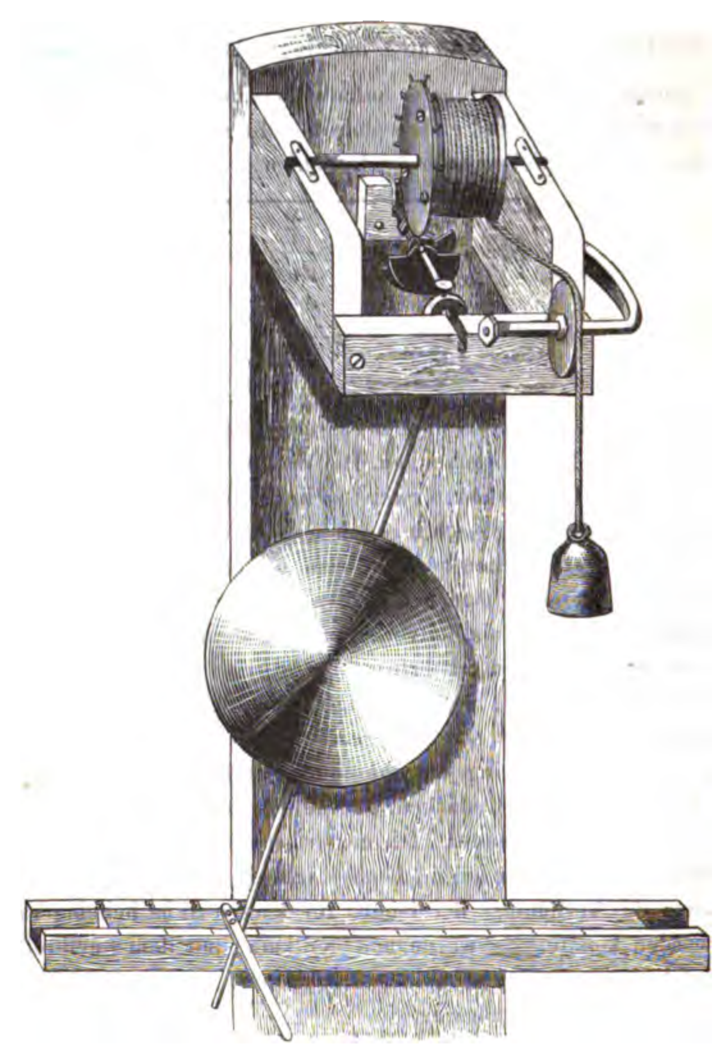


Fig. 1.

winkel des Pendels nach rechts und nach links, bei welchem ein Zahn des Triebrades durchgeht, mittelst Stellschrauben beliebig variirt werden kann. Das Pendel gibt also nach rechts ausschlagend

bei einer andern Elongation einen Schlag als nach links ausschlagend, und diese Elongationen kann ich willkührlich bestimmen, ich kann sie von der grössten Ungleichheit bis zur vollen Gleichheit variiren. Die Pendellinse muss sehr schwer genommen werden, damit das Pendel, einmal in Schwingungen versetzt, lange dieselbe Amplitüde beibehalte und durch das Triebrad im Gange nicht alterirt werde.

Es ist sofort einleuchtend, dass ein solches Pendel zwischen den aufeinander folgenden Schlägen abwechselnd längere und kürzere Pausen lassen wird. Eine einfache Rechnung lehrt Folgendes. Betrachten wir ein Pendel von der Schwingungsdauer 2π, welches in dem kleinen Bogen m schwingt (wobei m die halbe Amplitüde ist), nennen die variable Zeit δ und den variablen Bogen φ, so haben wir

$$\varphi = m. \text{ Sin } \delta, \; \delta = \text{Arcsin}\left(\frac{m}{\varphi}\right).$$

Sei nun der Bogen, bei welchem rechts ein Schlag erfolgt a, b derjenige, welchem links ein Schlag entspricht, heisse t_1 die längere, t_2 die kürzere Pause zwischen zwei Schlägen, $t = \frac{t_1 + t_2}{2}$ die mittlere Pause, so finden wir für

$$t_1 - t_2 = \Delta t \text{ und } (t_1 - t_2) : \left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) = \frac{\Delta t}{t} = q,$$

$$q = \frac{2}{\pi}\left\{ \text{Arcsin}\left(\frac{b}{m}\right) - \text{Arcsin}\left(\frac{a}{m}\right)\right\}.$$

Man findet leicht, dass der Werth von q bei jeder Schwingungsdauer des Pendels derselbe ist, so lange sich m, a, b nicht ändern, so lange also das Pendel in derselben Amplitüde schwingt und bei denselben Ausschlägen rechts und links einen Schlag hören lässt. Ist a, b gegeben, so braucht man nur m fort und fort zu vergrössern, d. h. das Pendel immer weiter schwingen zu lassen, damit $t_1 - t_2 = \Delta t$ für das Gehör eben noch merklich sei. Durch Einsetzung der am Apparat bestimmbaren Werthe von a, b, m kann man nach der angegebenen Formel q rechnen.

Da sich ein physisches Pendel nicht ins Unbegrenzte verkürzen lässt und bei zu grosser Länge sehr unbequem wird, so musste die angegebene Methode, sollte anders die Untersuchung auf sehr verschiedene Zeiten ausdehnbar sein, durch zwei Hilfsmethoden ergänzt werden.

Hier bedeutet $\frac{\Delta t}{t}$ wie überall ein merkliches Verhältniss; nur in dem letzten Falle ist 0·750 nicht mehr merklich. Mit der Verkleinerung der Zeit nimmt also endlich die Empfindlichkeit ebenso ab, wie mit der Vergrösserung. Diess hat an sich nichts Auffallendes. Natürlich müssen auch alle Unterschiede aufhören, wenn die Zeit selbst anfängt unwahrnehmbar klein zu werden.

Um nur nebenbei zu bemerken, wie verschieden die Zeitempfindlichkeit und die kleinste wahrnehmbare Zeit bei verschiedenen Sinnen ausfällt, gebe ich an, dass ich mit dem Zahnrad fand:

0·0277″ für den Finger verschwindend,
0·0470″ für das Auge verschwindend,
0·0160″ für das Ohr noch deutlich.

Was die letzte Angabe betrifft, ist zu bemerken, dass bei so raschen Schlägen nach der Ansicht der Akustiker eigentlich schon ein Ton entstehen sollte. Die Zähne meines Rades geben aber hohe und kurze Schläge. Ich zweifle nicht, dass Sinusschwingungen von dieser Periode entschieden einen Ton hervorbringen.

Um mit grösseren Zeiten zu experimentiren, verwendete ich die dritte Methode.

t	$\frac{\Delta t}{t}$	Note
4·52	0·095	gut merklich
8·00	0·052	unmerklich

Rechnen wir, die sämmtlichen Reihen zusammenstellend einige plausible Werthe, so finden wir:

t	$\frac{\Delta t}{t}$	t	$\frac{\Delta t}{t}$
0·016	0·750*	1·153	0·060*
0·110	0·491	4·520	0·095
0·375	0·052	8·000	0·095*
0·535	0·054		

In dieser Tabelle sind die mit * bezeichneten Zahlen als zu klein, als untere Grenzen anzusehen. — Wir finden also, dass die Unterschiedsempfindlichkeit bei etwa 0·375″ ein Maximum ist und bei der Verkürzung sowohl als auch bei der Verlängerung abnimmt.

Dies Resultat widerspricht den frühern Beobachtungen nicht, sondern sagt bloss mehr als dieselben.

Die letzterwähnten Methoden geben zwar etwas weniger schwankende Beobachtungen, aber dennoch sind die Schwankungen noch bedeutend. Ich bemühte mich natürlich diesen Übelstand noch weiter zu beseitigen.

IV. Man bemerkt bald, dass das Ohr zuweilen geneigt sei, sich an den Takt des Jamben schlagenden Pendels, wenn beide Silben an Länge wenig verschieden sind, so zu gewöhnen, dass es die ungleichen Pausen für gleich hält. Zu andern Zeiten besteht diese Neigung nicht. Daher die Schwankungen in den Angaben. Ausserdem ist es nicht möglich, die beiden Schläge dem Tone nach vollkommen gleich zu machen. Diess stört ungemein die Beobachtung.

Mein Streben war nun wieder dahingerichtet, eben das hier Störende abermals zur genauern Bestimmung zu verwenden. Man wird mich sofort verstehen, wenn ich das Princip, nach welchem die neu angewandten Apparate eingerichtet waren, kurz angebe.



Die Apparate geben abwechselnd zwei verschiedene Glockentöne von verschiedener Dauer, etwa die Tonfolge 1. Haben die Apparate längere Zeit die Tonfolge 1 gegeben, so wird rasch ein Wechsel eingestellt, der die Tonfolge 2 hervorruft. Das Tempo sowohl als der Rhythmus (der Werth des Punktes) kann beliebig variirt werden. Sollte sich nun auch das Ohr an den Rhythmuss 1 gewöhnt haben, so wird es durch 2 doch sofort aus dem Traume geweckt.

Um diese Seiten nicht mit Abbildungen zu füllen, unterlasse ich die Beschreibung der ziemlich complicirten Apparate, obgleich mich deren Herstellung einiges Nachdenken gekostet hat. Übrigens wäre ich jederzeit bereit auf Anfragen nähere Auskunft zu geben.

Die Methode erwies sich wirklich als sehr nützlich, indem sie die Schwankungen meines Urtheils ausnehmend verminderte. Am grössten war ihr Einfluss allerdings bei mittleren Zeiten. Für grosse und kleine Zeiten wurde das Urtheil wenig afficirt.

Ich lasse die Mittelwerthe von den merklichen $\frac{\Delta t}{t}$ aus vier Reihen folgen. Für jeden Werth der Rubrik t wurden in jeder Reihe je 10 Bestimmungen desselben merklichen $\frac{\Delta t}{t}$ gemacht.

Die Einzelbestimmungen von $\frac{\Delta t}{t}$ zeigten unter einander im Allgemeinen keine grössere Differenz als 0·03.

t	$\frac{\Delta t}{t}$	t	$\frac{\Delta t}{t}$
0·016	unbestimmbar	0·714	0·064
0·110	0·330	1·00	0·070
0·375	0·050	2·5	0·18
0·416	0·055	4·0	0·20
0·500	0·057	8·0	0·22
0·535	0·060	15·0	0·33

Es unterliegt zwar keinem Zweifel, dass man in diesen Beobachtungen noch eine weit grössere Genauigkeit erreichen könne, doch glaube ich, dass die Tabelle schon ein ziemlich richtiger Ausdruck der Thatsachen ist.

Wäre ich in der Lage dieselben Mittel nochmals auf diese Untersuchungen zu verwenden, so würde ich natürlich die Sache weit praktischer anfangen. Statt der Pendel- und Rotationsapparate, die immer zahlreiche Übelstände aufweisen, wenn sie nicht mit bedeutenden Kosten hergestellt wurden, würde ich Uhrwerke mit electrischen Signalapparaten anwenden. Jede Glocke müsste mit einem Dämpfer versehen sein, der sie sofort nach dem Schlage zum Schweigen bringt und das störende Singen verhindert. Diese Winke dürften für Jeden nützlich sein, der dieses Thema wieder aufnehmen sollte.

Als Hauptresultate kann ich nun aussprechen:

1. Die Zeitunterschiedsempfindlichkeit des Ohres ist weit grösser als die irgend eines andern Sinnes; doch zeigen sich stets sehr bedeutende Schwankungen im Urtheil.

2. Die Empfindlichkeit ist ein Maximum (für mein Ohr) bei etwa 0·3″—0·4″, und das eben merkliche $\frac{\Delta t}{t}$ beträgt hier etwa 0·05. Mit der Vergrösserung und Verkleinerung der Zeit nimmt die Unterschiedsempfindlichkeit rasch ab.

3. Der Schwellenwerth der Zeit für mein Ohr dürfte etwas weniger als 0·016″ betragen.

Die Resultate von Adolf Höring[1]) widersprechen den meinigen nicht, soweit beide Ergebnisse mit einander vergleichbar sind. Dagegen muss ich es sehr in Zweifel ziehen, dass $\frac{\Delta t}{t} = p.\ t$, d. h. dass $\frac{\Delta t}{t}$ proportional der Zeit wachse, denn diess meint wohl Höring am Schlusse seiner Abhandlung, wenn ich seine Ausdrucksweise in die meinige übersetze. Es wäre diess mit der Thatsache des Maximums unvereinbar und diese halte ich für die bestconstatirte. Ich selbst hatte Höring's Ansicht, so lange ich meine Beobachtungen mit dem Metronom machte und daher die Versuche nicht auf sehr grosse und sehr kleine Zeiten ausdehnen konnte.

Es seien mir schliesslich einige allgemeinere theoretische Betrachtungen erlaubt.

Nach Kant[2]) ist die Zeit die Anschauungsform des inneren Sinnes, so wie der Raum die Anschauungsform des äusseren Sinnes ist. Es bedarf gegenwärtig wohl kaum mehr der besondern Bemerkung, dass man mit einer solchen Ansicht entweder provisorisch oder überhaupt auf eine Theorie des Zeitsinnes verzichte.

Der erste ernste und gediegene Versuch einer Theorie des Zeitsinnes findet sich bei Herbart.[3]) Die Zeit wie der Raum wird von Herbart psychologisch zurückgeführt auf Reihenreproductions-Gesetze. Zunächst bemerkt Herbart, dass das Innewerden des zeitlichen Verlaufes der Vorstellungen zu unterscheiden sei von eben diesem zeitlichen Verlauf. Ersteres ist durch letzteren gewiss nicht unmittelbar gegeben. Es muss durch die Zeitfolge, in der die Vorstellungen gegeben werden, an den Vorstellungen selbst eine Änderung eintreten, damit wir die Zeit inne werden. — Gesetzt, es würde nach gleichen Pausen immer dieselbe Vorstellung durch sinnliche Erregung ins Bewusstsein gehoben. Jeder neue Eindruck würde

[1]) A. a. O.

[2]) Kant, Prolegomena zu jeder künftigen Metaphysik. — Kritik der reinen Vernunft.

[3]) Herbart, Lehrbuch zur Psychologie. — Psychologie als Wissenschaft. — Über die ursprüngliche Auffassung eines Zeitmasses.

dann die bereits gesunkenen qualitativ gleichen Vorstellungen nach einem gewissen Gesetze reproduciren. Von der Art dieses Reproductionsgesetzes würde das Innewerden der Zeitfolge abhängen.

So richtig Herbart seine Untersuchung anfängt, so richtig ist es wohl auch, dass dieser Anfang noch bei weiten nicht das Ende der Theorie sein kann. Es zeigen sich bald sehr viele Schwächen.

Analog, aber wie mir scheint gelungener, ist Herbart's psychologische Raumtheorie. Das räumliche Vorstellen wird nach ihm zurückgeführt auf ein System von zahlreichen, sich durchkreuzenden, gleichzeitig nach zwei Richtungen ablaufenden Reproductionsreihen. Ich habe an einem andern Orte [1]) bereits bemerkt, dass nach Herbart's Ansicht zwar etwas dem räumlichen Vorstellen ähnliches zu Stande kommen könne, dass aber die Annahme einfacher Reihen zur Erklärung des Vorstellens von Gestalten nicht genüge. Soll man es begreiflich finden, wie man so verschiedenfarbige gleiche Gestalten als gleiche erkennt, so muss man nothwendig Doppelreihen annehmen, welche etwa durch Complication von Farben- und Muskelempfindungen entstehen, ähnlich wie dies Cornelius [2]) gethan hat. Zu dieser Ansicht, welche, wie ich gezeigt habe, sich gerade nach Herbart's Principien leicht construiren lässt, bin ich übrigens schon vor langer Zeit ganz selbstständig gelangt und sie dient eigentlich bereits meiner im Jänner 1861 publicirten Abhandlung „Über das Sehen von Lagen und Winkeln" zur Grundlage [3]).

Ähnliche Schwierigkeiten findet die Herbart'sche Zeittheorie bei der Erklärung des Vorstellens der Rhythmen (Zeitformen). Es ist nicht zu leugnen, dass man an zwei vollständig verschiedenen Melodien von gleichem Rhythmus die Gleichheit dieses Rhythmus sofort erkennt. Soll aber eine Vorstellungsreihe der andern ähnlich erscheinen, soll eine die andere begünstigen, reproduciren, so muss eine Reihe der andern Hilfen bieten. In der Qualität der Tonempfindungen können bei verschiedenen Melodien die Hilfen nicht liegen. Wir müssen also wieder daran denken, dass jede Tonempfindung sich mit irgend einer andern Empfindung complicire, und dass bei verschiedenen Melodien von gleichem Rhythmus die

---

[1]) Fichte's Zeitschrift für Philosophie, 1865.

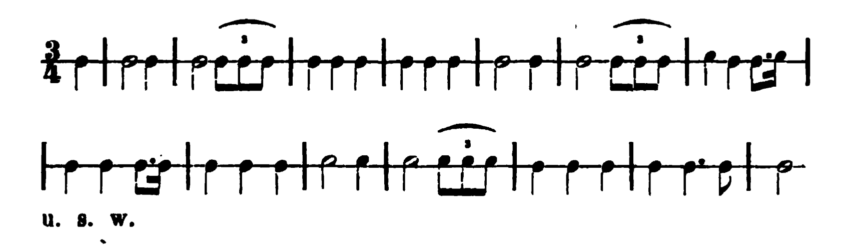
[2]) Cornelius, Theorie des Sehens.

[3]) Sitzb. d. Wien. Akad.

Reihen dieser Nebenempfindungen gleich ausfallen, wie etwa bei gleichen verschiedenfarbigen Gestalten, die Augenmuskelgefühle gleich sind. — Man kann den Rhythmus einer Melodie von den Tonempfindungen ganz loslösen, wie die Contourzeichnung von einem Gemälde, indem man sich die Melodie tonlos vorklopft. Dies wäre nicht möglich, wenn es nicht eine gewissermassen für sich selbstständige Reihe von Rhythmusempfindungen gäbe.

Als Knabe unterhielt ich mich oft mit meinen Gespielen, indem ich klopfend den Rhythmus bekannter Melodien angab und dieselben errathen liess. Kürzlich unternahm ich solche Versuche absichtlich mit Musikern. Sie fallen stets zur Befriedigung aus, wenn man nur genug charakteristische Rhythmen auswählt. Fast immer wurden z. B. folgende zwei Rhythmen errathen:

1. R. Wagner. Andante maestoso.



2. L. v. Beethoven. Andante con moto.



Solche Thatsachen beweisen eine grosse Selbstständigkeit der Rhythmusempfindung. Mit der blossen Annahme, dass qualitativ verschiedene aufeinanderfolgende Vorstellungen sich in ihrer Bewegung bestimmen, reicht man hier nicht aus. Diese Bestimmung wäre dann von der Qualität abhängig, einer jeden Reihe eigenthümlich, und könnte nicht von derselben abstrahirt werden.

Welcher Art sind nun die mit den Tonempfindungen sich associirenden Rhythmusempfindungen? Diess ist schwerer zu bestimmen, als dass es überhaupt solche geben müsse. Im Allgemeinen wird es vielleicht doch gelingen. — Was die räumliche Anschauung psychologisch möglich macht, sind die mit den Farbenempfindungen sich associirenden Muskelempfindungen des fixirenden Auges; es sind, kurz gesagt, Accommodationsempfindungen. An einem andern Orte [1]) bereits habe ich auf die bedeutende Wichtigkeit der Aufmerksamkeit für das gesammte psychische Leben und die damit eng zusammenhängende Rolle der Accommodationsmechamismen hingewiesen. Wo es Aufmerksamkeit gibt, da gibt es meiner Ansicht nach Accommodationsmechanismen und natürlich auch Accommodationsempfindungen.

Vielleicht rühren nun auch die Rhythmusempfindungen von Accommodationsapparaten her. Stellen wir uns vor, derselbe Ton wiederhole sich in abgemessenen Pausen. Er wird bei jedem neuen Eintritt die Aufmerksamkeit auf sich ziehen, er wird so zu sagen fixirt und erregt namentlich jedesmal nebenbei eine Fixationsempfindung. Ich kann mir nun wohl vorstellen, dass in dem Accommodationsapparat von dem ersten Moment an eine stätige Veränderung (Ermüdung? Nachlassen? Erholung?) eintritt. Tritt der Ton zum zweiten-, drittenmale u. s. w. ein, so trifft er je nach der Dauer der Pause den Apparat in einem andern Stadium und erregt demgemäss eine entsprechende Fixationsempfindung. Der nach gleichen Zeiten sich wiederholende Ton würde offenbar immer gleiche Empfindungen auslösen. Dem einfachsten angenehmen Rhythmus würden dann in natürlicher Weise Wiederholungen gleicher Empfindungen zu Grunde liegen, wie der Symmetrie der Gestalten und der Consonanz der Töne.

Dass bei der Wahrnehmung zeitlicher Verhältnisse die Aufmerksamkeit — Accommodation — im Spiele sei, lehrt wohl die persönliche Differenz der Astronomen [2]), welche mit Hilfe der Aufmerksamkeit bedeutend modificirt, wohl gar umgekehrt werden kann,

---

[1]) Zur Theorie des Gehörorgans. Sitzb. d. Wien. Akad. 1863.

[2]) Faye, Sur les erreurs d'origine physiologique. Comptes rendus. No. 11. 1864. — Plantamour et Hirsch, Détermination télégraphique de la difference de longitude entre les observatoires de Genève et de Neufchâtel. Genève 1864.

wie dies wohl aus den Untersuchungen von Wundt[1]), welcher die bekannte Beobachtung zum Experiment erhoben hat, hervorzugehen scheint. Auch für ein und denselben Sinn scheint es eine Art persönliche Differenz zu geben, die ebenfalls durch die Aufmerksamkeit afficirt wird. So könnte wenigstens das vielbesprochene den Chirurgen bekannte Phänomen beim Aderlassen [2]) ausgelegt werden. Ich habe einige, wie mir vorkam wohl ausgedachte, Experimente mit farbigen rotirenden Scheiben angestellt, um zu ermitteln, ob etwa für verschiedene Farbenempfindungen desselben Auges eine persönliche Differenz bestehe. Diese Versuche ergaben bisher kein positives Resultat, wesshalb ich sie nicht beschreibe.

Von Ärzten hörte ich oft, dass musikalische Geisteskranke mitunter das Rhythmusgefühl verlieren. Da Accommodationslähmungen bei solchen Kranken etwas Gewöhnliches sind, würde dies für meine Ansicht sprechen. Ich weiss nicht, wie weit in solchen Fällen der Beobachter durch die gewöhnliche Bewegungsataxie getäuscht werden kann.

Zur Erläuterung kann vielleicht noch Folgendes dienen. Analoge Veränderungen in analogen Organen gehen offenbar desto langsamer vor sich, je grösser die Organe sind. Die kleineren Accommodationsorgane der kleineren Thiere werden sich rascher verändern als jene der grossen. Man wird nicht zweifeln, dass auch die kleinern Thiere gewissermassen bewusst und überlegt handeln. Dann müssen sie aber ein ganz anderes Zeitmass, eine viel kleinere Zeiteinheit haben [3]) als die grossen, da sie in derselben Zeit ungleich mehr vornehmen. Man betrachte z. B. die raschen Bewegungen eines Insectes, die kaum mit den Augen zu verfolgen sind. Recht auffallend ist dies an Thieren derselben Art. Das Schosshündchen erscheint uns ungleich lebhafter als der Fleischerhund. Die Erklärung wäre nach meiner Ansicht selbstverständlich.

Die Physik geht darauf aus, jede Erscheinung als Function der Zeit darzustellen. Als Maass der Zeit dient die Pendelbewegung. Die

[1]) Wundt, Theorie der Sinneswahrnehmung. — Vorlesungen über die Menschen- und Thierseele. — Hartmann, Über die persönliche Differenz. Grunert's Archiv. XXX. S. 17.

[2]) Fechner, Psychophysik. II. S. 433.

[3]) C. E. v. Baer, Reden in wissenschaftlichen Versammlungen. Petersburg, 1864, I. Band.

Physik drückt also eigentlich jede Erscheinung als Function der Lage des Pendels aus. Man bemerke, dass diess auch da geschieht, wo etwa die Kräfte als Functionen der Entfernung dargestellt werden, denn der Begriff der Kraft (Beschleunigung) enthält schon die Zeit. Wenn es gelingt, jede Erscheinung als Function der Erscheinung der Pendelbewegung hinzustellen, wenn diess mit allen Erscheinungen, physischen und psychischen, gelingt, so beweist diess nur, dass alle Erscheinungen so zusammenhängen, dass jede als Function jeder andern dargestellt werden kann. Die Zeit ist also physikalisch die Darstellbarkeit jeder Erscheinung als Function jeder andern. So wird denn die Zeit auch psychologisch sich darauf reduciren, dass gewisse Vorstellungen (etwa Tonempfindungen) mit gewissen andern (etwa Accommodationsempfindungen) derart verbunden erscheinen, dass sie so zu sagen als Functionen derselben betrachtet werden können.

Zur Blutanalyse.

Von **Th. Zawarykin.**

(Vorläufige Mittheilung.)

Eine Hauptschwierigkeit bei den Versuchen über Krystallisation des Blutes, namentlich für diejenigen Blutarten, welche langsam krystallisiren, war bisher immer die schnell eintretende Fäulniss des Blutes. Es ist mir gelungen in der Vermischung des Blutes mit Äther ein Mittel zu finden, welches das Blut nicht wesentlich verändert, seine Krystallisationsfähigkeit nicht stört und die Fäulniss vollständig verhindert. Ich habe bei diesen Versuchen Pferdeblut benützt. Nachdem das Serum des defibrinirten Blutes von den sich absetzenden Blutkörperchen möglichst getrennt war, liess ich die letzteren allein mehrere Male gefrieren nach der Methode von Rollett. Das Blut wurde nach dem letzteren Aufthauen mit Äther gemischt, so dass eine Schicht Äther darüber stehen blieb. Gegenwärtig besitze ich eine Portion Blutes, welche bereits vier Wochen unter eine Schicht Äther bei Zimmertemperatur steht und alle ihre früheren Eigenschaften beibehält, d. h. keinen faulen Geruch hat, flüssig bleibt, ihre frühere Farbe besitzt, und ein Tropfen davon unter das Mikroskop gebracht, aus zahllosen Blutkrystallen besteht. Diese Eigenschaft des Äthers erlaubt jetzt Versuche anzustellen, welche früher unausführbar waren, z. B. die dialytischen Eigenschaften des Hämatokrystallin zu untersuchen, indem man das Blut und das Wasser, in welches es dialytisch übergehen soll, mit Äther bedeckt.

Mit dieser Art Versuchen bin ich im Augenblicke auch beschäftigt. Eine ausführliche Mittheilung über die so eben erwähnten Versuche, so wie die späteren Resultate werde ich die Ehre haben demnächst mitzutheilen.

Die mitgetheilten Versuche sind im physiologischen Laboratorium des Herrn Professor Helmholtz ausgeführt.

Nachweis der Erscheinung der sogenannten Pulsverspätung beim Frosche, und das Verfahren dieselbe wahrzunehmen.

Von dem c. M. Johann Czermak in Prag.

Das Gekröse kleinerer Thiere, z. B. des Frosches, eignet sich bekanntlich am allerbesten zur Beobachtung des Blutumlaufes. Ist auch das Capillarnetz hier weniger reich entwickelt als an anderen Orten (Schwimmhaut, Lunge), so lassen sich daselbst doch alle Verhältnisse des Blutlaufes in den Gefässen genau und vollständig verfolgen, und namentlich bleibt bezüglich der Untersuchung der Blutbewegung in den stärkeren und schwächeren Arterien, welche an diesem Orte so zu sagen ganz blossliegen, gar nichts zu wünschen übrig.

Schon seit längerer Zeit mit Untersuchungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Blutwelle in den Arterien beschäftigt [1]), erschien mir aus diesen und anderen Gründen das Gekröse des Frosches als ein äusserst passendes Object, um nachzusehen, ob sich auch bei einem so kleinen Thiere, trotz der unbedeutenden Länge seiner Arterienbahnen, die zuerst von Weitbrecht, Liscovius und E. H. Weber beim Menschen beobachteten Verspätungsintervalle zwischen dem Erscheinen des Pulses an in verschiedenen Entfernungen vom Herzen liegenden Arterienquerschnitten nachweisen lassen?

Zur Beantwortung dieser Frage, welche mit der Frage nach den Fortpflanzungsgesetzen und Bedingungen der Pulswelle innig zusammengehängt und von allgemeinerem Interesse ist, benützte ich folgendes Verfahren.

---

[1]) S. Mittheilungen aus dem physiologischen Privatlaboratorium von J. Czermak in Prag; Wien, 1864. Karl Czermak. 1. Heft, pag. 33.

Zunächst spritzte ich einem Frosche [1]), in den mittleren, subcutanen Lymphraum des Rückens, eine minimale Dosis Curare ein und wartete die vollständige Lähmung der willkührlichen Bewegungen ab; dann band ich das Thier in der Rückenlage an ein dünnes, schmales Brettchen fest, legte das kräftig und ungestört fortpulsirende Herz bloss und schlitzte die Bauchwand auf der rechten Seite, einige Millimeter von der Medianlinie der Länge nach auf. Das Brettchen wurde auf der schmalen langen Seite stehend so an einem Stativ befestigt, dass der Frosch in horizontaler Richtung frei schwebend, mit dem Kopfe nach links, mit der rechten Seite nach oben und mit der Bauchseite gegen das Fenster zu liegen kam.

Hierauf wurde ein Objectgläschen, welches durch einen beweglichen Arm des Statives gehalten war, gegen den Schlitz in der Bauchwand angelegt, aus letzterem eine Darmschlinge hervorgezogen, auf das Gläschen ausgebreitet und endlich das Mikroskop dessen Objecttisch abgeschraubt worden war, von hinten herzugeschoben und auf die Gefässe des Gekröses eingestellt.

Da die Herzthätigkeit und der Blutumlauf durch minimale Dosen Curare, welche schon hinreichen die willkührlichen Bewegungen vollständig zu lähmen, bekanntlich stundenlang völlig unbeeinträchtigt fortbestehen, so hatte ich nach diesen Vorbereitungen alle Musse und Bequemlichkeit nicht nur den Blutlauf in den Arterien, Capillaren und Venen zu beobachten, sondern auch das Herz und den Bulbus mit seinen Arterienstämmen, welche durch ein unter denselben durchgeschobenes Holzstäbchen über die Brustfläche herausgehoben worden waren, von oben her deutlich pulsiren zu sehen.

Indem ich nun mit dem rechten Auge durch das Mikroskop auf eine pulsirende Gekrösarterie blickte und gleichzeitig das linke, offen gehaltene Auge nach dem schlagenden Herzen mit den grossen Arterienstämmen richtete, war es ein Leichtes, eine solche Stellung der beiden Objecte und der Augen zu finden, dass das Herz so zu

---

[1]) Die zu diesen Versuchen benützten Frösche waren im Herbste vorigen Jahres eingefangen und seit jener Zeit in den Kellerräumen meines Laboratoriums in flachen, mit Wasser gefüllten Gefässen aufbewahrt worden.

sagen mitten im arteriellen Blutstrome zu schwimmen schien und beide Objecte zu gleicher Zeit vollkommen deutlich wahrgenommen werden konnten.

Man begreift, dass durch dieses Verfahren, trotz des mitunter störend eintretenden Widerstreites der Sehfelder eine sehr scharfe Auffassung und Beurtheilung der zeitlichen Aufeinanderfolge der Bewegungsvorgänge am Herzen und an den grossen Gefässstämmen einerseits, am Blutstrome der peripherischen Gekrösarterien andererseits ermöglicht war.

Beruht ja doch auf demselben Principe des Doppeltsehens eine bekannte mikrometrische Methode, deren Schärfe und Zuverlässigkeit bei hinreichender Übung von Harting hoch angeschlagen wird! —

I. Der arterielle Blutstrom im Gekröse des Frosches zeigt in einem und demselben Gefässchen unter verschiedenen Umständen beträchtliche Verschiedenheiten. Die Strömung kann nämlich:

1. so ungemein rasch und so gleichmässig sein, dass von einer mit der Pulswelle eintretenden Beschleunigung derselben kaum etwas zu sehen ist; oder

2. es ist die jedesmalige Beschleunigung der Strömung während der Systole, die Verzögerung der Strömung, während der Diastole vollkommen deutlich wahrnehmbar; die Strömung bleibt aber dabei eine continuirliche; oder

3. es geht die diastolische Verzögerung der Strömung in vollständigen Stillstand der ganzen Blutsäule über, welche sich dann nur mit jeder neuen Pulswelle stossweise weiter bewegt; oder

4. die diastolische Verzögerung der Strömung schlägt in eine mehr oder weniger bedeutende rückläufige Bewegung um, so dass die Blutsäule mit der Systole so zu sagen zwei Schritte vorwärts, mit der Diastole einen Schritt rückwärts strömt; wobei aber immer noch eine Fortbewegung des Blutes in der legitimen Richtung zu Stande kommt; oder

5. die Blutsäule oscillirt nur hin und her, ohne dabei fortzurücken; oder endlich

6. die Fortrückung der Blutsäule nimmt eine centripetale Richtung an, in welcher sie durch jede neu ankommende Pulswelle ganz umgekehrt, zum völligen Stillstand gebracht oder doch mehr oder weniger verzögert wird.

II. In allen den Fällen nun, in welchen der Einfluss der positiven Pulswellen auf die arterielle Blutströmung in irgend einer der beschriebenen verschiedenen Formen deutlich wahrnehmbar war, konnte ich mit Sicherheit constatiren, dass die Veränderungen am Blutstrome in den Gekrösarterien merklich später einzutreten begannen, als die systolische Zusammenziehung der Herzkammer und die systolische Erweiterung des Bulbus und der grossen Arterienstämme.

Es existirt somit auch beim Frosche — trotz der Kürze seiner arteriellen Blutbahn, das Phänomen der Pulsverspätung in einer sinnlich wahrnehmbaren und nicht blos theoretisch ableitbaren Form und Grösse.

Diese neue Thatsache lässt sich meines Erachtens nur dadurch erklären, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Pulswelle beim Frosche entweder überhaupt absolut geringer ist als beim Menschen, oder aber gegen die Peripherie hin, auf die Längeneinheit viel rascher abnimmt als bei diesem; denn würde weder das Eine noch das Andere der Fall sein, so könnte die Blutwelle, welche beim Menschen in einem kleinen Bruchtheil einer Secunde Bahnen von mehreren Fussen Länge durcheilt, beim Frosch keine so merkliche Zeit brauchen, um sich auf der kaum einige Centimeter langen Gefässbahn vom Herzen bis in die Gekrösarterien fortzupflanzen.

V. SITZUNG VOM 9. FEBRUAR 1865.

Herr Prof. F. Unger legt eine Abhandlung des Herrn Paul Reinsch in Erlangen vor, welche den Titel führt: *„De speciebus generibusque nonnullis novis ex Algarum et Fungorum classe."*

Herr Dr. A. Boué spricht über die Abwesenheit der Aërolithen in den geologischen Formationen, welche älter sind als die ältesten goldführenden Alluvialgebilde; ferner über die Möglichkeit der Existenz des Polareises während der Kreidezeit; weiters über den Löss und sein Nichtvorkommen in älteren Gebilden, und endlich über die Ackererde und ihren wahrscheinlichen Ursprung.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 3. Wien, 1865; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1512—1513. Altona, 1865; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LX, Nr. 3—4. Paris, 1865; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 6. Wien, 1865; 8°.

Gianelli, Giuseppe Luigi, La vaccinazione e le sue leggi in Italia. Milano, 1864; 4°.

Haughton, Samuel, Experimental Researches on the Granites of Ireland. Parts III & IV. (From the Quarterly Journal of the Geol. Soc. for November 1862 & August 1864.) 8°. — On the Tides of the Arctic Seas. Part I. 4°. — On the reflexion of Polarized Light from Polished Surfaces, Transparent and Metallic. 4°.

Herschel, Sir John Fred. William, A general Catalogue of Nebulae and Clustres of Stars, arranged in Order of right Ascension and reduced to the Common Epoch 1860. 0. (From the Philos. Transactions. Part I. 1864.) London, 1864; 4°.

Lioy, Paolo. Di una stazione lacustre scoperta nel Lago de Fimon. (Dal Vol. VII degli Atti della Soc. ital. di sc. nat.) 8°. — Sulle cause di una invasione di Ditteri della famiglia degli Empiti etc. *(Ibidem)*. Milano, 1864; 8°.

Luvini, Intorno ad un nuovo metodo per osservare le stelle cadenti. (Estr. dal Bollettino dell'Accad. delle sc. di Torino, 31 Dicembre 1864.) 8°·

Mayr, Gustav L., Diagnosen neuer Hemipteren. (Verhandlungen der k. k. zool.-botan. Ges. in Wien 1864.) 8°·

Méret, L. E., De l'instinct et de l'intelligence des animaux. Paris, 1864; 8°·

Müller, Ferdinand, Über die Vorherbestimmung der Stürme, insbesondere über die Stürme vom 1.—4. December 1863. St. Petersburg, 1864; 4°·

Reader. No. 110, Vol. V. London, 1865; Folio.

Schlagintweit-Sakünlünski, Hermann von, Meteorologische Resultate aus Indien und Hochasien. (Berichte d. physik.-mathem. Classe d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 1864. II. 3.) 8°·

Villa, Antonio, Le Cantaridi. (Estr. dal giorn. l'Illustrazione Italiana, Nr. 17, 1864.) 8°· — Le Zanzare. (Estr. dal giorn. l' Adolescenza.) 8°· — Il Congresso dei Naturalisti Svizzeri in Samaden nell'Agosto 1863. Milano, 1864; 8°· — Intorno alle stelle filanti periodiche del 10 Agosto; lettera di Caterina Scarpellini. 8°·

— G. B. Notizie sulle torbe della Brianza. 8°·

Wiener medizinische Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 10—11. Wien, 1865; 4°·

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg., Nr. 7. Gratz, 1865; 4°·

Zantedeschi, Francesco, Leggi del Clima di Milano e origine della rugiada e della brina. (Estr. dai commentari dell'Ateneo di Brescia per gli anni 1862—63—64). Brescia, 1864; 8°·

VI. SITZUNG VOM 16. FEBRUAR 1865.

— —

Herr Prof. H. Hlasiwetz übersendet die Fortsetzung einer von ihm gemeinschaftlich mit Herrn L. v. Barth ausgeführten Arbeit: „Über einige Harze."

Herr Director Dr. E. Fenzl überreicht eine vorläufige Notiz, betitelt: *„Diagnoses praeviae Pemptadis stirpium aethiopicarum novarum"*.

Der Secretär legt eine Probe von Indium vor, die er von den Entdeckern, den Herren Professoren Th. Richter und F. Reich, erhalten hat. Er zeigt das Indium-Spectrum mit einem Apparate, der in der Werkstätte des k. k. polytechnischen Institutes verfertigt wurde und besonders zum Gebrauche für Chemiker empfehlenswerth ist.

Herr Dr. Laube spricht über eine neue Encrinus-Art aus den Schichten von St. Cassian.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. December 1864. Berlin; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1514. Altona, 1865; 4°.

Braghirolli, W., Indice di libri rari italiani compilato sulle opere dei più valenti bibliografi. Mantova, 1863; 12°.

Cosmos. 2e Série, XIVe Année, 1er Volume, 6e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Frauenfeld, Georg Ritter von, Verzeichniss der Namen der fossilen und lebenden Arten der Gattung *Paludina* Lam. etc. (Verhandlungen der k. k. zool.-botan. Gesellsch. in Wien. 1864, Bd. XIV.) Wien, 1865; 8° — Das Vorkommen des Parasitismus im Thier- und Pflanzenreiche. (Festschrift zur 50jährigen Jubelfeier der naturforschenden Gesellschaft in Emden.) Wien, 1864; 8°.

Gesellschaft, k. k. zoolog.-botan., in Wien: Verhandlungen. Jahrg. 1864. XIV. Bd., 1.—4. Heft. Wien, 1864; 8°.

Gewerbe-Verein, nieder-öst. Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 7. Wien, 1865; 8°.

Jena, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem zweiten Halbjahre 1864. 4° & 8°.

Krönig, A., Wie kritisirt man chemische Lehrbücher? Eine Antikritik. Berlin, 1865; 8°. — Deutsche Homonymen, nebst Bemerkungen über Sprachlaute, namentlich über die Aussprache des *g* und die Entstehung des *sch*. (Archiv f. n. Sprachen XXXVI.) 8°.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 5. Wien, 1865; 4°.

Lioy, Paolo, Le abitazioni lacustri della età della pietra nel Vicentino. Venezia, 1865; 8°.

Moniteur scientifique. 195° Livraison. Tome VII°, Année 1865. Paris; 4°.

Reader. Nr. 111, Vol. V. London, 1865; Folio.

Wiener medizinische Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 12—13. Wien, 1865; 4°.

Über einige Harze.

(Zersetzungsproducte derselben durch schmelzendes Kali.)

Von dem w. M. H. Hlasiwetz und L. Barth.

Die chemischen Studien, welche für den Ausbau des Systems die Grundlage abgeben sollen, sind so wichtig und von so glänzenden Erfolgen begleitet gewesen, dass es fast einer Entschuldigung bedarf, sich in einer Zeit, in der das allgemeine Interesse sich auf die atomistische Structur der Verbindungen und die chemische Synthese concentrirt, Untersuchungen zuzuwenden, bei denen man von den dort gewonnenen Erfahrungen und Theorien vorerst noch keinen Gebrauch machen kann.

Inzwischen hat man sich doch an den natürlichen Producten des Pflanzen- und Thierlebens, die bisher das hauptsächlichste Untersuchungsmateriale auch für diese Studien abgegeben haben, noch lange nicht analytisch erschöpft, und eine Menge ganz wichtiger derselben sind uns noch so unverständlich, dass wir um die Erklärung der gewöhnlichsten organischen Processe noch sehr in Verlegenheit sind, und man darum ihre nähere Untersuchung nicht länger hinausschieben sollte.

Zu diesen dunklen Partien der physiologischen Chemie gehört unter Anderem auch die Bildung und chemische Natur der Harze, jener so obenhin als Auswurfsstoffe der Pflanzen betrachteten Materien, deren grosse Rolle im Leben dieser Organismen schon ihre ausserordentliche Verbreitung nicht verkennen lässt.

Was Unverdorben und Heldt über dieselben an Ansichten vorgebracht haben, ist von solcher Allgemeinheit und von so dürftigen Kenntnissen abgeleitet, dass sich heute wohl Niemand mehr damit befriedigen kann.

Weder die Entstehungsgeschichte noch der chemische Bestand der Harze ist mit diesen Ansichten zureichend erklärt, denn es verbirgt sich unter der harzartigen Beschaffenheit die grösste Mannig-

faltigkeit von Substanzen, so dass schon, seit wir im Jalappenharze und dem Scammonium wahre Glucoside kennen gelernt haben, der frühere Begriff des Harzes jede chemische Bestimmtheit verloren hat.

Wir werden zeigen, dass man aus den Harzen Zersetzungsproducte erhalten kann, welche auf die Gegenwart von Stoffen schliessen lassen, wie man sie vielfach schon kennt; denn diese Zersetzungsproducte sind keineswegs alle neu, oder bisher noch nicht dargestellt, aber unter diesen Verhältnissen noch nie beobachtet.

Wir haben nach solchen Zersetzungen übrigens erst gesucht, nachdem wir uns bei manchen Harzen durch vorläufige Versuche überzeugt hatten, dass auf dem bisher befolgten Wege durch Lösungsmittel, Bleifällungen und dergleichen, Trennungen und Isolirungen dieser Gemische keineswegs zu erzielen sind, oder doch durch sie nicht mehr zu erfahren ist, als man schon weiss. Dabei meinen wir aber nicht jene Harze, die man als Oxydationsproducte sogenannter ätherischer Öle betrachtet, wie das Copal- und Dammarharz u. s. w., an die sich unser gemeiner Terpentin anschliesst, sondern vielmehr jene, die aus vertrockneten Milchsäften stammen oder solche, die mehr extractartiger Natur sind.

Für die ersteren mag die Heldt'sche Erklärung ihrer Bildung im Allgemeinen zulässig sein, die anderen sind complicirte Gemenge, die wohl Harze der ersten Art einschliessen können, daneben aber Bestandtheile von ganz anderer Natur enthalten müssen, wie wir jetzt nach ihren Zersetzungsproducten Grund haben zu urtheilen.

Das, was wir in solcher Weise ermittelt haben, wird uns übrigens nöthigen, doch noch (vielleicht auf dialytischem Wege) auf Methoden zu sinnen, diese ursprünglichen Bestandtheile der Harze auszulösen, denn unsere Resultate, weit entfernt den Gegenstand zu erschöpfen, sind nur, wenn auch sehr bedeutsame, Fingerzeige für fernere Untersuchungen.

Vor einiger Zeit schon haben wir Mittheilungen in dieser Richtung über das Guajakharz und das Galbanum gemacht, neuerdings haben wir das dort befolgte Verfahren auch auf die Benzoë, das sogenannte Drachenblut und die Aloë ausgedehnt, von welchen wir im Nachstehenden berichten wollen. Wir fügen vorläufig hinzu, dass wir auch mit dem Gummigutt, der Myrrha und der Asafoetida uns beschäftigt haben, und können davon Resultate in Aussicht stellen.

Die nächsten Operationen waren bei allen gleich und verliefen stets unter denselben Erscheinungen, nur ist zu bemerken, dass man sie in etwas grösserem Massstabe ausführen muss, um die Producte in Mengen zu erhalten, die eine leichtere Trennung und Reinigung zulassen. Wir haben von jedem der Harze mindestens 2 Pfund angewendet und diese selbst zuvor durch Behandlung mit Lösungsmitteln angemessen gereinigt, dann wurden sie in Partien von $^1/_4$ Pfd. mit der dreifachen Menge Ätzkali verschmolzen.

In eine geräumige Silberschale wurde das feste Kali gebracht, mit wenig Wasser bis zur Lösung erhitzt, und dann das Harz hinzugegeben.

Anfangs schwimmt die erweichte Harzmasse in zähen Klumpen oben auf und die Einwirkung beginnt erst, wenn das Kali als Hydrat schmilzt.

Die Masse wird dann homogen, beginnt zu schäumen, stösst aromatisch riechende Dämpfe aus und unter einer starken Wasserstoffentwicklung wird das Harz oxydirt.

Wir haben den Process unterbrochen, wenn das starke Schäumen, während dessen die Masse mit einer Silberspatel gerührt wurde, im Abnehmen war. Allzulanges Schmelzen endigt sonst leicht mit einem Glimmen und Verkohlen derselben.

Hierauf wurde sofort in Wasser gelöst (der Menge nach etwa das Vierfache des angewandten Kali's) und mit einem entschiedenen Überschusse von verdünnter Schwefelsäure versetzt.

Hiebei scheidet sich wieder etwas Harz aus, dessen Menge übrigens nach der Natur des angewendeten Rohmateriales verschieden gross ist.

Verschmilzt man in dieser Weise Harze von der Natur des Kolophoniums, so erhält man fast die ganze Masse nach dem Absättigen wieder, und es scheint, dass die Mengen dieser Ausscheidung bei andern Harzen sich nach jenen richten, welche denselben von solchen eigentlichen Harzen beigemischt waren. Die Benzoë gab z. B. eine bedeutendere Ausscheidung als das Drachenblut, dieses mehr als das Gummigutt.

Bei jedem der bisher so behandelten Harze fanden sich in der abgesättigten Flüssigkeit beträchtliche Mengen von Essigsäure und andern flüchtigen Fettsäuren. Man kann einen Theil derselben durch Destillation der Flüssigkeit abscheiden. Bei dem Drachenblute und

der Aloë haben wir uns durch quantitative Bestimmungen des Baryum- und Silbersalzes überzeugt, dass hauptsächlich nur Essigsäure vorhanden war. Bei dem Guajak, der Benzoë und dem Gummigutt scheint sich auch Buttersäure und Propionsäure zu bilden. Neben dem charakteristischen Geruche dieser Säuren, auf deren Trennung wir nicht näher eingehen zu müssen glaubten, empfindet man stets auch jenen widerwärtigen, fäcesartigen, den man beim Schmelzen von Proteïnsubstanzen mit Kali und dem nachherigen Absättigen mit einer Säure erhält.

Die abgesättigte, von Harz und allenfalls ausgeschiedenem schwefelsaurem Kali filtrirte Flüssigkeit wurde nun dreimal mit dem gleichen Volumen Äther ausgeschüttelt. (Die ausgeschüttelten Flüssigkeiten wurden in jedem Falle zur Trockne gebracht und die Salzmasse mit Alkohol behandelt, allein wir haben uns überzeugt, dass der alkoholische Auszug nur Spuren jener Substanzen enthielt, die sich auch in der ätherischen Lösung fanden; man braucht sich daher bei der Untersuchung dieser Flüssigkeiten nicht aufzuhalten.)

Die ätherischen Auszüge wurden destillirt, der Rückstand der Destillation mit etwas Wasser versetzt, und auf dem Wasserbade die letzte Spur Äther verjagt. Beim Stehen dieser, meist etwas dicklich gewordenen gefärbten Flüssigkeit krystallisirt in der Regel schon die eine oder die andere der vorhandenen Substanzen, die in einigen Fällen abgepresst und für sich weiter behandelt wurden. In jedem dieser Auszüge befand sich ferner eine Substanz, die durch essigsaures Blei fällbar war, und die dadurch von andern nicht fällbaren abgetrennt werden konnte.

Es wurde darum mit der angemessen verdünnten Flüssigkeit diese Fällung auch vorgenommen und der Niederschlag mit Schwefelwasserstoff zersetzt. Das von der Bleifällung abgelaufene Filtrat ebenfalls mit Schwefelwasserstoff entbleit, wurde für sich behandelt. Inzwischen ist diese Trennung keineswegs eine quantitative, weil die vorhandenen Säuren einen Theil des Bleiniederschlages lösen und man muss daher die Körper, die man aus dem entbleiten Filtrate durch Abdampfen erhält, einer nochmaligen Behandlung mit Bleizucker unterwerfen.

Benzoë.

Die verwendete Benzoë war durch zweimaliges Auskochen mit kohlensaurem Kali, Auflösen des Rückstandes in Weingeist, Ab-

destilliren und Fällen mit Wasser gereiniget. Wir haben uns die Mühe gegeben, auch die Masse in Alpha-, Beta- und Gammaharz zu zerlegen, allein jedes dieser drei Harze gab dieselben Resultate, so dass wir späterhin uns mit der ersteren Reinigung begnügten.

Aus dem ätherischen Auszuge der Schmelze krystallisirt zunächst eine nicht unbeträchtliche Menge Benzoësäure, daneben aber noch zwei andere Säuren.

Da sich jedoch von allen diesen Substanzen noch ebensoviel in den Mutterlaugen befindet, so verfährt man, um die Operation zu vereinfachen, am besten so, dass man den ganzen Rückstand in warmen Wasser auflöst, mit essigsaurem Blei ausfällt, den Niederschlag gut auswäscht und unter heissem Wasser mit Schwefelwasserstoff zersetzt. Aus der filtrirten Flüssigkeit erhält man beim Eindampfen eine noch etwas gefärbte reichliche Krystallisation (*a*).

Die vom ursprünglichen Bleiniederschlage filtrirte Flüssigkeit wurde gleichfalls mit Schwefelwasserstoff behandelt und eingedampft. Aus ihr krystallisirt dann Benzoësäure neben einer zweiten Verbindung, von der man die erstere nach dem Trocknen und Zerreiben, zunächst durch wiederholtes Ausziehen mit Schwefelkohlenstoff in einem Verdrängungsapparate trennt. Den Rückstand von dieser Extraction löst man wieder in Wasser, und entfernt eine gewisse Menge des Körpers *a* durch eine neuerliche Bleifällung. Aus der Flüssigkeit, die von diesem Bleiniederschlage abläuft, wie früher angegeben abgeschieden, reinigt man die Substanz, die eine Säure ist, dadurch, dass man sie mittelst frischgefällten Kupferoxydhydrats oder kohlensauren Cadmiums, in ein Kupfer- oder Cadmiumsalz überführt. Beide Salze, besonders das erstere, krystallisiren schnell und leicht. Durch Zerlegen mit Schwefelwasserstoff isolirt man daraus die Säure, die sofort in farblosen und wohl ausgebildeten Krystallen anschiesst, welche durch einmaliges Umkrystallisiren rein erhalten werden.

Die Krystalle gehören dem monoklinoëdrischen Systeme an, und bilden häufig kurze Prismen, beschlossen von der Basis und combinirt mit dem klinodiagonalen Pinakoïd.

Sie lösen sich wenig in kaltem Wasser, leicht in heissem, sehr leicht in Alkohol und Äther. Ihre Reaction ist stark sauer. Die Säure zersetzt kohlensaure Salze mit Leichtigkeit, ist zum Theil wenigstens destillirbar, verliert beim Erhitzen bis auf 100° ihr Krystallwasser vollständig und wird matt.

Man beobachtet auch, dass sie das Krystallwasser verliert, wenn man sie mit Wasser erhitzt.

Sie schmilzt bei 210° und erstarrt dann krystallinisch. Sie gibt mit Metallsalzen keine Fällungen, reducirt in alkalischer Lösung Kupferoxyd nicht, und gibt mit Eisenchlorid eine schwach gelbliche bräunliche Färbung.

I. 0·366 Grm. bei 100° getr. Substz. gab. 0·8135 Kohlsr. u. 0·1409 Grm. Wass.
II. 0·3304 „ „ „ „ „ „ 0·7354 „ „ 0·1350 „ „
III. 0·3149 „ lufttrock. Substz. gaben bei 100° 0·0361 Grm. Wasser.
IV. 0·2606 „ „ „ „ „ „ 0·0296 „ „

	Berechnet.		I.	II.
C_7	= 84	60·9	60·6	60·7
H_6	= 6	4·3	4·3	4·5
O_3	= 48	—	—	—
	138			

	Berechnet.		III.	IV.
$C_7H_6O_3$	= 138	—	—	—
H_2O	= 18	11·5	11·5	11·4
	156			

Baryumsalz. Flache glänzende Nadeln durch Absättigen der Säure mit kohlensaurem Baryt erhalten.

I. 0·3144 Grm. bei 130° getrockn. Substanz gaben 0·4707 Kohls. u. 0·074 Wass.
II. 0·3244 „ „ 130° „ „ „ 0·1825 schwefelsauren Baryt.
II. 0·3289 „ lufttrockne Substanz gaben bei 130° getrocknet 0·0142 Grm. W.

	Berechnet.		I.	II.
C_7	= 84	40·9	40·8	—
H_5	= 5	2·4	2·6	—
Ba	= 68·6	33·4	—	33·1
O_3	= 48	—	—	—
	205·6			

	Berechnet.		III.
$C_7H_5BaO_3$	= 205·6	—	—
$\frac{1}{2}H_2O$	= 9·0	4·2	4·3
	214·6		

Kalksalz. Feine, weiche sternförmig verwachsene Nadeln, sehr löslich in Wasser.

0·293 Grm. bei 130° getrocknete Substz. gaben 0·127 Gr. schwefelsauren Kalk.

$C_7H_5CaO_3$ verlangt 12·7 Pct. Ca, gefunden 12·7.

Zinksalz. Es krystallisirt leicht und schön in breiten blätterartigen Krystallen.

Cadmiumsalz. Bildet schöne monoklinoëdrische Krystalle, isomorph mit Gyps.

I. 0·2371 Grm. bei 100° getr. Subst. gab. 0·3735 Kohlensr. u. 0·0625 Grm. Wass.
II. 0·3821 „ „ „ „ „ „ 0·1265 Gr. Cd O[1]).
III. 0·3400 „ lufttrock. Substz. gaben bei 100° 0·0745 Gr. Wasser.

	Berechnet.		I.	II.
C_7	= 84	43·5	42·9	—
H_5	= 5	2·6	2 9	—
Cd	= 56	29·0	—	29·0
O_3	= 48	—	—	—
	193			

		Berechnet.	III.
$C_7H_5CdO_3$	= 193	—	—
$3H_2O$	= 54	21·9	21·9
	247		

Bleisalz. Aus der durch Absättigen einer kochenden Lösung der Säure mit kohlensaurem Blei erhaltenen Flüssigkeit, fällt sofort nach dem Auskühlen dieses Salz in sehr schönen irisirenden, Benzoësäure ähnlichen Blättchen heraus, die abfiltrirt, und an der Luft getrocknet, vom Papier sich als eine silberglänzende Haut abheben lassen. Diese Verhältnisse machen das Salz zu einem der charakteristischesten der Säure.

I. 0·3203 Grm. bei 120° getrockneter Substanz gaben 0·1484 Grm. Bleioxyd.
II. 0·3444 „ „ lufttrockner Substanz gaben bei 120° 0·0241 Grm. Wass.

		Berechnet.	I.
C_7	= 84	—	—
H_5	= 5	—	—
Pb	= 103·6	43·1	43·0
O_3	= 48	—	—
	240·6		

		Berechnet.	II.
$C_7H_5PbO_3$	240·6	—	—
H_2O	18·	7·0	7·0
	258·6		

[1]) Die beste Art, Zink und Cadmium genau zu betimmen, ist, die ausgewaschenen Niederschläge der kohlensauren Salze in eine Platinschale zu spritzen, im Wasserbade einzudampfen und nachher zu glühen. Dieses Verfahren liefert noch genauere Resultate als das frühere von uns beschriebene. Annalen. Bd. 122, S. 104.

Kupfersalz. Aus der grünen durch Absättigen mit Kupferoxydhydrat erhaltenen Lösung schiesst sehr bald das Salz in kleinen hübschen Nadeln von lichtbläulich grüner Farbe an. Es zersetzt sich, wenn man es mit Wasser kocht, wird matt und unlöslich, wahrscheinlich in Folge der Bildung von basischem Salz.

0·3970 Grm. bei 100° getrocknete Substanz gaben 0·091 Grm. Kupferoxyd.
0·5110 „ lufttrockne Substanz gaben 0·1260 Grm. Wasser.
$C_7H_5CuO_3$ verlangt 18·9 Pct. Kupfer, gefunden 18·4 Pct.
$C_7H_5CuO_3 + 3H_2O$ verlangt 24·2 Pct. Krystallwass., gefunden wurden 24·6 Pct

Silbersalz. Es fällt schnell in glänzenden Blättchen heraus, wenn man die Lösung der Säure mit feuchtem Silberoxyd sättigt und filtrirt.

Es schmilzt leicht bei gelindem Erhitzen, und hinterlässt weiterhin mattes Silber.

$C_7H_5AgO_3$ verlangt 44·1 Pct. Silber, gefunden wurden 43·9 Pct.
$C_7H_5AgO_3 + 2H_2O$ verlangt 12·8 Pct. Krystallwasser, gefunden wurden 12·6 Pct.

Die Formel, die unsere Analysen ergeben, ist die der Salicylsäure, Oxybenzoësäure, und der zuletzt von Saytzeff und Fischer untersuchten Paraoxybenzoësäure (Annalen, Bd. 127, S. 130 u. 137).

Ihre Eigenschaften und Verhältnisse sind genau dieselben wie die der Paraoxybenzoësäure und wir würden sie mit dieser ohne weiters für identisch erklärt haben, wenn wir nicht im Krystallwassergehalte und der Krystallform des Cadmiumsalzes dieser, wie Saytzeff und Fischer angeben, für die Paraoxybenzoësäure charakteristischen Verbindung, eine Differenz gefunden hätten. Das paraoxybenzoësaure Cadmium krystallisirt in grossen deutlichen Rhomboëdern und enthält 2 Molecüle Krystallwasser.

Das Salz unserer Säure krystallisirte in monoklinoëdrischen Formen und enthielt 3 Molecüle Krystallwasser.

Nach einem Vergleiche unserer Säure mit der im Laboratorium zu Marburg dargestellten, den Herr Prof. Kolbe vorzunehmen so gütig war, liegt hier übrigens doch eine Indentität vor, und die, bei diesem Salze beobachteten Unterschiede mögen darauf zurückzuführen sein, dass das erstere schnell aus warmer concentrirter Lösung, das andere langsam aus verdünnter kalter Lösung krystallisirte.

Von ähnlichen Verhältnissen mag es abhängen, dass unser Silbersalz, welches durch Absättigen der siedenden Säurelösung mit

Silberoxyd dargestellt war, nur zwei Molecüle Krystallwasser enthielt, während das von Saytzeff durch Zersetzen des Ammoniaksalzes mit salpetersaurem Silber bereitete 2½ Molecüle Wasser einschloss.

Zwei Versuche, die wir mit unserer Säure noch ausgeführt haben, sind mit der Paraoxybenzoësäure nicht angestellt: die trockene Destillation derselben und ihre Behandlung mit Brom.

Bei der ersteren erhält man ein, schon im Retortenhalse erstarrendes Öl, während ein brauner geblähter Rückstand hinterbleibt. Die Krystalle sind feucht von einer Flüssigkeit, die nicht leicht etwas anderes sein kann, als Phenylalkohol. Auch „die Paraoxybenzoësäure gibt beim Schmelzen den Geruch nach Phenylsäure aus und erleidet auch bei behutsam geleitetem Sublimationsprocesse eine Zersetzung in Kohlensäure und Phenylsäure" (Saytzeff).

Zwischen Papier gepresst und in siedendem Wasser gelöst, worin sie übrigens schwerer löslich sind, als die ursprüngliche Säure, geben sie beim Auskühlen der Lösung meistens zuerst eine flockige, krystallinische Ausscheidung und erst später grössere Krystalle.

Man fand übrigens in denselben wieder 11·6 Pct. Krystallwasser, 60·8 Pct. Kohlenstoff und 4·5 Pct. Wasserstoff; sie gaben ferner mit Brom dasselbe Product, wie die ursprüngliche Säure.

Versetzt man eine nicht zu verdünnte kalte Lösung dieser mit gesättigtem Bromwasser, so entsteht sofort ein flockiger, weisser Niederschlag. Man hört mit dem Bromzusatze auf, wenn die Flüssigkeit nicht mehr getrübt wird und ihre Farbe einen Überschuss von Brom verräth. Das farblose Product ist in Wasser unlöslich und wird aus verdünntem Alkohol in weichen, langen, haarförmigen Nadeln erhalten, die die ganze Flüssigkeit breiig erfüllen. Beim Trocknen schwindet sein Volumen beträchtlich, und es erscheint dann als eine weiche, leichte, blendend weisse, verfilzte Masse. Der Körper schmilzt, erstarrt krystallinisch und ist unverändert destillirbar.

Die Analysen führen zu der Formel des dreifach gebromten Phenylalkohols. Behandelt man ihn mit Natrium-Amalgam, und versetzt die alkalische Flüssigkeit mit einer Säure, so scheidet sich ein Öl ab von dem charakteristischen Geruch dieses Alkohols. In der Flüssigkeit, die vom Bromproducte abläuft, war kein anderer fester

Körper nachweisbar und seine Bildung kann daher durch die Gleichung ausgedrückt werden:

$$C_7H_6O_4 + 6Br = C_6H_3Br_3O + 3HBr + CO_2.$$

0·4048 Grm. Substz. (im Vacuum getrockn.) gab. 0·3273 Kohlsr. u. 0·0481 Wass.
0·3020 „ „ „ „ „ „ 0·5120 Bromsilber.

		Berechnet.	Gefunden.
C_6 =	72	21·8	22·0
H_3 =	3	0·9	1·3
Br_3 =	240	72·5	72·2
O	16	—	—
	331		

Die rohe Krystallisation, die durch Zersetzen des Bleisalzes erhalten war, und die wir mit *a* bezeichet haben, enthält auch noch Spuren von Benzoësäure, die man zunächst mit Schwefelkohlenstoff entfernt. Alsdann löst man das Ganze im warmen Wasser. Hiebei bleibt ein sehr kleiner Theil ungelöst (*b*) und wird abfiltrirt.

Die abgelaufene gefärbte Flüssigkeit lässt sich besser als durch Kohle so entfärben, dass man Bleizuckerlösung hineintröpfelt und unter fortwährendem Rühren die ersten Fällungen wieder auflöst. Man bringt dann weiterhin so viel hinzu, dass eine geringe Fällung bleibend wird; diese ist sehr gefärbt und enthält den grössten Theil der verunreinigenden Substanzen. Man filtrirt sie ab und behandelt das Durchlaufende mit Schwefelwasserstoff, dadurch entfärbt sich die Flüssigkeit ausserordentlich schnell und liefert beim Verdunsten eine nur ganz schwach gelblich gefärbte Krystallisation, die, wiederholt man diese Behandlung, ganz farblos erhalten wird.

Die Krystalle sind kurze Prismen und zeigen, was die qualitativen Reactionen angeht, beinahe alle Eigenschaften der Protocatechusäure, die wir auch aus Guajak erhalten haben.

Allein die mit Substanzen von mehreren Bereitungen ausgeführten Analysen stimmten sehr wenig mit der Formel dieser Säure, so gross auch ihre Übereinstimmung untereinander war, und liessen darum auf einen Gehalt an einem andern Körper schliessen, der durch Krystallisation nicht zu beseitigen war. Die Analysen gaben Zahlen, welche auf die Formel $C_{14}H_{12}O_7$ passten, das ist $C_7H_6O_3 + C_7H_6O_4$.

Eine Beimischung der vorigen Säure wurde darum wahrscheinlich, und in der That fanden wir bald, dass die Substanz mit Brom-

wasser eine flockige Fällung gab wie die Paraoxybenzoësäure, aus welcher durch Reduction mit Natrium-Amalgam auch wieder ein, seinem Geruche nach als Phenylalkohol erscheinendes Öl erhalten wurde. Wir benützten diess als Mittel, die Protocatechusäure dadurch zu trennen, die mit Bromwasser keine Fällung gibt. Das Filtrat von dem flockigen Bromproducte wurde mit Natrium-Amalgam entbromt, und gab mit Schwefelsäure angesäuert, mit Äther ausgeschüttelt, aus dem mit Wasser verdünnten Destillationsrückstande dieses Auszuges mit Bleizuckerlösung einen Niederschlag, aus welchem eine krystallisirte Säure von den schon bekannten Eigenschaften der Protocatechusäure erhalten wurde, deren Menge aber leider nicht genügte, um durch Zahlen die Zusammensetzung derselben zu beweisen.

Der Fall, dass hier eine lose Verbindung zweier Säuren vorliegt, hätte in der von Kolbe und Lautemann aus Benzoë erhaltenen Benzoë-Zimmtsäure (Annalen, Bd. 119, S. 139) seinesgleichen, und für eine solche spricht jedenfalls so wie dort die Constanz der Zusammensetzung, von welcher sie bei verschiedenen Bereitungen immer wieder erhalten wurde.

I. 0·2935 Grm. bei 100° getr. Substz. gab. 0·6168 Grm. Khlsr. u. 0·1080 Gr. W.
II. 0·2928 „ „ „ „ „ „ 0·6170 „ „ „ 0·1130 „ „
III. 0·2835 „ „ „ „ „ „ 0 5937 „ „ „ 0·1088 „ „
IV. 0·3210 „ „ „ „ „ „ 0·6710 „ „ „ — —
V. 0·3306 „ lufttr. Substz. verloren bei 100° 0·0371 Grm. Wasser.
VI. 0·3300 „ „ „ „ „ „ 0·0368 „ „
VII. 0·3290 „ „ „ „ „ „ 0·0362 „ „
VIII. 0·3183 „ „ a „ „ „ 0·0348 „ „

		Berechnet.	I.	II.	III.	IV.
C_{14}	= 168	57·5	57·3	57·5	57·1	57·0
H_{12}	= 12	4·1	4·1	4·3	4·3	—
O_7	= 112	—	—	—	—	—
	292					

		Berechnet	V.	VI.	VII.	VIII.
$C_{14}H_{12}O_7$	= 292	—	—	—	—	—
$2H_2O$	= 36	11·0	11·2	11·1	11·0	10·9
	328					

Versetzt man eine heisse Lösung dieser Säure mit essigsaurem Blei in kleinen Partien, so lange sich der weisse Niederschlag immer wieder auflöst und filtrirt dann ab, so krystallisirt aus dem Filtrate

beim gelinden Verdunsten ein Bleisalz in schönen farblosen körnigen Krystallen.

In derselben Form erhält man das Salz auch, wenn man den, durch einen Überschuss des Fällungsmittels erzeugten Niederschlag in verdünnter Essigsäure löst; das Salz zeigte alle Eigenschaften desjenigen, welches wir seiner Zeit aus der Protocatechusäure des Guajak's beschrieben haben [1]) und welches auch von Strecker aus der Protocatechusäure der Piperinsäure dargestellt worden ist.

Allein durch Auflösen desselben in verdünnter Essigsäure und Zersetzen mit Schwefelwasserstoff oder Schwefelsäure lässt sich keine reine Protocatechusäure gewinnen, sondern man erhält neuerdings Krystalle einer Verbindung von Protocatechusäure mit der Säure $C_7H_6\Theta_3$, deren Lösung mit Bromwasser eine flockige Fällung von Tribromphenylalkohol gibt.

Die Zusammensetzung des Bleisalzes entspricht auch sehr gut der combinirten Formel $C_{14}H_{10}Pb_2\Theta_7$

0·3195 Grm. bei 120° getr. Substz. gab. 0·3914 Grm. Kohlsr. u. 0·063 Grm. Wass
0·3516 „ „ „ „ „ „ 0·1592 „ Bleioxyd.

		Berechnet.	Gefunden.
C_{14}	= 168	33·8	33·4
H_{10}	= 10	2·0	2·2
Pb_2	= 207·2	41·7	42·0
Θ_7	= 112	—	—
	497·2		

0·3433 Grm. lufttrockn. Substz. gaben bei 120° getrockn. 0·0238 Grm. Wasser.

		Berechnet.	Gefunden.
$C_{14}H_{10}Pb_2\Theta_7$	= 497·2	—	—
$2H_2\Theta$	= 36	6·8	6·9
	533·2		

Wir haben uns noch auf anderem Wege überzeugt, dass neben der Paraoxybenzoësäure der zweite Bestandtheil dieser Säure die Verbindung $C_7H_6\Theta_4$ ist. Destillirt man sie nämlich für sich, so erhält man eine ölige Flüssigkeit vom Geruche des Phenylalkohols, in der sich nach kurzer Zeit Krystalle bilden. Presst man diese von den

1) In der Beschreibung der Bleiverbindung, die wir aus der Protocatechusäure des Guajakharzes erhalten haben, ist ein Schreibfehler stehen geblieben; die, dort für das metallische Blei angeführte Zahl soll den Gehalt an Bleioxyd ausdrücken. Die berechnete Menge Bleioxyd ist 40·6 Pct.

ölig bleibenden Mutterlaugen ab, löst sie in Wasser, filtrirt die trübe Flüssigkeit durch ein nasses Filter, so erhält man bei starker Concentration eine gemischte Krystallisation, die sich weiterhin durch Behandeln mit kaltem Wasser in ihre Bestandtheile trennen lässt; in Lösung geht eine Substanz, welche die Reactionen des Hydrochinons zeigt, zurückbleiben Krystalle, die in kaltem Wasser schwer löslich sind, und die Eigenschaften derjenigen besitzen, welche man durch trockene Destillation der Paraoxybenzoësäure erhält.

Wir konnten mit denselben auch das für die Säure ziemlich charakteristische Bleisalz darstellen.

Endlich versuchten wir auch eine Trennung der Säure $\Theta_{14}H_{12}\Theta_7$ durch nochmaliges Schmelzen mit Ätzkali, allein sie ist uns nicht gelungen, und wenngleich die Analysen des erhaltenen Productes einen um 1—2 Pct. niederen Kohlenstoffgehalt zeigten, so waren doch die qualitativen Reactionen ganz dieselben geblieben, und es scheint daher, dass sich nur eine kleine Menge der in der Verbindung enthaltenen Paraoxybenzoësäure zersetzt hat, die von den beiden constituirenden überhaupt die zersetzlichere scheint, obwohl auch sie, wie uns ein anderer Versuch lehrte, ziemlich langes Schmelzen mit Kali verträgt, und sich insoferne der Protocatechusäure ähnlich verhält, von welcher wir dasselbe früher schon beobachtet hatten. (Auch Salicylsäure lässt langes Schmelzen mit Kali ungeändert.)

Von der Substanz, die wir im Vorstehenden mit *b* bezeichnet haben, die bei dem Auflösen der rohen Krystallisation der eben abgehandelten Säure zurückbleibt, erhielten wir immer nur so kleine Mengen, dass wir bis jetzt etwas Bestimmtes über ihre Natur und Formel nicht mittheilen können. Sie ist sehr schwer löslich, kann aber doch aus verdünntem Alkohol in Krystallen erhalten werden.

Unter ihren Reactionen ist eine, die sie besonders kennzeichnet: sie gibt mit Eisenchlorid eine intensiv schön rothe Färbung und ähnelt überhaupt jener Verbindung, die der Eine von uns in Gemeinschaft mit Dr. Gilm als Zersetzungsproduct des Berberins erhalten hat, und welche mit der Opiansäure homolog zu sein scheint. Wir haben auch Analysen vor uns, welche dieser Ansicht günstig sind, inzwischen enthalten wir uns vorläufig hierüber eines bestimmten Urtheils. Wir hoffen später auf den Körper zurückzukommen, der

sich auch, leider in ebenso kleinen Mengen nur, bei der Zersetzung des Drachenblutes und Gummigutts erhalten lässt.

Neben diesen drei bisher abgehandelten Substanzen befindet sich unter den Zersetzungsproducten des Benzoëharzes auch noch Brenzcatechin.

Wir fanden es in den Mutterlaugen, aus welchen die rohe Paraoxybenzoësäure herauskrystallisirt war. Die Mutterlaugen, die noch eine sehr intensive Färbung mit Eisenchlorid geben, dicklich und nicht leicht krystallisirbar sind, geben dasselbe an Äther ab, nachdem man sie mit kohlensaurem Natron abgesättigt hat. Die letzten Reste der übrigen Verbindungen und die kleinen Mengen von Essigsäure, die noch in diesen Mutterlaugen sich befinden, bleiben so in der wässerigen Flüssigkeit. Das Rohproduct, durch Destillation gereinigt, hatte alle charakteristischen Eigenschaften des Brenzcatechins und vollständig seine Zusammensetzung.

0·2766 Grm. Substz. gaben 0·6654 Grm. Kohlensr. u. 0·136 Grm. Wasser.

	Berechnet.	Gefunden.
$C_6 = 72$	65·5	65·6
$H_6 = 6$	5·5	5 5
$O_2 = 32$	—	—
110		

Was die Mengenverhältnisse der untersuchten Substanzen angeht, so erhielten wir aus einem Pfund Harz etwa 28 Gramm. der Säure $C_{14}H_{12}O_7$, 6—8 Gramm. Paraoxybenzoësäure, 3 Gramm. Brenzcatechin, und 10—12 Gramm. Benzoësäure.

Diese Mengen sind nicht unbeträchtlich, wenn man berücksichtigt, dass von der Benzoë beim Behandeln mit Kali und Absättigen der Schmelze mindestens die Hälfte als unzersetztes Harz sich wieder ausscheidet.

Drachenblut.

Wir haben zwei Sorten dieses Harzes untersucht, dasjenige, welches in Stücken und jenes, welches in Stangen im Handel vorkommt, konnten aber nicht ermitteln, von welcher Stammpflanze dieselben gewonnen waren. (Bekanntlich werden als Drachenblut liefernd *Calamus draco*, *Dracena draco* und *Pterocarpus draco* genannt.)

Gewiss ist, dass die verschiedenen Sorten bei der von uns eingeschlagenen Verfahrungsweise quantitativ wenigstens verschiedene Resultate gaben.

Das Rohmaterial haben wir zuerst durch Auflösen in Weingeist, Abdestilliren der Tinctur und Ausfällen des Destillationsrückstandes mit Wasser gereiniget.

Wir wollen gleich bemerken, dass in einem Fall das Hauptproduct der Zersetzung aus Paraoxybenzoësäure, in einem andern aus Phloroglucin bestand. In diesem letzteren Falle erhielten wir fast gar nichts von dieser Säure, dagegen war die Ausbeute an Phloroglucin merkwürdig gross.

Ein Civilpfund gereinigten Harzes gab circa 40 Gramm. rohes Phloroglucin, daneben etwa 20 Gramm. Benzoësäure, ausserdem fanden sich kleine Mengen von Oxalsäure und, in jenem Falle, wo die Menge der Paraoxybenzoësäure über die des Phloroglucins überwog, auch nicht unbeträchtliche Mengen der früher beschriebenen combinirten Säure $C_{14}H_{12}O_7$, nebst Spuren des Körpers mit der rothen Eisenreaction, den wir beim Benzoëharz gleichfalls schon genannt haben. Endlich gab jene Harzsorte, welche soviel Phloroglucin lieferte, noch eine geringe Menge eines neuen Körpers *c*, während die Säure $C_{14}H_{12}O_7$ nur spurenweise vorhanden war.

Im ersten Falle, wo die Menge der Paraoxybenzoësäure grösser war, wurde die rohe Krystallmasse, wie sie unmittelbar aus den ätherischen Auszügen erhalten war, in Wasser gelöst, und mit Bleizucker behandelt. Aus dem Niederschlag wurde wie früher die Säure $C_{14}H_{12}O_7$ erhalten, daneben kleine Mengen des Körpers mit der rothen Eisenreaction. Die Analysen der ersteren, bei 120° getrockneten Säure gaben:

			Mittel der Säure aus Benzoë.
C	= 57·0	57·0 Pct.	57·2 Pct.
H	= 4·3	4·8 „	4·2 „

die lufttrockene Substanz verlor 10.8 Pct. Wasser.

Alle Reactionen und sonstigen Verhältnisse liessen nicht verkennen, dass diese Säure mit der aus Benzoë erhaltenen identisch sei. Aus der vom Bleiniederschlage abgelaufenen Flüssigkeit wurde nach dem Entbleien derselben die Paraoxybenzoësäure, die Benzoësäure und das Phloroglucin gewonnen, daneben befindet sich auch noch eine gewisse Menge der früher erwähnten gemischten Säure.

Aus der rohen Krystallisation entfernt man zunächst die Benzoësäure durch Schwefelkohlenstoff, löst hierauf den Rückstand wieder in Wasser, fällt mit Bleizucker (wodurch man den Rest von $\Theta_{14}H_{12}\Theta_7$ auslöst), filtrirt, entbleit das Filtrat mit Schwefelsäure, sättigt es mit Soda ab, und schüttelt es mit Äther aus, der das Phloroglucin aufnimmt; die ausgeschüttelte wässrige Flüssigkeit wird jetzt wieder angesäuert und derselben durch neuen Äther die Paraoxybenzoësäure entzogen.

Die Reinigung derselben, so wie die des Phloroglucins geschah nach schon früher angeführten Methoden.

Die Identität dieser Producte wurde durch sorgfältige vergleichende Reactionen und Analysen festgestellt. Das getrennte Phloroglucin gab:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{C} = 57\cdot0 & & 57\cdot1 \\ \mathrm{H} = \ \ 4\cdot9 & & \ \ 4\cdot8 \end{array}\right\} \text{berechnet,}$$

die lufttrockene Substanz verlor bei 100° 22·1 Pct. Wasser, berechnet 22·2 Pct.

Die Paraoxybenzoësäure gab getrocknet folgende Zahlen:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathrm{C} = 60\cdot9 & & 60\cdot9 \\ \mathrm{H} = \ \ 4\cdot5 & & \ \ 4\cdot3 \end{array}\right\} \text{berechnet,}$$

die lufttrockene Substanz verlor bei 100° 11·3 Pct. Wasser, berechnet 11·5 Pct.

Mit *c* haben wir vorhin einen Körper bezeichnet, der in einem zweiten Versuche gefunden wurde.

Die Hauptmasse des Phloroglucins, die dabei gleich aus dem ätherischen Auszuge auskrystallisirt war, wurde abgepresst, die Mutterlauge wie gewöhnlich mit essigsaurem Blei behandelt, der sehr geringe Niederschlag, der von der Säure $\Theta_{14}H_{12}\Theta_7$ und von Protocatechusäure herrührte, abfiltrirt, das Filtrat mit Schwefelsäure vom Blei befreit und wieder eingedampft. Es krystallisirte nun noch eine gewisse Menge von Phloroglucin und Benzoësäure, und als auch diese wieder entfernt waren, bildete sich in der dicklichen Mutterlauge eine neue Krystallkruste von grosser Löslichkeit in kaltem Wasser, die dadurch nach vielem Umkrystallisiren von den letzten Resten von Phloroglucin und Benzoësäure befreit werden konnte, die ihr anfangs noch beigemischt waren. Behandeln mit Kohle lieferte zuletzt die Substanz auch farblos. Ihre Menge war nicht gross und durch die langen Reinigungsoperationen verringerte sie sich so, dass

sie zuletzt nur zu wenigen analytischen Versuchen hinreichte. Sie gibt krümliche efflorescirende Krystallvegetationen, die man unter dem Mikroskop als feine Nadeln erkannte. Sie ist von schwach bitterem Geschmack, sehr löslich schon in kaltem Wasser, neutraler Reaction, nicht fällbar durch Metallsalze und gibt mit Eisenchlorid eine schön blaue, aber nicht sehr intensive und bald missfarbig werdende Färbung. Sie reducirt in alkalischer Lösung Kupferoxyd und ebenso eine Lösung von Silbernitrat beim Erwärmen.

Sie erstarrt nach dem Schmelzen strahlig krystallinisch und scheint zum Theil wenigstens sublimirbar zu sein.

Ihr Gewicht vermindert sich bei 120° so wenig, dass man sie für krystallwasserfrei ansehen muss.

Die Verbrennungen gaben:

I. 0·3007 Grm. bei 120° getr. Substz. gab. 0·6548 Grm. Kohlsr. u. 0·1602 Wass.
II. 0·2903 „ „ „ „ „ „ 0·6284 „ „ „ 0·1486 „

	I.	II.
C =	59·4	59·0
H =	5·9	5·7.

Diesen Zahlen entspricht am besten die Formel $C_9H_{10}O_4$, die auch die der Everninsäure und der Veratrumsäure ist.

		Berechnet.	Mittel des Versuchs.
C_9	= 108	59·3	59·2
H_{10}	= 10	5·5	5·8
O_4	= 64	—	—
	182		

Wir vermutheten, sie möchte vielleicht $\left.\begin{matrix}C_7H_4O_2\\ H.C_2H_5\end{matrix}\right\}O_2$, der Äther der Protocatechusäure sein, dessen Bildung während der Operation mit Äther bei Gegenwart von Schwefelsäure (und wohl auch von Salzsäure, die von dem Chlorkaliumgehalte des käuflichen Ätzkalis herrühren konnte), möglich gewesen wäre. Allein wir konnten durch neues Schmelzen mit Kali daraus keine Protocatechusäure abscheiden.

Die Substanz ist aber dadurch zerlegbar, in einen durch Bleizucker fällbaren, und einen davon nicht gefällten Körper. Der Versuch musste mit so geringen Mengen Material angestellt werden, dass die Producte nicht näher untersucht werden konnten. Die Substanz aus dem Bleisalz gab mit Eisenchlorid eine röthliche Farbenreaction, diejenige aus der abgelaufenen Flüssigkeit war leicht kry-

stallisirbar, süss und etwas bitter zugleich, und könnte leicht Phloroglucin enthalten. Ihre Lösung wurde von Eisenchlorid gebläut [1]).

Die unter den Zersetzungsproducten des Drachenblutes angeführte Oxalsäure, befindet sich in dem Salzrückstand, den man durch Abdampfen der mit Äther ausgeschüttelten Flüssigkeit erhält. Wir haben diesen mit Weingeist ausgezogen, aber ausser der Oxalsäure nur spurenweise das erhalten, was wir im ätherischen Auszuge schon gefunden hatten.

Aloë.

Von H. Hlasiwetz.

Die verwendete Drogue war Socotora Aloë, die sich in heissem Wasser vollständig löste.

Eine vorausgehende Reinigung des Rohmaterials ist (obwohl sie einmal vorgenommen wurde) hier kaum nöthig und ändert nichts an dem Verlauf der Erscheinungen und den erhaltenen Producten.

Das Schmelzen mit Kali muss wegen des Schäumens sehr gut überwacht werden und wurde fortgesetzt, bis der Schaum stark einsank, was (bei Anwendung von 10 Loth Aloë) nach etwa einer halben Stunde der Fall war.

Der ätherische Auszug der, durch Absättigen und Filtriren der Schmelze erhaltenen Flüssigkeit gibt bei angemessener Concentration sehr bald eine bedeutende Krystallisation von Paraoxybenzoë-Säure. Ein Pfund Aloë lieferte an 34 Gramm. Rohproduct, und sie ist gewiss das beste Material, sich schnell eine grössere Menge dieser Säure zu bereiten.

Es war leicht, sich nach der Reinigung derselben von ihrer Identität mit der aus Benzoë und Drachenblut erhaltenen zu überzeugen.

---

[1]) Die ursprüngliche Substanz lässt sich mit Brom in einen im Wasser unlöslichen, aus verdünntem Alkohol in Nadeln krystallisirenden Körper überführen, welcher 64·5 Pct. Brom enthielt. Die Formel

$$C_9H_6Br_4O_4$$

verlangt 64·3 Pct. Brom.

Die Analysen gaben auch ganz übereinstimmende Resultate:

I. 0·318 Grm. Substz. (bei 120° getr.) gab. 0·7100 Kohlsr. u. 0·128 Grm. Wass.
II. 0·3165 „ „ „ 100° „ „ 0·701 „ „ 0·125 „ „
II. 0·4145 „ lufttrockener Substanz verloren 0·0484 Grm. Wasser.

$C_7H_6O_3$	I.	II.
C = 60·9	60·8	60·5
H = 4·3	4·4	4·3.

Der gefundene Krystallwassergehalt betrug 11·6 Pct., berechnet ist 11·5 Pct.

Das Silbersalz gab 43·9 Pct. Silber statt 44·1 Pct. berechnet. Das Krystallisationsvermögen der Säure ist so gross, dass nur Spuren derselben in den Mutterlaugen sich befinden, wenn sie mehrere Tage stehen gelassen werden.

Nach dem Verdünnen mit Wasser und Versetzen mit Bleizuckerlösung, fällt ein brauner backender Niederschlag, der im wesentlichen nichts ist als durch etwas harzige Substanz verunreinigtes oxalsaures Bleioxyd.

Die von diesem abfiltrirte, mit Schwefelwasserstoff entbleite Flüssigkeit enthält nun noch einen zweiten interessanten Körper, dessen Vorkommen unter den Zersetzungsproducten eines Harzes nur darum weniger auffällig ist, als früher bei dem Galbanum eine, dem Orcin homologe Verbindung gefunden worden war. Der aus der Aloë erhaltene Körper ist nämlich nichts anderes als Orcin selber.

Man gewinnt es, indem man die, bis zum Syrup eingedampfte Flüssigkeit entweder direct der Destillation unterwirft, oder durch Ausschütteln derselben mit Äther, nachdem man zuvor mit Soda abgesättiget hat. Der letztere Weg liefert das Product schneller rein, während das, auf dem ersteren gewonnene leicht Spuren von Paraoxybenzoësäure enthalten kann und ausserdem von einem gleichzeitig gebildeten öligen Nebenbestandtheile getrennt werden muss.

Nachdem man bei der Destillation die ersten wässerigen, viel Essigsäure enthaltenden Parthien gesondert aufgefangen hat, destillirt ein Öl, welches in flachen Schalen sehr bald krystallinisch erstarrt.

Die Masse löst sich in lauem Wasser mit Hinterlassung öliger Tropfen. Die Lösung durch nasse Filter so lange filtrirt, bis sie vollkommen klar ist, und auf dem Wasserbade stark eingeengt,

erstarrt in kurzer Zeit zu einem Brei nadelförmiger Krystalle. Diese wurden zuerst in Leinwand, dann zwischen Papier in einer Schraubenpresse abgepresst und neuerdings aus einem Retörtchen destillirt.

Anfangs entwich das Krystallwasser, weiterhin destillirte die Substanz wasserfrei, als farbloses erstarrendes Öl, mit Hinterlassung eines ganz geringen braunen Rückstandes. Spuren von Paraoxybenzoësäure entfernt man durch Auflösen des Destillats in Wasser, Versetzen der Lösung mit kohlensaurem Natron bis zur schwach alkalischen Reaction und Ausschütteln derselben mit Äther. In der ätherischen Lösung hat man dann das Orcin, welches aus derselben in bekannter Weise leicht gewonnen werden kann.

Das Pfund Aloë lieferte 10—11 Gramm. reiner Substanz, der keine von allen den Eigenschaften fehlte, die man vom Orcin kennt.

Sie krytallisirte mit einem Molecül Krystallwasser und bei der Analyse der entwässerten Substanz wurden Zahlen erhalten, die genau der Formel $C_7H_8O_2$ entsprachen.

I. 0·332 Grm. krystall. Substanz verloren bei 100° 0·042 Grm. Wasser.
II. 0·352 „ wasserfr. „ gab. 0·8715 Grm. Kohlsr. u. 0·209 Grm. Wass.

	Berechnet.	Gefunden.
C_7 = 96	67·7	67·5
H_8 = 8	6·5	6·6
O_2 = 32	—	—
136		

	Berechnet.	Gefunden.
$C_7H_8O_2$ = 136	—	—
H_2O = 18	12·6	12·6
154		

Es wurde ferner die Bromverbindung dargestellt und in ihr 65·7 Pct. Brom gefunden, während die Rechnung 66·5 Pct. verlangt.

Auch die, von de Luynes[1]) zuletzt beschriebene Verwandlung des Orcins durch Salpetersäure-Dämpfe in einen, sich mit rother Farbe lösenden Körper, so wie die Verbindungsfähigkeit mit schwefelsaurem Chinin wurde bestätigt gefunden[2]).

[1]) Annalen der Chemie u. Ph. Bd. 130, S. 31.

[2]) Diese Verbindung, die de Luynes nur als ein festwerdendes Öl beschreibt, wurde übrigens in schönen Krystallen erhalten, wenn das angewandte Orcin ganz rein war.
Beim Vermischen von nicht allzu concentrirter Lösung desselben mit einer concentrirten Lösung von schwefelsaurem Chinin, die mit einigen Tropfen verdünnter

Es wäre möglich, dass die Paraoxybenzoësäure und das Orcin, Zersetzungsproducte der Aloëresinsäure Kosmann's sind: (Chem. Centralblatt 1864, S. 345).

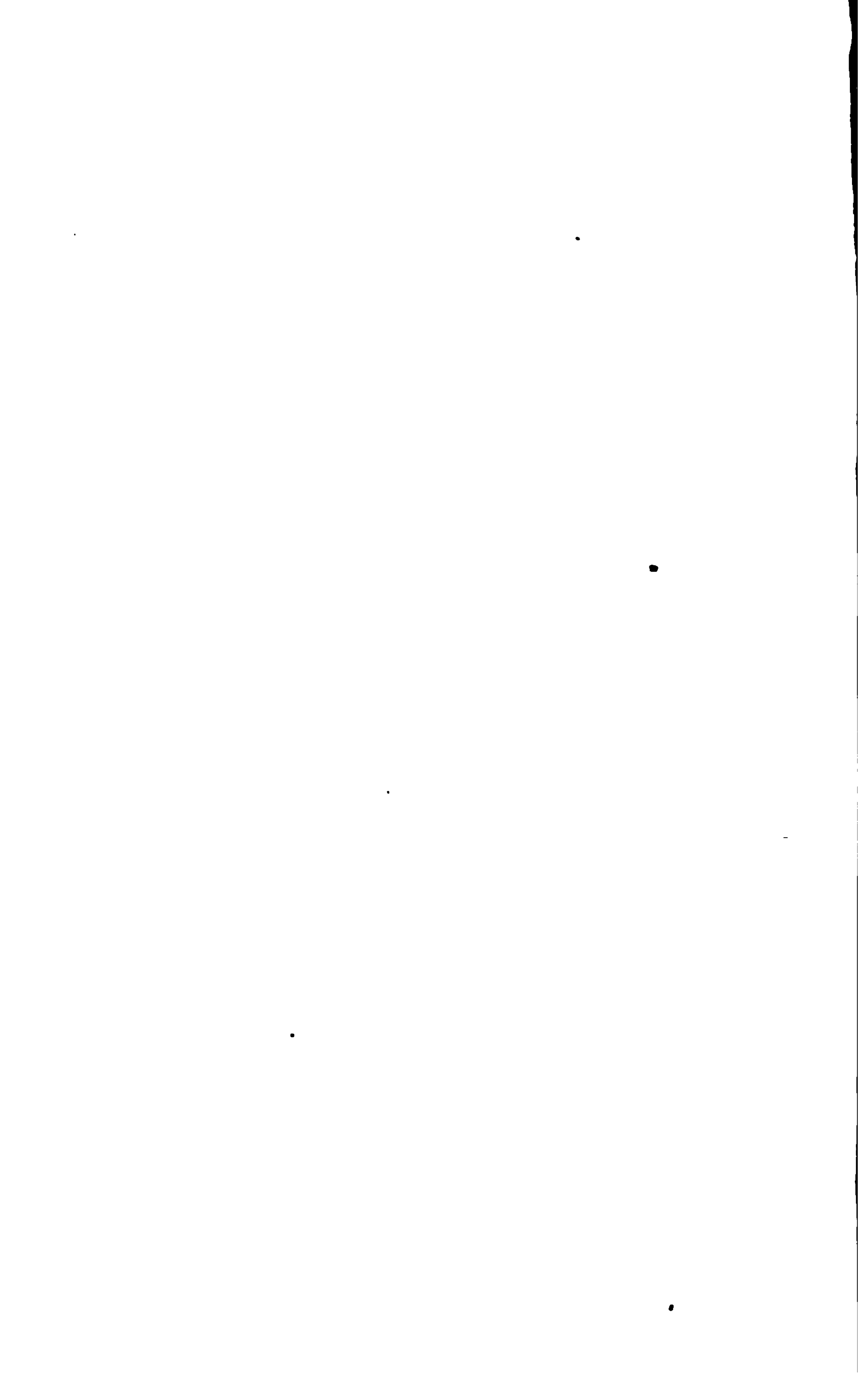
$$\underbrace{C_{15}H_{16}O_7}_{\text{Aloëresinsäure}} + O = \underbrace{C_7H_6O_3}_{\text{Paraoxybenzoësäure}} + \underbrace{C_7H_8O_2}_{\text{Orcin}} + CO_2 + H_2O$$

Es wird aber erst am Schlusse dieser Untersuchung, bei welcher sich Herr J. Malin auf das dankenswertheste betheiligt hat, angemessen sein, hierüber eine bestimmte Ansicht auszusprechen.

Für diessmal mag nur noch eine tabellarische Zusammenstellung die bis jetzt gekannten Bestandtheile und Zersetzungsproducte einiger Harze überschaulich machen.

Schwefelsäure angesäuert war, trübte sich zuerst die Flüssigkeit, wurde nach weiterem Zusatz der Chininlösung aber wieder klar und bald darauf begannen sich kleine concentrisch gruppirte Nadeln zu bilden. Bei Anwendung von nicht ganz reinem Orcin schied sich die Verbindung ölig aus.

Quajakharz enthält	Drachenblut enthält	Benzoë enthält	Galbanum enthält	Aloë enthält
$Є_{20}H_{26}Θ_{2}$ Guajakharzsäure	$Є_{30}H_{20}Θ_{2}$ (?) (In Äther lösliches Harz nach Johnston)	$Є_{35}H_{34}Θ_{7}$ α Harz (?) $Є_{30}H_{44}Θ_{4·5}$ β „ (?) $Є_{15}H_{40}Θ_{2·5}$ γ „ (?) $Є_{28}H_{20}Θ_{6}$ Benzoëzimmtsre. $Є_{7}H_{6}Θ_{2}$ Benzoësäure	$Є_{20}H_{26}Θ_{3}$ (?) Harz $Є_{10}H_{16}$ Galb-Öl (Gummi)	$Є_{17}H_{18}Θ_{7}$ Aloin $Є_{15}H_{16}Θ_{7}$ Aloëresinsre.
Gibt trocken destillirt	Gibt trocken destillirt	Gibt trocken destillirt	Gibt trocken destillirt	Gibt trocken destillirt
$Є_{19}H_{22}Θ_{3}$ Pyroguajacin $Є_{8}H_{10}Θ_{2}$ Kreosot $Є_{7}H_{8}Θ_{2}$ Guajacol $Є_{5}H_{8}Θ$ Guajacen	$Є_{8}H_{8}$ Metastyrol $Є_{7}H_{8}$ Toluol $Є_{7}H_{6}Θ_{2}$ Benzoësäure	$Є_{7}H_{6}Θ_{2}$ Benzoësäure $Є_{6}H_{6}Θ$ Phenylalcohol	$Є_{20}H_{30}Θ$ [1]) $Є_{6}H_{4}Θ_{3}$ Umbelliferon	$Є_{8}H_{12}Θ_{3}$ Aloisol
Mit Kali oxydirt	Mit Kali oxydirt	Mit Kali oxydirt	Mit Kali oxydirt	Mit Kali oxydirt
$Є_{9}H_{10}Θ_{3}$ [1]) $Є_{7}H_{6}Θ_{4}$ Protocatechusre.	$Є_{14}H_{12}Θ_{7}$ {Paraoxybenzoësre. / Protecatechusre.} $Є_{9}H_{8}Θ_{5}$ (?) [1]) $Є_{7}H_{6}Θ_{2}$ Benzoësäure $Є_{7}H_{6}Θ_{3}$ Paraoxybenzoësäure $Є_{7}H_{6}Θ_{4}$ Protocatechusäure $Є_{6}H_{6}Θ_{3}$ Phloroglucin	$Є_{14}H_{12}Θ_{7}$ $Є_{9}H_{8}Θ_{5}$ (?) $Є_{7}H_{6}Θ_{2}$ Benzoësäure $Є_{7}H_{6}Θ_{3}$ Paraoxybenzoësre. $Є_{7}H_{6}Θ_{4}$ Protecatechusäure $Є_{6}H_{6}Θ_{2}$ Oxyphensäure	$Є_{6}H_{6}Θ_{2}$ Resorcin	$Є_{7}H_{8}Θ_{2}$ Orcin $Є_{7}H_{6}Θ_{3}$ Paraoxybzsre
[1]) Annalen. 130. 353.	[1]) Körper mit der rothen Eisenreaction.		[1]) Annalen. 119. 263.	



Die jedem Fachmanne bekannten, bei der raschen Entwickelung der Wissenschaft von Jahr zu Jahr sich steigernden Unzukömmlichkeiten, welche mit der cumulativen Herausgabe von Abhandlungen verbunden sind, die sich auf sämmtliche naturwissenschaftliche Fächer beziehen, haben die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften bestimmt, ihre Sitzungsberichte in zwei gesonderten Abtheilungen erscheinen zu lassen.

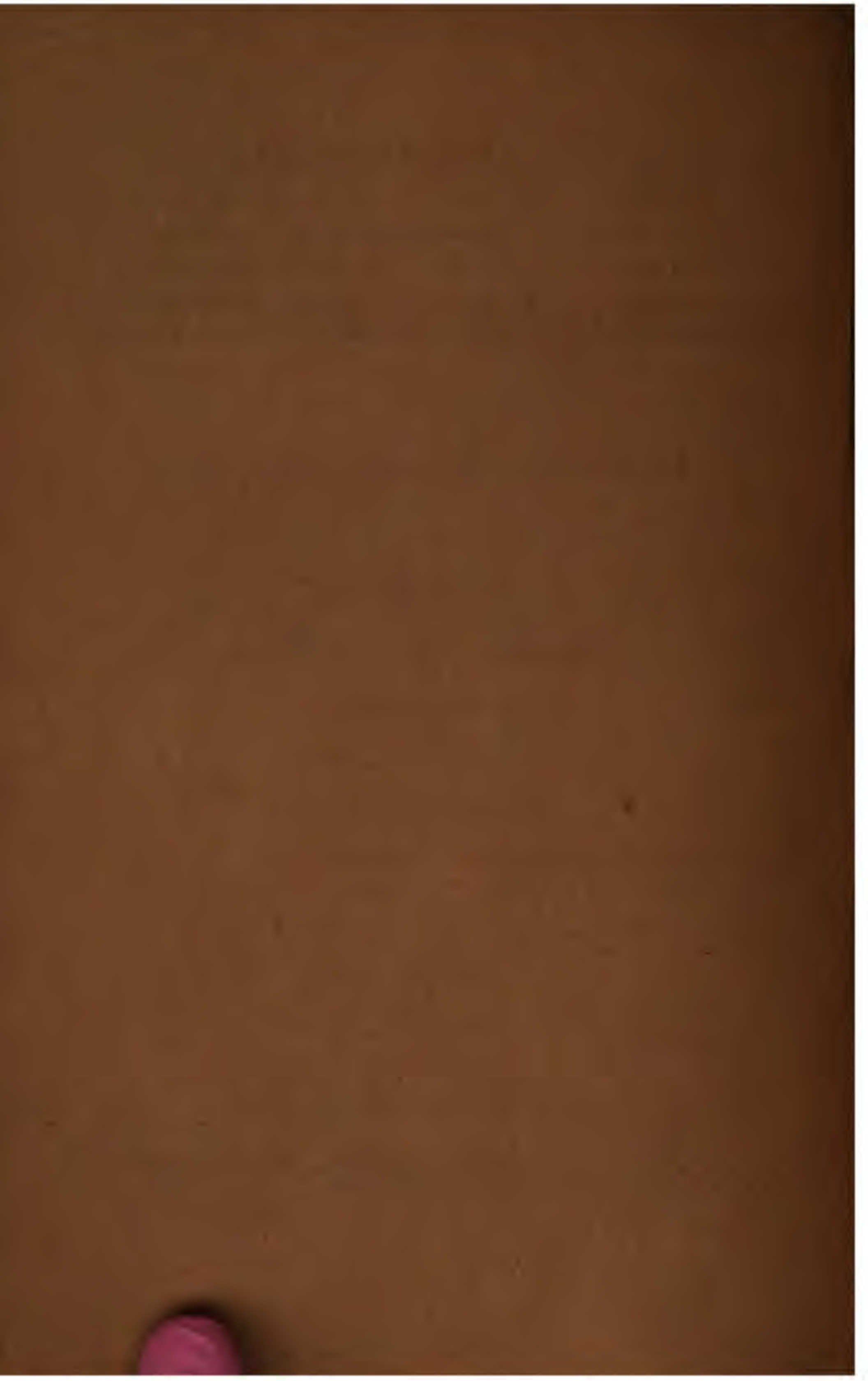
Die **erste Abtheilung** enthält die Abhandlungen aus der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Geologie und Paläontologie; die **zweite Abtheilung** die aus der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

Von jeder dieser Abtheilungen erscheint jeden Monat mit Ausnahme von August und September ein Heft, welches drei Sitzungen umfasst. Der Jahrgang enthält somit zehn Hefte.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine vollständige Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen voran, selbst wenn diese nicht zur Aufnahme in die Schriften der Akademie bestimmt werden.

Der Preis des Jahrganges beträgt für eine Abtheilung 12 Gulden ö. W.

Von allen grösseren Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und sind durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn zu beziehen.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LI. BAND. III. HEFT.

Jahrgang 1865. — März.

(Mit 3 Tafeln.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER KAIS. KÖN. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1865.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LI. BAND.

ZWEITE ABTHEILUNG.

3.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

VII. SITZUNG VOM 9. MÄRZ 1865.

In Verhinderung des Präsidenten übernimmt Herr Prof. Unger den Vorsitz.

Der Secretär gibt Nachricht von dem am 5. März erfolgten Ableben des inländischen correspondirenden Mitgliedes, Herrn Heinrich Schott.

Die Classe gibt, über Einladung des Herrn Vorsitzenden, ihr Beileid durch Aufstehen kund.

Die Herren Prof. Oscar Schmidt und Dr. A. Schrauf danken mit Schreiben vom 4. und 6. März, für die ihnen bewilligten Subventionen von 400 fl. und beziehungsweise 200 fl. ö. W.

Herr Lambert v. West hinterlegt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung seiner Priorität.

Der Secretär legt folgende Abhandlungen vor:

Von Herrn Hofrath W. Ritter v. Haidinger: „Dendriten von Schwefelkupfer in vergilbtem Papier, aufgefunden von Herrn Prof. Dr. A. Kerner in Innsbruck";

von Herrn Dr. Th. Kistiakowsky in Gratz: „Über die Wirkung des constanten und Inductionsstromes auf die Flimmerbewegung";

von Herrn Camillo Bondy in Gratz: „Über den Auftrieb in Flüssigkeiten, welche specifisch schwerere oder leichtere Körperchen enthalten".

Prof. Schrötter legt eine Mittheilung des Herrn Mag. Ph. Weselsky, Adjuncten am chemischen Laboratorium des k. k. polytechnischen Institutes „über ein vereinfachtes Verfahren zur Gewinnung des Indiums aus der Freiberger Zinkblende" vor.

Ferner werden folgende Vorträge gehalten:

Von Herrn Hofrath A. v. Burg: „Über die einfach und doppeltwirkende vielfache Kurbel";

von Herrn Prof. Aug. Em. Reuss: „Über zwei Anthozoen aus den Hallstätter Schichten“;

von Herrn Director K. v. Littrow über die „Bahnbestimmung des Planeten *Galatea* (74)“, von Herrn Robert Felgel;

von Herrn Prof. F. Unger über den dritten und letzten Theil seiner für die Denkschriften bestimmten Abhandlung: „*Sylloge plantarum fossilium*“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale de Belgique: Bulletin. 33e Année, 2e Série, Tome 18, No. 12. Bruxelles, 1864; 8o.

nnales des mines. VIe Série. Tome V. 3e Livraison de 1864. Paris, 1864; 8o.

Anzeige der Vorlesungen und des Personalstandes am polytechnischen Institute des Königreiches Böhmen. Studienjahr 1864—65. 4o.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 4—5. Wien, 1865; 8o.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1515—1516. Altona, 1865; 4o.

Bericht an den Senat der freien Stadt Frankfurt a./M. betreffend: Kanal-Anlagen und Vorarbeiten zur Kanalisirung. 8o.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LX, Nr, 5—8. Paris, 1865; 4o.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 1er Volume, 7e—9e Livraisons. Paris, 1865; 8o.

Erlangen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus den Jahren 1859—1865. 8o & 4o.

Gesellschaft, Zoologische, zu Frankfurt a./M.: Der zoologische Garten. V. Jahrg. Nr. 7—12. Frankfurt a./M., 1864; 8o.

Gewerbe-Verein, n. ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 8—10. Wien, 1865; 8o.

Haast, Julius, Report on the Formations of the Canterbury Plains. Christchurch, 1864; Folio. — Report on the Geological Survey of the Province of Canterbury. Christchurch, 1864; Folio.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 6—7. Wien, 1865; 4o.

Mittheilungen des k. k. Genie-Comité. Jahrg. 1865. 2. Heft.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Jahrg. 1865, Heft 1, nebst Ergänzungsheft Nr. 15. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique. 196° Livraison. Tome VII°, Année 1865. Paris; 4°.

Poggioli, Josephus, *De amplitudine doctrinae botanicae quae praestitit Friedericus Caesius Michaelis Angeli Poggioli etc. Romae, 1865;* 8°.

Programm (Jahres-Bericht) des k. k. Staats-Obergymnasiums zu Eger. 1852—1857, 1859—1863. 4° & 8°.

— des k. k. Ober-Gymnasiums zu Leitmeritz. 1856; 4°.

Reader. Nros. 112—114, Vol. V. London, 1865; Fol.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatschrift für Forstwesen. XV. Bd. Jahrg. 1865. Februar- & März-Heft. Wien; 8°.

Reinisch, S., Die ägyptischen Denkmäler in Miramar. Wien, 1865; 8°.

Reinsch, H., Mittheilungen aus dem Gebiete der Agrikulturchemie. Erlangen; 4°.

— Paul, Die Kryptogamenflora des baslerischen, so wie eines Theiles des angrenzenden bernischen und solothurnischen Jura. 8°.

Société Impériale des Nuturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1864. No. 4. Moskau; 8°.

Stur, Dionys, Die neogenen Ablagerungen im Gebiete der Mürz und Mur in Ober-Steiermark. (Jahrb. der k. k. geolog. Reichsanstalt, XIV. Bd.) Kl.-4°.

Wiener medizinische Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 14—19. 1865; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- Vereins. XVI. Jahrg. 11—12. Heft. Wien, 1864; 4°.

Über die partiellen Differentialgleichungen der durch Bewegung von Linien entstandenen Flächen.

Von **Gabriel Blažek,**

Assistenten am k. k. physikalischen Institute.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Februar 1865.)

Die Gleichungen einer Linie enthalten in der Regel neben den veränderlichen Coordinaten auch noch andere Grössen, Parameter genannt, welche theils die Lage, theils die Gestalt und Grösse der charakterisirten Curve festsetzen. So lange wir es mit einer bestimmten Linie in einer bestimmten Lage zu thun haben, sind die Parameter als constante Grössen zu betrachten, sie hören jedoch auf letzteres zu sein, sobald Lage und Gestalt der Linie einer Änderung unterworfen werden, ein Fall, der in der That eintritt, wenn wir die Voraussetzung machen, eine durch ihre Gleichungen gegebene Curve bewege sich mit oder ohne Änderung ihrer Gestalt und Grösse im Raume.

Soll jedoch diese Bewegung den Charakter einer gesetzmässigen an sich tragen, so müssen unter den veränderlichen Parametern derartige Relationen bestehen, dass mit der Bestimmung eines derselben auch alle übrigen gegeben erscheinen, oder, was dasselbe ist, dass sich alle Parameter als Functionen eines derselben, den wir den absolut veränderlichen nennen wollen, darstellen lassen; ist daher $(n+1)$ die Anzahl dieser Parameter, so müssen, damit die obige Forderung erfüllt werde, n Bedingungsgleichungen unter denselben bestehen.

Fügt man zu letzteren noch die zwei Gleichungen der sich bewegenden Curve hinzu, so ist das Ergebniss der Elimination der $(n+1)$ Parameter aus den $(n+2)$ Gleichungen der analytische Ausdruck für die durch die Bewegung der Curve im Raume entstandene Fläche.

Allein nicht selten ist das Bewegungsgesetz der erzeugenden Curve ein so allgemeines, dass sich aus demselben die zur Festsetzung aller veränderlichen Parameter als Functionen eines der-

selben nothwendige Anzahl von Bedingungsgleichungen nicht ableiten lässt; sodann müssen jene Parameter, welche in diesem Falle unbestimmt bleiben, als willkürliche Functionen des absolut veränderlichen angesehen werden in der Weise, dass wenn wir diesen mit a, jene mit $a_1, a_2, \ldots a_n$ bezeichnen, mithin die Gleichungen der erzeugenden Curve unter der Form

$$f_1(x, y, z, a, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0, \quad f_2(x, y, z, a, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0,$$

wofür wir uns in der Folge kürzer der Symbole

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0 \tag{1}$$

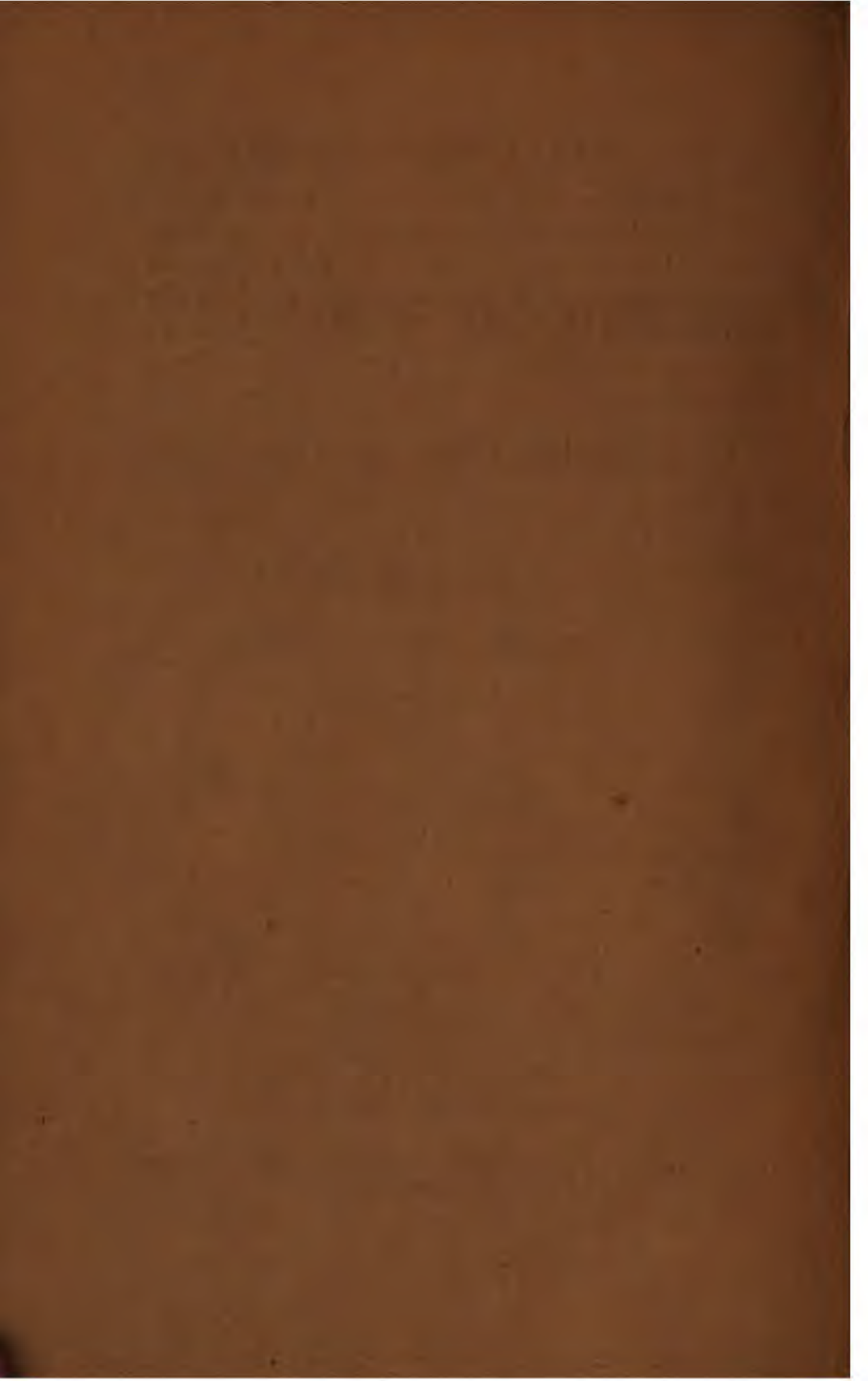
bedienen wollen, geschrieben werden können, die Relationen

$$a_1 = \varphi_1(a), \qquad a_2 = \varphi_2(a), \ldots a_n = \varphi_n(a) \tag{2}$$

vorauszusetzen sind, wobei im Allgemeinen φ das Zeichen einer willkürlichen Function darstellen soll.

Die eben gemachten Annahmen haben zur unmittelbaren Folge, dass die Gleichung der erzeugten Fläche, als Ergebniss der Elimination aller veränderlichen Parameter aus den Gleichungen der erzeugenden Curve, ebenfalls willkürliche Functionen in sich schliesst, zu deren Beseitigung, wenn überhaupt eine solche angestrebt wird, es nothwendig ist, aus den Gleichungen der erzeugenden Curve unmittelbar die erforderliche Anzahl neuer Relationen abzuleiten. Ein Mittel hiezu bietet uns die wiederholte partielle Differentiation der Gleichungen der erzeugenden Curve nach x und y als Grundveränderlichen, wobei, da der analytische Ausdruck der erzeugten Fläche keinen veränderlichen Parameter enthalten darf, nebst z auch a und mit ihm $a_1, a_2, \ldots a_n$ als Functionen jener Grössen anzusehen sind.

Im 3. Jahrgange der Exercices de mathématiques p. 38 hat sich Cauchy mit diesem Gegenstande eingehender befasst; er bemerkt daselbst, dass bei einer solchen Differentiation nicht nur die partiellen Differentialquotienten höherer Ordnung von a nach x und y, sondern wegen (2) auch die verschiedenen Ableitungen von $a_1, a_2, \ldots a_n$ nach a als neue zu eliminirende Grössen auftreten, und indem er die Differentiation so lange fortsetzt, bis die Anzahl der gewonnenen Gleichungen grösser wird als die der zu eliminirenden Grössen, gelangt er zu dem Ergebnisse, dass im Allgemeinen für n



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LI. BAND. III. HEFT.

Jahrgang 1865. — März.

(Mit 3 Tafeln.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER KAIS. KÖN. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1865.

willkürliche Functionen die betreffende Fläche durch n partielle Differentialgleichungen der $(2n-1)$ten Ordnung repräsentirt werde.

Wenn sich auch nicht verkennen lässt, dass Cauchy durch einen derartigen Vorgang nur die grösstmögliche Ordnungszahl der gesuchten Differentialgleichung bestimmen wollte, so lässt sich doch, wenn man auf das Wesen der diesfälligen Eliminationsgleichungen etwas näher eingeht, leicht zeigen, dass diese obere Grenze, den Fall $n=1$ ausgenommen, zu hoch gegriffen und auf die Zahl n zu beschränken sei.

Um dieses darzuthun, wollen wir die Ordnungszahl der Differentialgleichung der erzeugten Fläche auf Grundlage eines bestimmten Eliminationsverfahrens zu ermitteln und hierauf zu zeigen trachten, dass da, wo der von uns eingeschlagene Weg eine Modification erleiden muss, keineswegs eine Erhöhung des gefundenen grösstmöglichen Werthes der Ordnungszahl eintreten könne.

I.

Da zufolge (2) die Gleichungen (1) blos als Functionen von x, y, z und a betrachtet werden können, so differentiiren wir dieselben partiell nach x und y in der Weise, dass wir zunächst nur z als abhängige Variable und a als Constante, sodann a als Variable und x, y, z als Constante betrachten; nach bekannten Regeln der Differentialrechnung erhalten wir sofort

$$\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{da}\cdot\frac{da}{dx}=0, \qquad \frac{df_2}{dx}+\frac{df_2}{da}\cdot\frac{da}{dx}=0,$$
$$\frac{df_1}{dy}+\frac{df_1}{da}\cdot\frac{da}{dy}=0, \qquad \frac{df_2}{dy}+\frac{df_2}{da}\cdot\frac{da}{dy}=0;$$

die Elimination von $\frac{df_1}{da}$ und $\frac{df_2}{da}$ aus diesen Gleichungen liefert unmittelbar

$$(3) \qquad \frac{\frac{da}{dx}}{\frac{da}{dy}}=\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{dy}}=\frac{\frac{df_2}{dx}}{\frac{df_2}{dy}}.$$

Dem eben beschriebenen Vorgange zufolge enthalten die letzten zwei Theile der vorstehenden Gleichung allerdings die ersten Ableitungen des z nach x und y, keineswegs aber jene von a nach diesen

Veränderlichen oder jene von $a_1, a_2 \ldots a_n$ nach a, kurz bei der Bildung der Differentialgleichung

$$\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{dy}} = \frac{\frac{df_2}{dx}}{\frac{df_2}{dy}}$$

ist keine neue zu eliminirende Grösse in unsere Rechnung eingetreten. Bringen wir letztere Gleichung auf die Form

$$\frac{df_2}{dx} \cdot \frac{df_1}{dy} - \frac{df_2}{dy} \cdot \frac{df_1}{dx} = 0,$$

die wir kurz durch das Symbol

$$f_3 = 0$$

bezeichnen wollen, se können wir dieselbe in dieser Gestalt abermals einer partiellen Differentiation nach x und y unterwerfen. In derselben Weise wie bei (1) verfahrend erhalten wir

$$\frac{\frac{da}{dx}}{\frac{da}{dy}} = \frac{\frac{df_3}{dx}}{\frac{df_3}{dy}},$$

mithin im Hinblicke auf (3)

$$\frac{\frac{da}{dx}}{\frac{da}{dy}} = \frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{dy}} = \frac{\frac{df_2}{dx}}{\frac{df_2}{dy}} = \frac{\frac{df_3}{dx}}{\frac{df_3}{dy}}.$$

Die Verbindung des zweiten oder dritten Theiles dieses Gleichungssystemes mit dem letzten Theile liefert eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die aber wiederum keine neuen zu eliminirenden Grössen ausser den in (1) vorkommenden enthält und durch

$$f_4 = 0$$

charakterisirt werden mag.

In der angegebenen Weise fortfahrend erhalten wir das $(n+1)$ theilige Gleichungssystem

$$\frac{\frac{df_1}{dx}}{\frac{df_1}{dy}} = \frac{\frac{df_2}{dx}}{\frac{df_2}{dy}} = \frac{\frac{df_3}{dx}}{\frac{df_3}{dy}} = \ldots = \frac{\frac{df_{n+1}}{dx}}{\frac{df_{n+1}}{dy}}, \tag{4}$$

wobei allgemein f_q durch die Relation

$$(5)\qquad f_q = \frac{df_{q-1}}{dx}\cdot\frac{df_p}{dy} - \frac{df_{q-1}}{dy}\cdot\frac{df_p}{dx} = 0,$$

in welcher $p < q-1$ ist, definirt wird; seine Theile enthalten vom zweiten angefangen der Reihe nach immer höhere Differentialquotienten des z nach x und y, in der Weise, dass im letzten Theile nebst anderen niedern solche der $n$ten Ordnung erscheinen und allgemein mit besonderer Berücksichtigung derselben

$$(6)\qquad f_q = \psi\left(x.\, y,\, z,\, \frac{dz}{dx},\, \frac{dz}{dy} \ldots\ldots \frac{d^{q-2}z}{dx^{q-2}}, \ldots \frac{d^{q-2}z}{dy^{q-2}}\right)$$

gesetzt werden kann.

Die Verbindung des Systemes (4) mit (1) ermöglicht die Elimination der $(n+1)$ Parameter, und das Ergebniss dieser Operation ist offenbar eine partielle Differentialgleichung, deren Ordnungszahl die Grösse n nicht überschreitet.

Wie wir aus dem bisherigen Verlaufe der Rechnung ersehen, kann man bei der Bildung des Gleichungssystemes (4) folgenden Gang einhalten:

Man betrachtet die $(n+1)$ veränderlichen Parameter als von x und y unabhängig, dividirt den partiellen Differentialquotienten jeder der Gleichungen der erzeugenden Curve nach x durch den partiellen Differentialquotienten derselben Gleichung nach y und setzt beide Resultate einander gleich. Die so erhaltene neue Gleichung befreit man von Brüchen, reducirt sie auf Null, dividirt ihren partiellen Differentialquotienten nach x durch jenen nach y und setzt dieses Resultat einem jener zwei ersten gleich, wodurch man abermals zu einer Gleichung gelangt, die auf dieselbe Weise wie die zuerst abgeleitete zu behandeln ist. Das angegebene Verfahren setzt man so weit fort, bis die zur Elimination der Parameter nothwendige Zahl von Bedingungsgleichungen erreicht ist.

Die vorstehende Regel wollen wir an einem Beispiele erläutern.

Eine durch die Gleichungen

$$(7)\qquad xy - a = 0,\quad x + by + cz = 0$$

gegebene Hyperbel bewege sich im Raume derartig, dass sich die Parameter a, b, c im Allgemeinen willkürlich ändern. Es ist die

partielle Differentialgleichung der durch diese Bewegung erzeugten Fläche zu finden.

In unserem Falle ist

$$\frac{df_1}{dx}=y,\ \frac{df_1}{dy}=x,\ \frac{df_2}{dx}=1+c\frac{dz}{dx},\ \frac{df_2}{dy}=b+c\frac{dz}{dy}.$$

so dass wir als neue Bedingungsgleichung erhalten

$$\frac{y}{x}=\frac{1+c\frac{dz}{dx}}{b+c\frac{dz}{dy}}; \tag{8}$$

dieselbe gibt auf Null reducirt

$$x+cx\frac{dz}{dx}-by-cy\frac{dz}{dy}=0.$$

Differentiiren wir letztere Relation partiell nach x und y, so folgt

$$\frac{df_3}{dx}=1+c\frac{dz}{dx}+cx\frac{d^2z}{dx^2}-cy\frac{d^2z}{dxdy},\ \frac{df_3}{dy}=cx\frac{d^2z}{dxdy}-b-c\frac{dz}{dy}-cy\frac{d^2z}{dy^2};$$

dividiren wir den ersten Ausdruck durch den letzten und setzen den Quotienten gleich $\frac{y}{x}$, so erhalten wir

$$\frac{y}{x}=\frac{1+c\frac{dz}{dx}+cx\frac{d^2z}{dx^2}-cy\frac{d^2z}{dx\,dy}}{cx\frac{d^2z}{dx\,dy}-b-c\frac{dz}{dy}-cy\frac{d^2z}{dy^2}}. \tag{9}$$

Die Elimination von a, b, c aus (7), (8) und (9) ergibt schliesslich als Gleichung der erzeugten Fläche

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}-2xy\frac{d^2z}{dxdy}+y^2\frac{d^2z}{dy^2}+x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}-z=0.$$

Es soll von dem oben angegebenen Verfahren keineswegs behauptet werden, es sei das allein zum Ziele führende oder in besonderen Fällen das kürzeste; das aber ist klar, dass, wenn seine Anwendbarkeit in einem besondern Falle zulässig ist, das durch dasselbe gewonnene Endresultat sich von jenem auf einem andern Wege erzielten nicht unterscheiden könne. Es wird uns daher nur noch der Nachweis erübrigen, dass auch in jenen Fällen, in denen

die Bildung des Gleichungssystemes (4) eine Unterbrechung erleidet, die Ordnungszahl der partiellen Differentialgleichung der erzeugten Fläche die Grösse n nicht überschreiten könne.

II.

Die Nothwendigkeit einer Modification des von uns eingeschlagenen Rechnungsganges könnte nur dann eintreten, wenn einer der in (4) vorkommenden partiellen Differentialquotienten des f nach x oder y Null oder unendlich gross würde.

1. Liegt uns der erste Fall vor, so haben wir zu unterscheiden, ob der betreffende Differentialquotient in Folge einer Bedingungsgleichung verschwindet oder identisch gleich Null wird.

a) Besteht die Relation

$$\frac{df_q}{dx} = 0 \tag{10}$$

als Ergebniss einer Bedingungsgleichung, so ist es eben die Gleichung (10), welche den Ausfall des Gliedes $\frac{\frac{df_q}{dx}}{\frac{df_q}{dy}}$ aus (4) ersetzt. Betrachten wir aber (10) als f_{q+1}, so kann in der Bildung des Systemes (4) ungehindert weitergeschritten werden. Durch einen derartigen Specialfall wird also die Ordnungszahl der gesuchten Gleichung keineswegs erhöht, im Gegentheile wird dieselbe nicht selten erniedrigt werden. Denn das gleichzeitige Bestehen der Relationen

$$\frac{df_q}{dx} + \frac{df_q}{da} \cdot \frac{da}{dx} = 0, \quad \frac{df_q}{dy} + \frac{df_q}{da} \cdot \frac{da}{dy} = 0$$

hat zur Folge, dass mit dem einen der in denselben erscheinenden Differentialquotienten von f_q auch die zwei übrigen verschwinden; es bedingt also die Voraussetzung (10) auch die Gleichung $\frac{df_q}{dy} = 0$. Wird letztere nebst (10) gleichmässig zur Bildung neuer Relationen in der von uns in (I.) angegebenen Weise benützt, so ist es klar, dass man sich bei Herstellung der erforderlichen $(n+2)$ Bedingungsgleichungen im Allgemeinen nicht bis zu einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung wird erheben müssen.

b) Es sei $\frac{df_{q+1}}{dx}$ der erste Differentialquotient im Systeme (4), der identisch gleich Null ist; sodann darf f_{n+1} mit Ausschluss der Variablen x und z nur als Function von y erscheinen. Nun besteht aber zufolge (5) die Relation

$$f_{q+1} = \frac{df_q}{dx} \cdot \frac{df_p}{dy} - \frac{df_q}{dy} \cdot \frac{df_p}{dx},$$

$p < q$ vorausgesetzt; es ist ferner wegen (6) allgemein

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_q}{dx} &= \psi_1\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \ldots \frac{d^{q-1}z}{dx^{q-1}}, \ldots \frac{d^{q-1}z}{dx\,dy^{q-2}}\right), \\ \frac{df_q}{dy} &= \psi_2\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \ldots \frac{d^{q-1}z}{dx^{q-2}dy}, \ldots \frac{d^{q-1}z}{dy^{q-1}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Soll nun f_{q+1} nur Function des y sein, so müssen unter anderem auch die Differentialquotienten $\frac{d^{q-1}z}{dx^{q-1}}$ und $\frac{d^{q-1}z}{dy^{q-1}}$ aus f_{q+1} verschwinden, was, da wegen $p<q$ dieselben in $\frac{df_p}{dx}$ und $\frac{df_p}{dy}$ nicht erscheinen, nur dann möglich ist, wenn dieselben aus (11) ausfallen. Letzteres setzt aber voraus, dass f_q die Quotienten $\frac{d^{q-2}z}{dx^{q-2}}$ und $\frac{d^{q-2}z}{dy^{q-2}}$ nicht enthalte, und es ist augenscheinlich, dass sodann auch in f_{q-1} die Quotienten $\frac{d^{q-3}z}{dx^{q-3}}$ und $\frac{d^{q-3}x}{dy^{q-3}}$ u. s. w., also auch in f_2 die Quotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ nicht Platz greifen dürfen; dieser Fall kann offenbar nur dann eintreten, wenn die Variable z weder in f_1 noch in f_2 erscheint.

Lauten aber die Gleichungen der erzeugenden Curve

$$f_1(x, y, a, a_1, \ldots a_n) = 0, \quad f_2(x, y, a, a_1, \ldots a_n) = 0,$$

so gehören sie bekanntlich einem Systeme zur Axe der z paralleler Geraden an, und der von diesen erzeugte Cylinder wird, je nachdem man x oder y als abhängige Variable betrachtet, durch die Gleichungen

$$\frac{dx}{dz} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dz} = 0$$

charakterisirt.

Es ist endlich noch der Fall denkbar, dass $\frac{df_{q+1}}{dx}$ identisch gleich Null sei, weil in der That etwa in f_r die Differentialquotienten $\frac{d^{r-2}z}{dx^{r-2}}$ und $\frac{d^{r-2}z}{dy^{r-2}}$ in Folge einer Bedingungsgleichung

$$(12) \qquad \chi\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \ldots \frac{d^{r-2}z}{dx^{r-2}}, \ldots \frac{d^{r-2}z}{dy^{r-2}}\right) = 0$$

verschwinden; dann wird aber (12) nicht nur selbst bei der Elimination der Parameter mit beigezogen, sondern auch zur Bildung der noch erforderlichen neuen Relationen benützt werden können, von denen offenbar keine von höherer als n^{ter} Ordnung sein wird.

Die Annahme $\frac{df_q}{dy} = 0$ oder $\frac{df_{q+1}}{dy} = 0$ führt selbstverständlich zu Resultaten, die mit den eben gewonnenen vollständig übereinstimmen.

2. Dem in (5) ausgesprochenen Bildungsgesetze zufolge ist f_q, mithin auch $\frac{df_q}{dx}$ und $\frac{df_q}{dy}$, eine ganze rationale Function der partiellen Differentialquotienten von f_1 und f_2 nach x und y. Sollte nun $\frac{df_q}{dx}$ oder $\frac{df_q}{dy}$ unendlich gross werden, so wäre das nur möglich, wenn einer der partiellen Differentialquotienten von f_1 oder f_2 unendlich gross würde; allein dieser Fall wird nur für specielle Werthe eines Parameters oder einer der Veränderlichen eintreten, kann mithin den allgemeinen Gang der Rechnung nicht beeinflussen.

Wenn also durch die bisherige Untersuchung dargethan wurde, dass die Ordnungszahl der partiellen Differentialgleichung einer Fläche, die durch Bewegung einer Curve, deren Gleichungen $(n+1)$ willkürliche Parameter besitzen, entstanden ist, die Grösse n nicht überschreiten könne, so ist es anderseits leicht denkbar, dass in besonderen Fällen schon weniger als $(n+2)$ Bedingungsgleichungen zur Elimination dieser Parameter genügen, und dass aus diesem oder einem andern Grunde die betreffende Differentialgleichung von niederer als n^{ter} Ordnung sei. Wir haben die Möglichkeit eines derartigen Ergebnisses bereits unter (II. 1.) berührt, ein Beispiel dafür bieten uns unter andern die Gleichungen

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y. z. a, a_1, \ldots a_n) = 0,$$

von denen die erste bereits die erzeugte Fläche charakterisirt, ein anderes, ebenfalls recht auffälliges, liefert die allgemeine Gleichung der durch Bewegung einer Geraden entstandenen Fläche.

Die Gleichungen einer Geraden lauten allgemein

$$ax+by+cz+d=0, \quad a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0, \qquad (13)$$

enthalten also acht willkürliche Parameter; trotzdem ist die Gleichung der erzeugten Fläche, wie wir sogleich sehen werden, nicht von der siebenten, sondern von der dritten Ordnung.

Es besteht nämlich wegen

$$\frac{df_1}{dx}=a+c\frac{dz}{dx}, \frac{df_1}{dy}=b+c\frac{dz}{dy}, \frac{df_2}{dx}=a_1+c_1\frac{dz}{dx}, \frac{df_2}{dy}=b_1+c_1\frac{dz}{dy}$$

die Relation

$$\frac{a+c\frac{dz}{dx}}{b+c\frac{dz}{dy}}=\frac{a_1+c_1\frac{dz}{dx}}{b_1+c_1\frac{dz}{dy}},$$

oder auch unter Benützung eines bekannten Satzes der Proportionslehre, wenn zur Abkürzung

$$\frac{ac_1-a_1c}{bc_1-b_1c}=h$$

gesetzt wird,

$$\frac{a+c\frac{dz}{dx}}{b+c\frac{dz}{dy}}=h; \qquad (14)$$

diese Gleichung gibt auf Null reducirt

$$a-bh+c\frac{dz}{dx}-ch\frac{dz}{dy}=0,$$

so dass

$$\frac{df_3}{dx}=c\frac{d^2z}{dx^2}-ch\frac{d^2z}{dxdy}, \quad \frac{df_3}{dy}=c\frac{d^2z}{dxdy}-ch\frac{d^2z}{dy^2}$$

wird; es folgt daher mit Bezug auf (14) die neue Relation

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2}-h\frac{d^2z}{dx\,dy}}{\frac{d^2z}{dx\,dy}-h\frac{d^2z}{dy^2}}=h,$$

oder auch

$$\frac{d^2z}{dx^2}-2h\frac{d^2z}{dx\,dy}+h^2\frac{d^2z}{dy^2}=0; \tag{15}$$

mithin ist

$$\frac{df_k}{dx}=\frac{d^3z}{dx^3}-2h\frac{d^3z}{dx^2dy}+h^2\frac{d^3z}{dx\,dy^2},\ \frac{df_k}{dy}=\frac{d^3z}{dx^2dy}-2h\frac{d^3z}{dx\,dy^2}+h^2\frac{d^3z}{dy^3},$$

also wieder wegen (14)

$$\frac{\frac{d^3z}{dx^3}-2h\frac{d^3z}{dx^2dy}+h^2\frac{d^3z}{dx\,dy^2}}{\frac{d^3z}{dx^2dy}-2h\frac{d^3z}{dx\,dy^2}+h^2\frac{d^3z}{dy^3}}=h,$$

oder geordnet

$$\frac{d^3z}{dx^3}-3h\frac{d^3z}{dx^2dy}+3h^2\frac{d^3z}{dx\,dy^2}-h^3\frac{d^3z}{dy^3}=0. \tag{16}$$

Die Elimination des h aus (15) und (16) liefert endlich die gesuchte Differentialgleichung, die offenbar von der dritten Ordnung sein wird. Dieses Resultat wird uns übrigens nicht befremden, wenn wir erwägen, dass das Gleichungssystem (13) durch das allerdings nicht mehr so allgemeine

$$y=\alpha x+\beta, \quad z=\gamma x+\delta$$

ersetzt werden kann, das nur vier willkürliche Parameter enthält, dessen Benützung mithin in der That auf eine partielle Differentialgleichung von höchstens dritter Ordnung führen kann.

Endlich bleibt die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass bisweilen die erzeugte Fläche durch ein System mehrer partiellen Differentialgleichungen gekennzeichnet werde; wir erinnern in dieser Hinsicht an den ganz wohl denkbaren Fall, dass in Folge einer Bedingungsgleichung $\frac{df_{n+1}}{dx}=0$ werde, mithin der unter (II. 1. a)) gepflogenen Erörterung gemäss auch $\frac{df_{n+1}}{dy}=0$ sei; dann besitzen wir zur Elimination von $(n+1)$ Parametern $(n+3)$ Relationen unter denselben, erhalten mithin gleichzeitig zwei von letzteren freie Differentialgleichungen.

Zum Schlusse wollen wir noch bemerken, dass sich unsere ganze Beweisführung auf die Voraussetzung gründet, es könnten n willkürliche Functionen des absolut veränderlichen Parameters nebst

letzterem aus $(n+2)$ von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen eliminirt werden, ohne diese einer weiteren Differentiation zu unterwerfen. Diese Annahme, die übrigens auch der oben erwähnten Arbeit Cauchy's zu Grunde liegt, verliert ihre allgemeine Geltung, sobald nebst den willkürlichen Functionen auch ihre Ableitungen nach dem absolut veränderlichen Parameter in der Rechnung auftreten. Indessen steht auch unter diesen Umständen so viel fest, dass, wenn n die Zahl der willkürlichen Functionen, p die ihrer Ableitungen bedeutet, die Differentialgleichung der erzeugten Fläche unter keiner Bedingung von höherer als der $(n+p)^{\text{ten}}$ Ordnung sein wird.

Die vielfache Kurbel.

Von dem w. M. Hofrath Ritter v. Burg.

(Mit 1 Tafel.)

1. Bekanntlich bedient man sich in der Mechanik zur Umwandlung einer geradlinig hin und her gehenden Bewegung in eine continuirlich kreisförmige oder umgekehrt, am einfachsten der Kurbel, in deren Warze die Kurbel- oder Schubstange (Bläuelstange) eingehängt wird; im ersteren Falle geht die Bewegung von dieser Stange aus und wird auf die Kurbel, im letzteren Falle dagegen von der Kurbel aus, und wird auf die Schubstange übertragen.

Die Theorie der Kurbel oder des Krummzapfens, wie letztere auch öfter genannt wird, bildet eines der interessantesten Capitel der höheren Mechanik, und es wurde dieselbe selbst noch von Langsdorf für eine der schwierigsten gehalten und von mehreren Mathematikern ganz unrichtig dargestellt [1]). Die neueren Entwickelungen sind zwar richtig, lassen jedoch in der Regel in Hinsicht auf Kürze, Klarheit und Präcision viel zu wünschen übrig, besonders wenn sich diese nicht blos auf die gewöhnliche oder einfache, sondern auch auf die zwei- und dreifache Kurbel, über welche man meines Wissens nicht hinausgeht, beziehen.

Erst in der kürzlich von dem Ingénieur des mines, J. N. Haton de la Goupillière im 4. Bande (6. Reihe) des Annales des mines

---

1) In seinem Handbuche der gemeinen und höheren Mechanik (Heidelberg 1807) bemerkt Langsdorf wörtlich: „Vergeblich suchte Kästner diese Theorie zu entwickeln und vergeblich ist diese Theorie von mir selbst schon dreimal versucht worden. Auch in meinem neuesten Versuche, den ich im Jahre 1805 an die illustre Akademie in Petersburg einschickte, hatte ich einen Fehler einschleichen lassen, den ich erst späterhin bemerkte. Ich habe daher diese Untersuchung noch einmal vorgenommen und glaube solche jetzt als vollendet vorlegen zu können."

Übrigens wird diese von dem mit Recht so geschätzten Autor in dem genannten Handbuche entwickelte weitschweifige und schwerfällige Theorie der Kurbel heute gewiss Niemanden mehr befriedigen.

veröffentlichten Théorie des manivelles multiples ist der dem heutigen Stande der mechanischen Wissenschaften angemessene Gang eingeschlagen. Gleichwohl enthält auch diese Entwickelung, so anerkennenswerth sie auch ist, meiner Ansicht nach unmotivirte Stellen und Übergänge, welche der Klarheit und Bestimmtheit der Sache Eintrag thun.

Ich glaube durch die folgende Entwickelung, bei welcher ich den Weg einschlage, welchen ich bereits in der Ableitung der Theorie der einfachen oder einarmigen Kurbel in meinem Supplementband zum Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre (2. Aufl. 1863, S. 150) befolgte, die Theorie der vielfachen Kurbel, welche ich zugleich auch auf die einfach wirkende ausdehne, auf eine allgemeine, klare und präcise Weise zum Abschlusse zu bringen.

A. Doppelt wirkende Kurbel.

2. Um die Ableitung der Theorie der $m$fachen Kurbel, wobei m jede beliebige ganze positive Zahl bezeichnet, nicht durch Nebendinge, die nachträglich für sich betrachtet werden können, noch mehr zu verwickeln, so wird dabei vorausgesetzt, dass die m Schubstangen bei ihrem Hin- und Hergange fortwährend mit dem die beiden sogenannten todten Punkte A und B verbindenden Durchmesser AB (Fig. 1) parallel bleiben, sämmtlich in ein und derselben Ebene liegen und jede von einer constanten Kraft p sowohl in der Richtung von A gegen B, als auch wieder zurück von B gegen A bewegt werde, diese Kräfte p also doppelt wirkend sind; zugleich werden diese Schubstangen als gewichts- und massenlose gerade steife Linien angenommen. Da ferner nach unserer Annahme die m Kurbelkreise ebenfalls in eine einzige Ebene (in jene der Schubstangen) fallen, so liegen auch die m Kurbelwarzen in dem Kurbelkreise $ADBE$ gleich vertheilt, und die an diese gezogenen Radien stellen die m Kurbelarme vor, wovon je zwei den Winkel $\gamma = \frac{2\pi}{m}$ bilden.

Um nun den Widerstand in Rechnung zu bringen, welchen die bewegende Kraft $P = mp$ in jedem vorkommenden Falle zu überwinden hat, so kann man diesen (er mag in der Wirklichkeit in was

immer bestehen) nach statischen Gesetzen auf den Umfang des Kurbelkreises reducirt denken, und wenn dieser sofort gleich Q ist, so ist es für die Rechnung gerade so, als sollte durch die Umdrehung der Kurbel die an einem vollkommen biegsamen Faden hängende Last Q auf den Umfang des Kurbelkreises vom Halbmesser $CA = r$ aufgewunden oder gehoben werden, wenn man nämlich die Länge der Kurbelarme $CM = r$ setzt.

Um ferner auch die in der Anwendung mit der Kurbel gleichzeitig rotirenden Massen (wie z. B. die eines Schwungrades) zu berücksichtigen, so denke man sich diese Massen nach dem Gesetze des Trägheitsmomentes ebenfalls auf diesen Kurbelkreis $ADBE$ reducirt und es sei sofort M diese reducirte träge Masse.

Bei dem Umstande als die Kurbelbewegung eine periodische vom Drehungswinkel γ ist, genügt es für die folgende Entwickelung, die Bewegung nur während einer solchen Periode zu betrachten oder zu untersuchen, indem nach einer Drehung der Kurbel um den Winkel γ, jeder folgende Arm in die Lage des unmittelbar vorausgegangen kommt, und sich dann zwischen Kraft und Last genau wieder das vorige Verhältniss herstellt oder wiederholt. Um jedoch diese Untersuchung während einer Periode zu vereinfachen, kann man sich dabei von dem Wechsel im Zeichen der Kräfte p, welche, wenn sie im oberen Halbkreise als positiv angenommen werden, sofort im unteren der entgegengesetzten Bewegung wegen, als negativ gelten würden, durch folgende Betrachtung unabhängig machen.

Ist m gerad, z. B. wie in Fig. 1, $m = 4$, so liegen beständig $\frac{m}{2}$, hier also zwei Warzen L_3, L_4 im unteren Halbkreis, auf welche die Kräfte p in der Richtung BA wirken. Denkt man sich aber die Arme CL_3 und CL_4 nach aufwärts verlängert, so fallen die Warzen L_3 und L_4 auf jene L_1 und L_2, und es ändert sich in der Bewegung nichts, wenn man sich statt der vier Arme jetzt blos zwei, nämlich jene CL_1 und CL_2 im oberen Halbkreise vorhanden denkt, in deren Warzen L_1 und L_2 jedoch statt der einfachen Kräfte p, sofort die doppelten $2p$, und zwar fortwährend nur nach einerlei Richtung (von A gegen B) wirkend vorstellt.

Dasselbe Raisonnement gilt offenbar auch für jede andere gerade Zahl von m, und es ist, wenn man dabei den Drehungswinkel der Kurbel für eine Periode mit β bezeichnet, sofort $\beta = \gamma = \frac{2\pi}{m}$.

Ist dagegen m ungerad, so sei, um die Ideen zu fixiren, wie in Fig. 2, $m = 3$; dann liegen beim Beginne der Bewegung, wenn diese wieder von A aus gerechnet wird, von den Kurbelwarzen zwei, nämlich L_1, L_2 im oberen, dagegen die dritte L_3 im unteren Halbkreis, und zwar wirkt von dieser die Kraft p in einer den beiden oberen entgegengesetzten Richtung. Man kann sich aber, ohne in der Bewegungsweise der drei Kräfte p etwas zu ändern, auch hier den Arm CL_3 nach aufwärts verlängert denken und sich vorstellen, dass statt der unteren Kraft die gleiche Kraft p an diesem verlängerten, zwischen die beiden CL_1 und CL_2 genau in die Mitte fallenden Arm CL, jetzt aber in derselben Richtung AB wirkt, nach welcher die beiden übrigen Kräfte in L_1 und L_2 wirksam sind. Allerdings gelangt bei einer Drehung der Kurbel über den Winkel $\alpha = \frac{\gamma}{2}$ hinaus der zunächst an CB liegende Arm CL_2 in den unteren Halbkreis, und man müsste sich auch diesen wieder, wie vorhin jenen CL_3 aufwärts verlängert denken, wollte man abermals die drei Kräfte p im oberen Halbkreis haben. Allein da jetzt der Winkel der Periode $\beta = \frac{\gamma}{2} = L_1 CL$ ist, so hat man die Bewegung nicht weiter als für den Winkel $\alpha = \beta = \frac{\gamma}{2}$, wofür also die drei Warzen L_1, L und L_2 noch im oberen Halbkreise verbleiben, zu verfolgen.

Auf gleiche Weise kann man sich durch dasselbe Verfahren auch für jede andere ungerade Zahl von m, während die Kurbelwarzen eine Periode durchlaufen, diese, also auch die m Kräfte p als in dem oberen Halbkreis nach einerlei Richtung wirkend vorstellen. Liegt nämlich die erste Warze L_1 auf dem Anfangspunkte A, so fallen $\frac{m+1}{2}$ Arme in den oberen und $\frac{m-1}{2}$ in den unteren Halbkreis, wobei von den ersteren, jener welcher dem Radius CB am nächsten liegt, mit diesem einen Winkel $\frac{\gamma}{2} = \beta$ bildet. Verlängert man die unteren Arme wieder nach aufwärts, so halbirt jede dieser Verlängerungen den Winkel γ, und wenn man diese statt der unteren Arme gelten lässt und an jeden eine Kraft p anbringt, welche mit den ursprünglichen $\frac{m+1}{2}$ in derselben Richtung (von A nach B) wirken, so bleibt während des Werthes von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \frac{\gamma}{2} = \beta$, also während einer Periode, das Verhältniss zwischen P und Q vollständig dasselbe.

3. Beide Fälle zusammengenommen, wird man daher während der Bewegung der Kurbel durch eine Periode, nach welcher sich immer wieder Alles oder dasselbe wiederholt, die sämmtlichen m Arme oder Kräfte p als im oberen Halbkreis liegend annehmen können, wobei für m gerad, und in diesem Falle $m = 2n$ gesetzt, diese $2n$ Kräfte p nur an halb so vielen, d. i. an n Armen, dafür aber jeden mit der doppelten Intensität $p' = 2p = \frac{P}{n}$ wirkend anzusehen sind und wobei der Winkel der Periodicität β ungeändert bleibt, nämlich $\beta = \gamma = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ ist.

Für m ungerad und der Gleichförmigkeit wegen $m = n$ gesetzt, bleiben im oberen Halbkreis, während der erwähnten Bewegung ebenfalls n Arme oder n Kräfte p nach einerlei Richtung, jede mit ihrer ursprünglichen Grösse $p = \frac{P}{n}$ wirksam, während jedoch der Winkel der Periode β auf den halben Werth reducirt oder $\beta = \frac{\gamma}{2} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ wird. Man sieht, dass durch die Einführung der Zahl n in beiden Fällen sowohl die an jeder Kurbelwarze (und zwar alle im oberen Halbkreise liegend) wirksam gedachte Kraft p durch $\frac{P}{n}$, als auch der Winkel der Periode durch $\beta = \frac{\pi}{n}$ ausgedrückt wird. Handelt es sich also z. B. um die drei- und sechsfache Kurbel, so ist beziehungsweise $m = 3$ und 6, jedoch in beiden Fällen $n = 3$; im ersteren Falle erscheint in der Rechnung die Kraft p mit ihrem ursprünglichen Werth $p = \frac{P}{3}$, dafür der Winkel β der Periode nur halb so gross, d. i. mit $\frac{\gamma}{2} = \frac{120}{2} = 60°$; dagegen wird im zweiten Falle $p = \frac{P}{3}$ statt $\frac{P}{6}$, also doppelt so gross angenommen, dagegen bleibt der Winkel der Periode $\beta = \gamma = \frac{2\pi}{6} = 60°$ ungeändert.

4. Dies nun vorausgesetzt, seien in Fig. 3, CL_1 und CL_2 zwei aufeinander folgende Kurbelarme, welche daher im obigen Sinne genommen, in allen Fällen den Winkel der Periode $L_1CL_2 = \beta = \frac{\pi}{n}$ einschliessen, $CA = r$ der Halbmesser des Kurbelkreises, Q die auf den Umfang dieses Kreises aufzuwindende Last, so wie M die auf denselben Umfang reducirte träge Masse.

Die Kurbel habe ihre Bewegung in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung vom Punkte A aus begonnen und die erste Warze L_1 bereits den dem Winkel α entsprechenden Bogen AL_1 zurückgelegt, wodurch die mit AB parallelen, auf die Warzen L_1 und L_2 wirkenden Schubstangen oder Kräfte p in die Lage S_1L_1 und S_2L_2 gelangt sind. Zerlegt man nun in dieser Lage diese Kräfte p jede in zwei Componenten, wovon die eine nach der Tangente des Kurbelkreises und die andere darauf senkrecht, also gegen den Mittelpunkt C gerichtet ist und hier nicht weiter in Betracht kommt; so erhält man für die ersteren oder Tangentialkräfte, welche in den Warzen $L_1, L_2 \ldots L_n$ wirksam sind, der Reihe nach die Werthe:

$$p_1 = p \sin \alpha,\ p_2 = p \sin(\alpha + \beta),\ p_3 = p \sin(\alpha + 2\beta) \ldots$$
$$p_n = p \sin(\alpha + (n-1)\beta).$$

Die Resultirende dieser Kräfte ist sonach:

$$P' = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = pS \,.\,. (a),$$

wenn man nämlich Kürze halber die Summe der Reihe

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \,.\,. + \sin(\alpha + (n-1)\beta) = S$$

setzt. Da nun aber (M. s. z. B. meine trigonometrische Formelsammlung vom Jahre 1827, S. 26)

$$S = \frac{\sin \frac{1}{2} n\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta} \sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}(n-1)\beta\right)$$

ist, so erhält man für die gesammte Tangentialkraft:

$$P' = p\,\frac{\sin \frac{1}{2} n\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta} \sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}(n-1)\beta\right) \ldots (1)$$

5. Lässt man nun, da diese Kraft P' variabel ist, die Kurbelwarzen nur um einen unendlich kleinen Bogen fortrücken, lässt nämlich α um $d\alpha$ zunehmen, so entsteht von Seite dieser bewegenden Kraft eine Arbeit dw, welche ebenfalls unendlich klein ist und durch $dw = P'r d\alpha$ ausgedrückt wird. Setzt man für P' den Werth aus Relation (a) und integrirt innerhalb der Grenzen von $\alpha = 0$ bis α so folgt für die producirte Arbeit von Seite der Kraft P der Ausdruck:

$$w = rp \frac{\sin \frac{1}{2} n\beta}{\sin \frac{1}{2} \beta} \int_0^\alpha \sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}(n-1)\beta\right) d\alpha,$$

d. i.

$$w = rp \frac{\sin \frac{1}{2} n\beta}{\sin \frac{1}{2} \beta} \left[\cos \tfrac{1}{2}(n-1)\beta - \cos\left(\alpha + \tfrac{1}{2}(n-1)\beta\right)\right],$$

oder wenn man für p und β die oben (in 3.) angegebenen Werthe, nämlich $p = \frac{1}{n} P$ und $\beta = \frac{\pi}{n}$ setzt und die Differenz der Cosinus nach bekannten Formeln ausdrückt, auch:

$$w = \frac{rP}{n \sin \frac{\pi}{2n}} \left[\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2n}\right) + \cos(n-1)\frac{\pi}{2n}\right] \ldots (2)$$

6. Zieht man von dieser producirten Arbeit jene $w' = Q.r\alpha$ ab, welche gleichzeitig von Seite der Last Q durch den Weg $r\alpha$ consumirt wurde, so erhält man jene Wirkung oder Arbeit $W = w - w'$, welche während sich die Kurbel um den Winkel α gedreht hat, auf Beschleunigung oder Verzögerung der (im Kurbelkreise befindlichen) Masse M verwendet wurde; man erhält nämlich für die auf Geschwindigkeitsänderung der Masse M verwendete Arbeit den Ausdruck:

$$W = \frac{rP}{n \sin \frac{\pi}{2n}} \left[\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2n}\right) + \cos(n-1)\frac{\pi}{2n}\right] - rQ\alpha \ldots (m).$$

Nun muss aber, wenn bei der Bewegung der Kurbel der Beharrungsstand eintreten soll, zwischen der Kraft P und der Last Q ein bestimmtes Verhältniss stattfinden, und zwar muss dafür während der Bewegung durch eine Periode, d. i. während der Winkel α von Null bis β zunimmt, die producirte der consumirten Arbeit gleich sein. Setzt man daher in der vorigen Relation (2) $\alpha = \beta = \frac{\pi}{n}$, so erhält man, nach Anwendung von bekannten trigonometrischen Formeln:

$$w = \frac{rP}{n \sin \frac{\pi}{2n}} \,.\, 2 \sin \frac{\pi}{2n} = \frac{2rP}{n}$$

als erwähnte producirte Arbeit. Da nun die gleichzeitig consumirte Arbeit $= rQ\frac{\pi}{n}$ ist, so hat man nach der erwähnten Bedingung:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{2rP}{n} = \frac{r\pi}{n} Q, \text{ d. i. } P = \frac{\pi}{2} Q \\ \text{oder } Q = \frac{2}{\pi} P.\end{array}\right\} \ldots (3)$$

Substituirt man daher diesen Werth von Q in der vorigen Relation (m), so erhält man mit Rücksicht auf den Beharrungsstand der Kurbel, für die auf Geschwindigkeitsänderung der Masse M, während der vom Punkte A aus (Fig. 3) gehenden Bewegung bis zu einem beliebigen, dem Winkel α entsprechenden Punkte M verwend ten Arbeit:

$$W = rP\left[\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2n}\right) + \cos(n-1)\frac{\pi}{2n}}{n \sin \frac{\pi}{2n}} - \frac{2}{\pi}\alpha\right] \ldots (4)$$

Anmerkung. Es ist selbstverständlich, dass, da nach jeder Periode die durch P producirte Arbeit durch die von Q consumirte erschöpft sein muss, die vorige Relation (3) zwischen P' und Q auch aus der Gleichung (m) erhalten wird, wenn man in derselben $\alpha = \beta$ und $W = 0$ setzt.

7. Mit Anwendung der lebendigen Kräfte lässt sich die vorige Arbeit W auf Geschwindigkeitsänderung der Masse M noch in einer andern, und zwar in folgender Weise ausdrücken.

Ist c die constante Geschwindigkeit, welche die Kurbelwarzen, sobald der Beharrungsstand eingetreten, im Punkte A (Fig. 3), dagegen v die variable Geschwindigkeit, welche sie in dem, einem beliebigen Winkel α entsprechenden Punkte M besitzen, so wie h und z die zugehörigen Geschwindigkeitshöhen, nämlich

$$h = \frac{c^2}{2g} \text{ und } z = \frac{v^2}{2g} \ldots (n),$$

so wird die erforderliche Arbeit, um die träge Masse M von der Geschwindigkeit c auf jene v zu bringen, bekanntlich durch

$$W' = \tfrac{1}{2} M(v^2 - c^2) = \frac{\mathrm{M}}{2g}(v^2 - c^2) = \mathrm{M}(z - h)$$

ausgedrückt, wenn man das Gewicht der trägen Masse M durch M bezeichnet.

Da nun diese Arbeit W' jener W der Relation (4) gleich sein muss, so hat man auch:

$$Mz = Mh + rP\left[\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2n}\right) + \cos(n-1)\frac{\pi}{2n}}{n\sin\frac{\pi}{2n}} - \frac{2}{\pi}\alpha\right] \ldots (5)$$

8. Um ein richtiges Bild von dem Grade der Gleich- oder vielmehr Ungleichförmigkeit in der Kurbelbewegung zu erhalten, wollen wir zunächst jene Punkte im Kurbelkreise bestimmen, in welchen die grösste und kleinste Geschwindigkeit stattfindet, also v, mithin auch z seinen grössten oder kleinsten Werth erreicht. Da es sich dabei um die Bestimmung des absolut variabeln Winkels α handelt, so erhält man aus der vorigen Relation (5) nach der bekannten Regel:

$$\frac{dz}{d\alpha} = rP\left[\frac{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2n}\right)}{n\sin\frac{\pi}{2n}} - \frac{2}{\pi}\right] = 0,$$

so wie aus dieser Bedingungsgleichung für das Maximum oder Minimum:

$$\cos \pm\left(\alpha - \frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n} \ldots (e)$$

und daraus die zwei Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\pi}{2n} - arc\cos\left(\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right) \\ \alpha'' &= \frac{\pi}{2n} + arc\cos\left(\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right) \end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

von denen, wie man sich leicht durch den zweiten Differentialquotienten überzeugt, der erstere einem Minimum, der letztere oder α'' einem Maximum entspricht.

Macht man daher die Winkel $ACm = \alpha'$ und $ACm' = \alpha''$, so besitzt die Warze L_1 im Punkte m ihre kleinste, so wie im m' ihre grösste Geschwindigkeit. Da übrigens zufolge Relation (6) $\alpha' + \alpha'' = \frac{\pi}{n} = \beta$ ist, so folgt, dass wenn man den Winkel einer

Periode oder zweier in der Entwickelung angenommener aufeinander folgender Kurbelarme, d. i. L_1CL_2 durch CN halbirt, diese beiden Punkte m, m' gegen die Halbirungslinie CN symmetrisch liegen, oder wenn man den Winkel $NCm = i$ setzt, sofort $NCm = NCm' = i$ ist, weil dann $\alpha' = \frac{\pi}{n} - i$ und $\alpha'' = \frac{\pi}{2n} + i$, folglich, wie es sein soll, $\alpha' + \alpha'' = \frac{\pi}{n}$ wird.

9. Bezeichnet man die in den genannten Punkten m und m' beziehungsweise stattfindende kleinste und grösste Geschwindigkeit, welche vermöge der Periodicität jede der n Kurbelwarzen in diesen Punkten erhält, durch c' und c'', so wie die zugehörigen Höhen (Relation (n)) durch h' und h'', setzt in der obigen Relation (5) gleichzeitig $h = h'$ und $\alpha = \alpha'$, so wie $h = h''$ und $\alpha = \alpha''$, und zieht die beiden dadurch entstehenden Gleichungen von einander ab, so erhält man:

$$M(h'' - h') = rP\left[\frac{\sin\left(\alpha'' - \frac{\pi}{2n}\right) - \sin\left(\alpha' - \frac{\pi}{2n}\right)}{n \sin\frac{\pi}{2n}} - \frac{2}{\pi}(\alpha'' - \alpha')\right] \quad (7)$$

oder wenn man der leichteren Vergleichung wegen die Grösse Q einführt, also (Relation (3)) $P = \frac{\pi}{2} Q$ setzt, auch:

$$M(h'' - h') = rQ\left[\frac{\pi}{2n}\left(\frac{\sin\left(\alpha'' - \frac{\pi}{2n}\right) - \sin\left(\alpha' - \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right) - (\alpha'' - \alpha')\right] \quad (8)$$

oder wenn man für die Winkel α' und α'' die obigen Werthe aus Relation (6) einsetzt, und Kürze halber den Winkel oder Bogen

$$arc \cos\left(\frac{2n}{\pi} \sin\frac{\pi}{2n}\right) = \varphi \ldots (f)$$

setzt, endlich:

$$M(h'' - h') = 2rQ\left(\frac{\pi}{2n}\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\pi}{2n}} - \varphi\right) \ldots (9)$$

10. Diese letzte Relation führt schliesslich zur Bestimmung der Masse M, welche man mit der Kurbel in Verbindung bringen

muss, um die bei ihrem Gange stattfindende ungleichförmige Geschwindigkeit, zwischen gegebenen Grenzen einzuschliessen.

Sind nämlich v' und v'' die kleinste und grösste Geschwindigkeit, welche die Kurbel in einem gegebenen Falle annehmen darf, so erhält man aus dieser letzten Gleichung (9), wenn man h' und h'' durch v' und v'' (nach Relation (n)) ausdrückt und wieder die träge Masse M einführt, d. i. $\frac{\mathrm{M}}{g} = M$ setzt sofort:

$$\mathrm{M} = \frac{4rQ}{v''^2 - v'^2}\left(\frac{\pi}{2n}\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\pi}{2n}} - \varphi\right) \;..(10)$$

Will man dagegen, wie es in der Anwendung am bequemsten ist, die mittlere Geschwindigkeit v der Kurbelwarzen einführen und dabei den Grad der Gleichförmigkeit im Gang der Kurbel durch die Bedingung ausdrücken, dass weder die grösste noch die kleinste Geschwindigkeit um mehr als den k^{ten} Theil von der mittleren abweichen dürfe, also $v' = v - \frac{v}{k}$ und $v'' = v + \frac{v}{k}$ sein soll, so erhält man, wegen $v''^2 - v'^2 = \frac{4v^2}{k}$, auch:

$$\mathrm{M} = \frac{krQ}{v^2}\left(\frac{\pi}{2n}\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\pi}{2n}} - \varphi\right). \;..(11)$$

11. Um den Unterschied in der Grösse der Masse M, bei übrigens sonst ganz gleichen Bedingungen, für verschiedene Werthe von m durch einige Beispiele oder specielle Fälle anschaulich zu machen, soll die Masse M nach dieser letzten Formel (11) mit Zuhilfenahme des Hilfswinkel φ in Relation (f) für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und 10 berechnet werden.

a) Für die einfache Kurbel oder $m = 1$ ist (3.), $n = 1$ und $\beta = 180°$. Aus den Relationen (6) in 8. erhält man $\alpha' = 39° \, 32' \, 25''$ und $\alpha' = 140° \, 27' \, 35''$.

Für die mit dem Kurbelkreis zu verbindende träge Masse erhält man aus den Relationen (f) und (11), wenn man der letzteren die Form

$$M = N\frac{krQ}{v^2} \;...(12) \text{ gibt, wo also } N = \frac{\pi}{2n}\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\pi}{2n}} - \varphi \;..(g)$$

ist (wegen $\varphi = 50^\circ\ 27'\ 35''$):

$$N = \cdot 33068, \text{ also } M = \frac{\cdot 33068 krQ}{v^2}.$$

b) Für die **zweifache** Kurbel ist $m = 2$, und wie im vorigen Falle $n = 1$ und $\beta = 180^\circ$; auch erhalten α', α'' und N die vorigen Werthe.

c) Für die **dreifache** Kurbel ist $m = 3$, $n = 3$ und $\beta = 60^\circ$. Man findet, wenn man die Secunden nur bis auf Einheiten abrundet, $\alpha' = 12^\circ\ 43'\ 57''$, $\alpha'' = 47^\circ\ 16'\ 3''$ und (wegen $\varphi = 17^\circ\ 16'\ 3 \cdot 5''$) $N = \cdot 009468$.

d) Für die **vierfache** Kurbel ist $m = 4$, $n = 2$ und $\beta = 90^\circ$. Man findet $\alpha' = 19^\circ\ 11'\ 59''$, $\alpha'' = 70^\circ\ 48'\ 1''$ und ($\varphi = 25^\circ\ 48'\ 1''$) $N = \cdot 033125$.

Diese Kurbel ist in ihrer Wirkung identisch mit jener der gewöhnlich sogenannten **doppelten** Kurbel, bei welcher die beiden Arme einen **rechten** Winkel bilden, und welche u. A. bei den Locomotiv- und Schiffsmaschinen angewendet wird.

e) Für die **fünffache** Kurbel ist $m = 5$, $n = 5$ und $\beta = 36^\circ$. Man findet dafür $\alpha' = 7^\circ\ 37'\ 8''$, $\alpha'' = 28^\circ\ 22'\ 52''$ und ($\varphi = 10^\circ\ 22'\ 51''$) $N = \cdot 002009$.

f) Für die **sechsfache** Kurbel ist $m = 6$, $n = 3$ und $\beta = 60^\circ$. Die Werthe für α', α'' und N sind dieselben wie in *c)* bei der dreifachen Kurbel.

g) Für die 20fache Kurbel endlich, wofür $m = 20$, $n = 10$ und $\beta = 18^\circ$ ist, wäre $\alpha' = 3^\circ\ 48'\ 15''$, $\alpha'' = 14^\circ\ 11'\ 45''$ und $N = \cdot 000317$.

12. Aus diesen Beispielen wird ersichtlich, wie die Gleichförmigkeit in dem Gange der Kurbel mit der Anzahl der Arme zunimmt oder die auf den Kurbelkreis reducirte Masse M, für denselben Grad der Gleichförmigkeit abnimmt. So ist diese letztere z. B. bei der dreifachen Kurbel bereits schon nahe 35 Mal kleiner als bei der einfachen oder einarmigen Kurbel.

Da man in der Anwendung diese Masse M auf ein an der Kurbelachse befestigtes Schwungrad reducirt, so wird die Schwungmasse $M' = \frac{r^2}{R^2} M$, wenn man dabei blos den Schwungkranz, dessen mittlerer Halbmesser R ist, in Betracht zieht.

13. Obschon somit die Aufgabe der vielfachen doppelt wirkenden Kurbel für die Praxis vollkommen gelöst ist, indem das Ausdrücken der Kraft P in Pferdekräfte, und die mittlere Geschwindigkeit v durch die Anzahl der Umgänge der Kurbel per Minute, wie dies gewöhnlich geschieht, ganz einfach und hier untergeordnet ist; so gibt die Theorie dieser Kurbel doch ausserdem noch zu einigen interessanten Untersuchungen und Bemerkungen Anlass, welche hier noch in Kürze vorgenommen werden sollen.

14. Sucht man zuerst jenen Winkel $\alpha = \delta$, für welchen die Tangentialkraft seitens der Kraft P mit der ebenfalls nach der Tangente wirkenden Last Q im Gleichgewichte steht, wofür also (4. Relation (a)) $P' = Q$ ist, so erhält man mit Rücksicht auf die Relationen (1) und (3) in 4. und 6. die Bedingungsgleichung:

$$p \frac{\sin \frac{1}{2} n\beta}{\sin \frac{1}{2} \beta} \sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}(n-1)\beta\right) = \frac{2}{\pi} P$$

oder wegen $p = \frac{1}{n} P$, $\beta = \frac{\pi}{n}$ und wenn man den Sinus durch den Cosinus ausdrückt:

$$\cos \pm\left(\alpha - \frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Es gibt also für α wieder zwei Winkel δ' und δ'', welche diese Bedingung erfüllen und diese sind, wie die Vergleichung dieser letzteren Gleichung mit jener (e) in 8. zeigt, $\delta' = \alpha'$ und $\delta'' = \alpha''$, d. h. die Gleichheit zwischen der Tangentialkraft P' und der Last Q tritt genau in jenen beiden Punkten m und m' (Fig. 3) ein, in welchen die kleinste und grösste Geschwindigkeit der Kurbelwarzen stattfindet. Ja, es lässt sich aus dem Umstande, dass die Kräfte P' und Q in diesen Punkten m und m' einander gleich sind, aus der Natur der Sache beweisen, dass in diesen Punkten in der That beziehungsweise die kleinste und grösste Geschwindigkeit stattfinden muss.

Denn es folgt aus der obigen Relation (1) in 4., wie leicht zu sehen:

$$P' = P \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \alpha\right)}{n \sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2} Q \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \alpha\right)}{n \sin \frac{\pi}{2n}} \ldots (r)$$

mithin, da für $\alpha = \delta'$, $P' = Q$ ist, auch:

$$\frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \delta'\right)}{n \sin \frac{\pi}{2n}} = 1.$$

Da nun für jeden zwischen 0 und δ' liegenden Werth von α sofort

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \alpha\right) < \cos\left(\frac{\pi}{2n} - \delta'\right)$$

ist, so folgt auch dafür

$$\frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \alpha\right)}{n \sin \frac{\pi}{2n}} < \frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \delta'\right)}{n \sin \frac{\pi}{2n}}, \text{ d. i. } < 1.$$

Daher ist:

$$\frac{\pi}{2} Q \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \alpha\right)}{n \sin \frac{\pi}{2n}} < Q, \text{ nämlich } P' < Q.$$

Eben so ist für alle zwischen δ' und δ'' liegenden Werthe von α, wenn man $\alpha = \delta' + w$ setzt, wobei w von Null bis $\delta'' - \delta'$ zunehmen kann:

$$P' = \frac{\pi}{2} Q \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \delta' - w\right)}{n \sin \frac{\pi}{2n}} \;..(s)$$

und da für $w = 0$, wieder $P' = Q$, also wieder

$$\frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \delta'\right)}{n \sin \frac{\pi}{2n}} = 1,$$

ferner

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \delta' - w\right) > \cos\left(\frac{\pi}{2n} - \delta'\right),$$

also auch

$$\frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \delta' - w\right)}{n \sin \frac{\pi}{2n}} > \frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \delta'\right)}{n \sin \frac{\pi}{2n}},$$

mithin

$$\frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}-\delta'-w\right)}{n\sin\frac{\pi}{2n}} > 1$$

ist, so folgt, wenn man wieder beiderseits mit Q multiplicirt (vorige Relation (s)):

$$P' > Q.$$

Aus diesen Betrachtungen folgt nun ganz einfach, dass während die Kurbelwarze L_1 bei ihrer Bewegung, nachdem nämlich der Beharrungsstand bereits eingetreten, von A bis m geht, wegen $P' < Q_1$ fortwährend Arbeit consumirt, dagegen von m bis m', wegen $P' > Q$, Arbeit producirt wird, das also die Masse M von A bis m verzögert, dagegen von m bis m' beschleunigt wird, und dass sonach naturgemäss in m die kleinste und in m' die grösste Geschwindigkeit eintreten oder stattfinden muss, ganz so wie dies oben in 8. bereits auf einem anderen Wege gefunden wurde.

15. Für den zwischen diesen beiden Punkten m und m' in der Mitte liegenden Punkt N (Fig. 3) hat α den Werth:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} = \frac{\pi}{2n} \ldots (t).$$

Setzt man diesen Werth für α in der vorigen Relation (r), so erreicht der Cosinus, welcher dafür $= 1$ wird, folglich auch P' den grössten Werth, und zwar ist dafür:

$$P'_{max.} = \frac{\pi Q}{2n\sin\frac{\pi}{2n}} \ldots (u).$$

Hieraus folgt also, dass die Tangentialkraft P' von m bis N zu, und von da an bis m' wieder eben so abnimmt; in diesen Punkten ist, wie schon früher bemerkt, $P' = Q$ so wie zwischen diesen Punkten $P' > Q$.

Für die einfache Kurbel ist wegen $n = 1$ für den Punkt N der Winkel $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} = 90°$ und $P'_{max.} = \frac{\pi}{2}\,Q = P = 1{\cdot}5708\ Q$.

Für die doppelte Kurbel, mit zwei rechtwinkeligen Armen ist wegen $n = 2$:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \text{ und } P'_{max.} = \frac{\pi}{4} \frac{Q}{\sin 45} = 1 \cdot 1107 \; Q.$$

Für die dreifache Kurbel ist wegen $n = 3$:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \text{ und } P'_{max.} = \frac{\pi Q}{6 \sin 30} = 1 \cdot 0472 \; Q.$$

Für die 20fache Kurbel wäre, wegen $n = 10$ sofort:

$$\alpha_1 = \frac{180^\circ}{20} = 9^\circ \text{ und } P'_{max.} = \frac{\pi}{20} \frac{Q}{\sin 9^\circ} = 1 \cdot 00412 \; Q.$$

16. Um ferner auch zu bestimmen, in welchem Punkte des Kurbelkreises die Tangentialkraft P' den kleinsten Werth hat und wie gross dieser ist, darf man nur berücksichtigen, dass in der obigen Relation (r) in 14. der Winkel $\frac{\pi}{2n} - \alpha$ für $\alpha = 0$ am grössten, mithin der Cosinus und sonach auch P' am kleinsten wird, und zwar ist dieser kleinste Werth:

$$P'_{min.} = \frac{\pi}{2n} Q \cot \frac{\pi}{2n} \ldots (v).$$

Dieser kleinste Werth findet übrigens (wegen $\alpha = 0$) immer im Anfangspunkte A des Kurbelkreises statt.

Für $n = 1, 2, 3 \ldots 10$ ist sonach beziehungsweise:

$$P'_{min.} = 0, \quad \cdot 7854 Q, \quad \cdot 9069 Q, \ldots \cdot 9918 Q.$$

17. Öfter beurtheilt man auch den Grad der Gleichförmigkeit im Kurbelumlaufe nach dem Verhältnisse zwischen der Differenz der grössten und kleinsten zur mittleren Geschwindigkeit, d. i. durch

$$s = \frac{v'' - v'}{v}.$$

Nun ist (Nr. 10) $v'' - v' = \frac{2v}{k}$, folglich $s = \frac{2}{k}$, oder, da aus der Relation (12) in Nr. 11. $\frac{2}{k} = \frac{2NrQ}{Mv^2}$ folgt, auch:

$$s = N \frac{2rQ}{Mv^2} = NR, \text{ wenn man nämlich } \frac{2rQ}{Mv^2} = R \text{ setzt.}$$

Für die nämlichen Werthe von r, Q, M und v, wofür also auch R denselben Werth beibehält, hängt sonach die Verhältnisszahl s lediglich von der Grösse N ab, welche wir in Nr. 11 bereits für verschiedene Werthe von n angegeben haben. Mit diesen Werthen ist also für $n = 1, 2, 3, 5, 10$, der Reihe nach:

$$s = \cdot 33068 R,\quad \cdot 033125 R,\quad \cdot 009468 R,\quad \cdot 002009 R,\quad \cdot 000317 R,$$

woraus sofort folgt, dass bei der vierfachen oder gewöhnlichen doppelten Kurbel mit zwei rechtwinkeligen Armen die Gleichförmigkeit schon nahe 10 Mal, und bei dreifacher Kurbel nahe 35 Mal grösser als bei der einfachen Kurbel ist, was sofort mit dem in Nr. 12 Bemerkten genau übereinstimmt.

Noch ist, wegen $s = \frac{2}{k} = \frac{v'' - v'}{v}$ die Differenz zwischen der grössten und kleinsten Kurbelgeschwindigkeit: $v'' - v' = sv$, mithin für die vorigen Werthe von $n = 1, 2, 3, 5, 10$, beziehungsweise:

$$v'' - v' = \cdot 33068 Rv,\quad \cdot 033125 Rv \text{ u. s. w.}$$

18. Schliesslich soll noch das Verhältniss zwischen dem grössten und kleinsten Werth der Tangentialkraft P' ausgedrückt werden.

Zu diesem Ende folgt aus den Relationen (u) und (v) in Nr. 15. und 16. nach einer ganz einfachen Reduction:

$$\frac{P'_{min.}}{P'_{max.}} = \cos \frac{\pi}{2n} \ldots (w).$$

Es ist daher, wenn man dieses Verhältniss durch z bezeichnet, für die vorigen Werthe von $n = 1, 2, 3, 5, 10$, der Reihe nach:

$$z = 0,\quad \cdot 7071,\quad \cdot 8660,\quad \cdot 9511,\quad \cdot 9877,$$

woraus ersichtlich ist (und auch aus der vorigen Gleichung (w) folgt), dass z mit der fortwährenden Zunahme von n, ohne Ende gegen die Einheit convergirt.

Will man endlich auch den **mittleren** Werth dieser Tangentialkraft, nämlich P'_m ausdrücken, so darf man nur erwägen, dass

während einer vollen Umdrehung der Kurbel die Arbeit der Kraft P durch $4rP$ [1]) und jene der Kraft P'_m durch $2r\pi P'_m$ ausgedrückt wird und beide diese Werthe einander gleich sein müssen. Setzt man also $4rP = 2r\pi P'_m$, so folgt daraus:

$$P'_m = \frac{2}{\pi} P \text{ oder (Relation (3) in Nr. 6) } P'_m = Q,$$

was sich wohl auch von selbst versteht.

B. Einfach wirkende Kurbel.

a) Für m gerade.

19. Bezeichnet wieder m die Anzahl der Kurbelarme oder Warzen und ist zuerst m gerad, also $m = 2n$, so befinden sich im oberen Halbkreis des Kurbelkreises fortwährend $\frac{m}{2} = n$ Kurbelwarzen, und wenn in jede eine Schubstange mit der Kraft p eingehängt ist, welche fortwährend mit dem Durchmesser AB (Fig. 3) parallel, jedoch nur in dieser einen Richtung, oder schiebend wirkt, so ist auch hier der Winkel einer Periode $\beta = \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{n}$.

Bildet der erste Kurbelarm CL_1 mit dem Durchmesser AB den Winkel α, und zerlegt man in dieser Lage die einzelnen Kräfte p wieder in die zwei rechtwinkelige Componenten, wovon die eine nach der Tangente wirkt, so erhält man für die Summe der n Tangentialkräfte genau wieder, wie oben in 4. Relation (1):

$$P' = p \frac{\sin \frac{1}{2} n\beta}{\sin \frac{1}{2} \beta} \sin\left(\alpha + \tfrac{1}{2}(n-1)\beta\right) \cdot \quad ..(1)$$

---

[1]) Will man diese Arbeit, die aus der Natur der Sache folgt, aus der obigen Relation (2) in Nr. 5. ableiten, so kann man dabei in folgender Weise verfahren:

Für eine halbe Umdrehung der Kurbel erhält man für die Arbeit der Kraft p, wegen $\alpha = \pi$ und $P = np$:

$$w = \frac{rp}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left(\sin(n-1)\frac{\pi}{2n} + \cos(n-1)\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{rp}{\sin\frac{\pi}{2n}} \cdot 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\left(90 - \frac{\pi}{2n}\right)$$

d. i. $w = 2rp$; folglich ist für eine ganze Umdrehung und für n solche Kräfte p:

$$w = 2 \cdot 2rnp = 4rP.$$

Eben so ist auch im Allgemeinen die Arbeit dieser Kraft P':

$$w = \int_0^\alpha P' r d\alpha\,,$$

oder wenn man für P' den Werth substituirt, integrirt und für β den Werth $\frac{\pi}{n}$ setzt:

$$w = \frac{rp}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left[\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2n}\right) + \cos\,(n-1)\frac{\pi}{2n}\right] \ldots (2)$$

Die auf Geschwindigkeitsänderung der im Kurbelkreise angenommenen Masse M verwendete Arbeit ist während dieser Bewegung von $\alpha = 0$ bis α:

$$W = \frac{rp}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left[\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2n}\right) + \cos\,(n-1)\frac{\pi}{2n}\right] - r\alpha Q. \ldots (3)$$

Da aber für den Beharrungszustand die Arbeit der Kraft P' während der Bewegung durch Eine Periode jener der Last Q gleich sein muss, und die erstere, wenn man in der vorigen Relation (2) $\alpha = \beta = \frac{\pi}{n}$ setzt, sofort

$$w = \frac{rp}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left[\sin\frac{\pi}{2n} + \cos\,(n-1)\frac{\pi}{2\pi}\right] = \frac{rp}{\sin\frac{\pi}{2n}}\,.\,2\sin\frac{\pi}{2n} = 2rp,$$

dagegen die letztere $= r\beta Q = r\,\frac{\pi}{n}\,Q$ ist, so folgt für den Beharrungsstand $2rp = \frac{r\pi}{n}\,Q$ und daraus:

$$\left.\begin{array}{l} p = \frac{\pi}{2n}Q \\ \text{oder } Q = \frac{2n}{\pi}p. \end{array}\right\} \ldots$$

Mit diesem Werthe von Q geht die vorige Gleichung (3) in die folgende über:

$$W = rp\left[\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2n}\right) + \cos(n-1)\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} - \frac{2n}{\pi}\alpha\right] \quad ..(5)$$

20. Führt man wieder die lebendigen Kräfte ein, so erhält man mit Beibehaltung der oben in 7. angenommenen Bezeichnung:

$$\mathrm{M}z = \mathrm{M}h + rp\left[\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2n}\right) + \cos(n-1)\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} - \frac{2n}{\pi}\alpha\right], \quad ..(6)$$

wobei nämlich wieder h und z die den Geschwindigkeiten c und v entsprechenden Höhen sind, welche die Kurbelwarzen in A und M besitzen und M die dem Gewichte nach ausgedrückte Masse im Kurbelkreise bezeichnet.

Bestimmt man nun auch hier die Punkte m und m', in welchen $P' = Q$ oder was, wie wir oben gesehen, zu demselben Resultate führt, in welchen beziehungsweise die kleinste und grösste Kurbelgeschwindigkeit stattfindet, so findet man genau so wie oben in 8. oder 14. für die diesen beiden Punkten entsprechenden Winkel beziehungsweise (Relation (6) in 8.):

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\pi}{2n} - arc\cos\left(\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right) \\ \alpha'' &= \frac{\pi}{2n} + arc\cos\left(\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right) \end{aligned}\right\} ..(7)$$

wofür also wieder $\alpha' + \alpha'' = \frac{\pi}{n}$ gleich dem Winkel der Periode ist.

Mit Einführung der diesen beiden Winkeln α' und α'', d. i. den beiden Punkten m und m' entsprechenden kleinsten und grössten Geschwindigkeitshöhen h' und h'' in der Gleichung (6), erhält man analog mit der Relation (7) in 9.

$$\mathrm{M}(h'' - h') = rp\left[\frac{\sin\left(\alpha'' - \frac{\pi}{2n}\right) - \sin\left(\alpha' - \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}} - \frac{2n}{\pi}(\alpha'' - \alpha')\right] (8)$$

oder mit Rücksicht auf die vorigen Werthe von α' und α'' in (7), so wie dass (Relation (4)) $p = \frac{\pi}{2n} Q$ ist, und wenn man Kürze halber

$$arc\cos\left(\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)=\varphi\ ..(9)$$

setzt, auch:

$$M(h''-h')=2rQ\left(\frac{\pi}{2n}\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\pi}{2n}}-\varphi\right)..(10).$$

Da diese Gleichung mit jener (9) in Nr. 9 identisch ist, so gelten auch hier alle die weitern in Nr. 10 und 11 gemachten Bemerkungen hinsichtlich der Grösse der Masse M, für welche die Schwankungen in den Kurbelgeschwindigkeiten innerhalb gegebener Grenzen eingeschlossen bleiben, folglich auch die obigen Relationen (10), (12) und (g). Man erhält daher auch z. B. für $m=4$, also $n=2$ für die vierfache, oder auch doppelte Kurbel mit zwei rechtwinkeligen Armen, wie in 11. d): $\alpha'=19^\circ\ 11'\ 59''$, $\alpha''=70^\circ\ 48'\ 1''$ ($\varphi=25^\circ\ 48'\ 1''$) und $M=\frac{\cdot 033125krQ}{v^2}$; nur ist dort bei der doppelt wirkenden Kurbel, wegen $P=4p=\frac{\pi}{2}Q$ sofort $p=\frac{\pi}{8}Q$, dagegen hier bei der einfach wirkenden (Relation 4) $p=\frac{\pi}{4}Q$, also doppelt so gross, wie es sich, wenn die Last Q in beiden Fällen dieselbe sein soll, von selbst versteht.

b) Für m ungerad.

21. Ist die Anzahl der Kurbelarme also auch Kurbelwarzen m ungerad und setzt man $m=2n-1$, so befinden sich von den m Kurbelwarzen, wenn die erste auf dem Anfangspunkt A (Fig. 2 oder Fig. 3) liegt, im oberen Halbkreise, wie leicht zu sehen, $\frac{m+1}{2}=n$ Warzen, folglich auch eben so viele mit AB parallel wirkende Kräfte p. Da nun auch hier wieder der Winkel der Periode $\beta=\frac{2\pi}{m}$ ist, so bildet bei der angenommenen Lage der im oberen Halkkreise befindlichen n Warzen oder Arme der n^{te}, welcher dem Radius CB zunächst liegt, mit diesem Halbmesser CB einen Winkel $=\pi-(n-1)\frac{2\pi}{2n-1}=\frac{\pi}{2n-1}=\frac{1}{2}\beta$, d. i. gleich dem halben Winkel der Periode.

Während sich daher die erste Kurbelwarze (folglich auch alle übrigen um den gleichen Winkel) von A aus um den Winkel $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ fortbewegt, bleiben sämmtliche n Warzen, also auch n Kräfte p parallel mit AB wirksam; während, wenn die Bewegung weiter und zwar bis $\alpha = \beta$ fortgeht, im oberen Halbkreise nur mehr $n-1$ Kurbelwarzen, mithin auch nur eben so viele der mit AB parallelen Kräfte p verbleiben. (Für $m = n = 1$, ist daher während der zweiten Hälfte der Periode gar keine Kraft p im oberen Halbkreis wirksam.)

Die Summe der Tangentialkräfte ist daher während des Fortschreitens der Kurbel um die erste und zweite Hälfte des Periodenwinkels β, beziehungsweise:

$$P' = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = p \frac{\sin \frac{1}{2} n\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta} \sin\left(\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right) \ldots (a)$$

und

$$P'' = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} = p \frac{\sin \frac{1}{2}(n-1)\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta} \sin\left(\alpha + (n-2)\frac{\beta}{2}\right) \ldots (a')$$

Die Arbeit dieser Kraft ist sonach während der ersten halben Periode:

$$w' = \int_0^{\frac{\beta}{2}} rP'd\alpha = rp \int_0^{\frac{\beta}{2}} \frac{\sin \frac{1}{2} n\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta} \sin\left(\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right) d\alpha$$

und während der zweiten Hälfte:

$$w'' = \int_{\frac{\beta}{2}}^{\beta} rP''d\alpha = rp \int_{\frac{\beta}{2}}^{\beta} \frac{\sin \frac{1}{2}(n-1)\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta} \sin\left(\alpha + (n-2)\frac{\beta}{2}\right) d\alpha,$$

oder wenn man diese Integrationen ausführt:

$$w' = rp \frac{\sin \frac{1}{2} n\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta} \left[\cos (n-1)\frac{\beta}{2} - \cos \frac{n\beta}{2}\right]$$

und

$$w'' = rp \frac{\sin \frac{1}{2}(n-1)\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta} \left[\cos (n-1)\frac{\beta}{2} - \cos \frac{n\beta}{2}\right].$$

Während also der Winkel α von 0 bis β zunimmt, wird von Seite der m parallelen Kräfte p eine Arbeit $w = w' + w''$ verrichtet, und diese ist, wenn man für w' und w'' die vorigen Werthe setzt und gehörig reducirt:

$$w = rp\left[\cos(n-1)\frac{\beta}{2} - \cos\frac{n\beta}{2}\right]\left[\frac{\sin\frac{1}{2}n\beta + \sin\frac{1}{2}(n-1)\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\right]$$

$$= 2rp\left[\sin(2n-1)\frac{\beta}{4}\right]^2,$$

oder wegen

$$\beta = \frac{2\pi}{2n-1} \text{ auch: } w = 2rp\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2, \text{ d. i.}$$

$$w = 2rp,$$

was man auch unmittelbar aus der blossen Betrachtung der Wege findet, welche die Kräfte p in der Richtung AB bei dem Fortschreiten der Kurbel von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \beta$ zurücklegen. Die Summe der Wege der im oberen Halbkreis wirkenden Kräfte ist nämlich, während dieser Bewegung die Projection dieses Halbkreises auf den Durchmesser AB, also $= 2r$, folglich die Arbeit dieser Kräfte:

$$w = ps + ps' + ps'' + \text{—} = p(s + s' + s'' + \text{—}) = p.2r.$$

Da nun für den Beharrungsstand diese Arbeit jener, welche während einer Periode von dem Widerstande Q consumirt wird, gleich, d. i. $2rp = \frac{2r\pi}{2n-1}Q$ sein muss, so erhält man für das Verhältniss, welches zwischen p und Q bestehen muss, wenn der Beharrungsstand möglich sein soll:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\pi}{2n-1}Q \\ \text{oder } Q &= \frac{2n-1}{\pi}p. \end{aligned}\right\} \ldots (b)$$

22. So lange der allgemein variable Winkel α den halben Periodenwinkel β nicht überschreitet, hat man für die Arbeit von Seite der Tangentialkraft P':

$$w = \int_0^\alpha P' r d\alpha = rp \frac{\sin \frac{1}{2} n\beta}{\sin \frac{1}{2} \beta} \int_0^\alpha \sin\left(\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right) d\alpha,$$

d. i.

$$w = rp \frac{\sin \frac{1}{2} n\beta}{\sin \frac{1}{2} \beta} \left[\cos (n-1) \frac{\beta}{2} - \cos\left(\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right)\right] \ldots (1).$$

Zieht man von dieser Arbeit jene $Q.r\alpha$ der Last ab, so bleibt die Arbeit übrig, welche auf Geschwindigkeitsänderung der im Kurbelkreis angenommenen Masse M verwendet worden, während der Winkel α von 0 bis $\alpha \leqq \frac{\beta}{2}$ zugenommen. Man erhält nämlich, wenn man gleich für β den Werth $\frac{2\pi}{2n-1}$ und für Q den Werth aus der vorigen Relation (b) substituirt, für diese Arbeit den Ausdruck:

$$W = rp\left[\sin \frac{n\pi}{2n-1}\left(\frac{\cos (n-1)\frac{\pi}{2n-1} - \cos\left(\alpha + (n-1)\frac{\pi}{2n-1}\right)}{\sin \frac{\pi}{2n-1}}\right) - \frac{(2n-1)}{\pi}\alpha\right] . (2)$$

23. Zur Bestimmung jener beiden Punkte m und m' wieder, in welchen $P' = Q$ und daher auch beziehungsweise die kleinste und grösste Kurbelgeschwindigkeit stattfindet, folgt aus der obigen Relation (a) in 21. (weil wie die Entwickelung zeigt, die diesen Punkten entsprechenden Winkel α' und α'' wirklich noch kleiner als $\frac{1}{2}\beta$ sind) wenn man auch gleich für Q den Werth aus der vorigen Relation (b) setzt und mit p abkürzt, endlich auch statt $\sin\left(\alpha + (n-1)\frac{\beta}{2}\right)$ den gleichgeltenden Werth durch den Cosinus ausgedrückt nimmt:

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2(2n-1)}\right) = \frac{2n-1}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2n-1}}{\sin \frac{n\pi}{2n-1}} \ldots (c).$$

Aus dieser Relation erhält man sofort die beiden Winkel α' und α' und zwar ist, wenn man Kürze halber

$$arc \cos\left[\frac{2n-1}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2n-1}}{\sin \frac{n\pi}{2n-1}}\right] = \varphi' \ldots (3)$$

setzt;

$$\left.\begin{aligned}\alpha' &= \frac{\pi}{2(2n-1)} - \varphi' \\ \alpha'' &= \frac{\pi}{2(2n-1)} + \varphi'\end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

Da nun hieraus die Summe $\alpha' + \alpha'' = \frac{\pi}{2n-1} = \frac{1}{2}\beta$ folgt, so ist in der That, wie vorbin vorausgesetzt wurde, jeder dieser beiden Winkel α' und α'' kleiner als der Winkel einer halben Periode.

24. Durch Einführung der lebendigen Kräfte erhält man nach dem obigen Vorgange und derselben Bezeichnung (wie in Nr. 9) aus der vorigen Relation (2):

$$M(h''-h') =$$

$$rp\left[\sin\frac{n\pi}{2n-1}\left[\frac{\cos\left(\alpha'+(n-1)\frac{\pi}{2n-1}\right)-\cos\left(\alpha''+(n-1)\frac{\pi}{2n-1}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n-1}}\right]-\frac{2n-1}{\pi}(\alpha'-\alpha'')\right]$$

oder wenn man nach der vorigen Relation (b) p durch Q ausdrückt, d. i. $p = \frac{\pi}{2n-1}Q$, so wie auch gleichzeitig für α' und α'' die Werthe aus der letzten Relation (4) setzt:

$$M(h''-h') = 2rQ\left[\frac{\pi}{2n-1}\,\frac{\sin\frac{n\pi}{2n-1}}{\sin\frac{\pi}{2n-1}}\sin\varphi' - \varphi'\right] \ldots (5)$$

Setzt man endlich zur leichteren Vergleichung, das in der Klammer eingeschlossene Binom:

$$\frac{\pi}{2n-1}\,\frac{\sin\frac{n\pi}{2n-1}}{\sin\frac{\pi}{2n-1}}\sin\varphi' - \varphi' = N' \ldots (6)$$

so erhält man mit Beibehaltung der dortigen Bedeutung von v und k schliesslich für die dem Gewichte nach ausgedrückte Masse M, welche man sich auf den Kurbelkreis reducirt denken muss, den Ausdruck:

$$M = \frac{N'krQ}{v^2} \ldots (7)$$

welcher sofort mit jenem in Relation (12) in Nr. 11. übereinstimmt.

25. Nimmt man nun, um diese Formeln auf einige specielle Fälle anzuwenden, zuerst die **einfache** oder **einarmige** Kurbel, so ist dafür $m = 1$, also auch $n = \frac{m+1}{2} = 1$. Dafür folgt aus der Relation (3) der Hilfswinkel

$$\varphi' = 71^\circ\, 26'\, 21''$$

und damit aus (4):

$$\alpha' = 18^\circ\, 33'\, 39'',\ \alpha'' = 161^\circ\, 26'\, 21'' \left(\text{also } \alpha' + \alpha'' = \frac{\pi}{2n-1} = 180^\circ\right)$$

so wie aus Relation (6):

$$N' = 1 \cdot 731425.$$

Da aber für die doppelt wirkende Kurbel (Nr. 11 (*a*)) $N = \cdot 33068$, und $\frac{N'}{N} = \frac{1 \cdot 731425}{\cdot 33068} = 5 \cdot 24$ ist, so folgt, wie die Vergleichung des Werthes von M in der vorigen Relation (7) mit jenem (12) in Nr. 11. ergibt, dass bei Voraussetzung derselben Werthe von v, k, r und Q mit der **einfach** wirkenden Kurbel eine $5\frac{1}{4}$ Mal grössere Masse als mit der **doppelt** wirkenden verbunden werden müsse, wenn man in beiden Fällen dieselbe Gleichförmigkeit im Gange der Kurbel erreichen will.

Für die **dreifache** Kurbel ist $m = 3$, also $n = \frac{m+1}{2} = 2$, mithin Relation (3) der Hilfswinkel $\varphi' = 17^\circ\, 16'\, 3''$ und damit aus den Relationen (4) und (6):

$$\alpha' = 12^\circ\, 43'\, 57'',\ \alpha'' = 47^\circ\, 16'\, 3'' \left(\text{also } \alpha' + \alpha'' = \frac{\pi}{2n-1} = 60^\circ\right)$$

$$\text{und } N' = \cdot 009468.$$

Da dieses die nämlichen Werthe sind, welche wir (Nr. 11. (*c*)) für die **doppelt** wirkende dreifache Kurbel gefunden haben, so folgt hieraus, dass bei Benützung der gleichen Masse M auch in beiden Fällen dieselbe Gleichförmigkeit im Gange der Kurbel erreicht wird, nur muss bei der **einfach** wirkenden Kurbel jede der drei

Kräfte $p\left(=\frac{\pi}{3}Q\right)$ doppelt so gross als bei der doppelt wirkenden sein (wo $p=\frac{\pi}{6}Q$ ist).

Auf gleiche Weise erhält man auch für die fünffache einfach wirkende Kurbel für φ', α', α'' und N' dieselben Werthe, wie oben in Nr. 11. (e) für die doppelt wirkende.

26. Aber nicht nur für die hier angeführten speciellen Fälle, sondern überhaupt für alle ungeraden Zahlen von m, mit einziger Ausnahme von $m=1$ (aus leicht einzusehendem Grunde), erhält man hier für φ', α', α'' und N' genau dieselben Werthe, wie wir diese oben bei der doppelt wirkenden Kurbel gefunden haben. Um sich davon allgemein zu überzeugen, darf man nur in den betreffenden Relationen m statt n einführen, wobei man zu Folge der Annahme, für die doppelt wirkende Kurbel $n=m$ und die einfach wirkende $n=\frac{m+1}{2}$ zu setzen hat, so wie endlich eine ganz einfache Transformation vornehmen, nämlich $\sin x$ durch $2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x$ und $\cos x$ durch $\sin(90^\circ+x)$ ausdrücken. Man erhält nämlich für die doppelt wirkende Kurbel aus Relation (f) in 9. und Relation (g) in 11:

$$\varphi=arc\cos\left(\frac{2m}{\pi}\sin\frac{\pi}{2m}\right)\text{ und }N=\frac{\pi}{2m}\,\frac{\sin\varphi}{\sin\frac{\pi}{2m}}-\varphi,$$

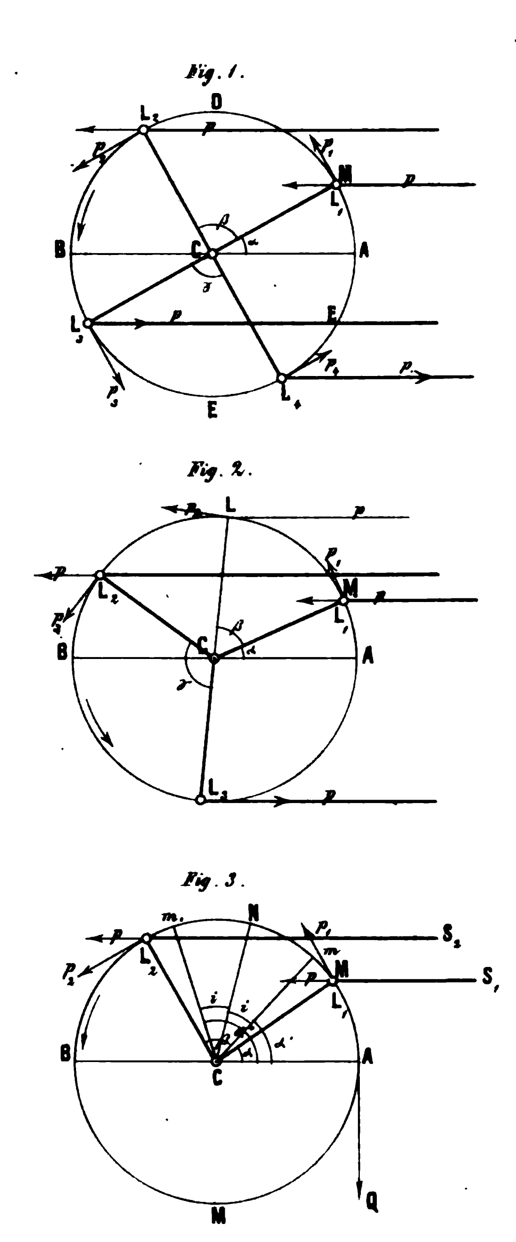
dagegen für die einfach wirkende Kurbel aus den Relationen (3) und (6) in 23. und 24.:

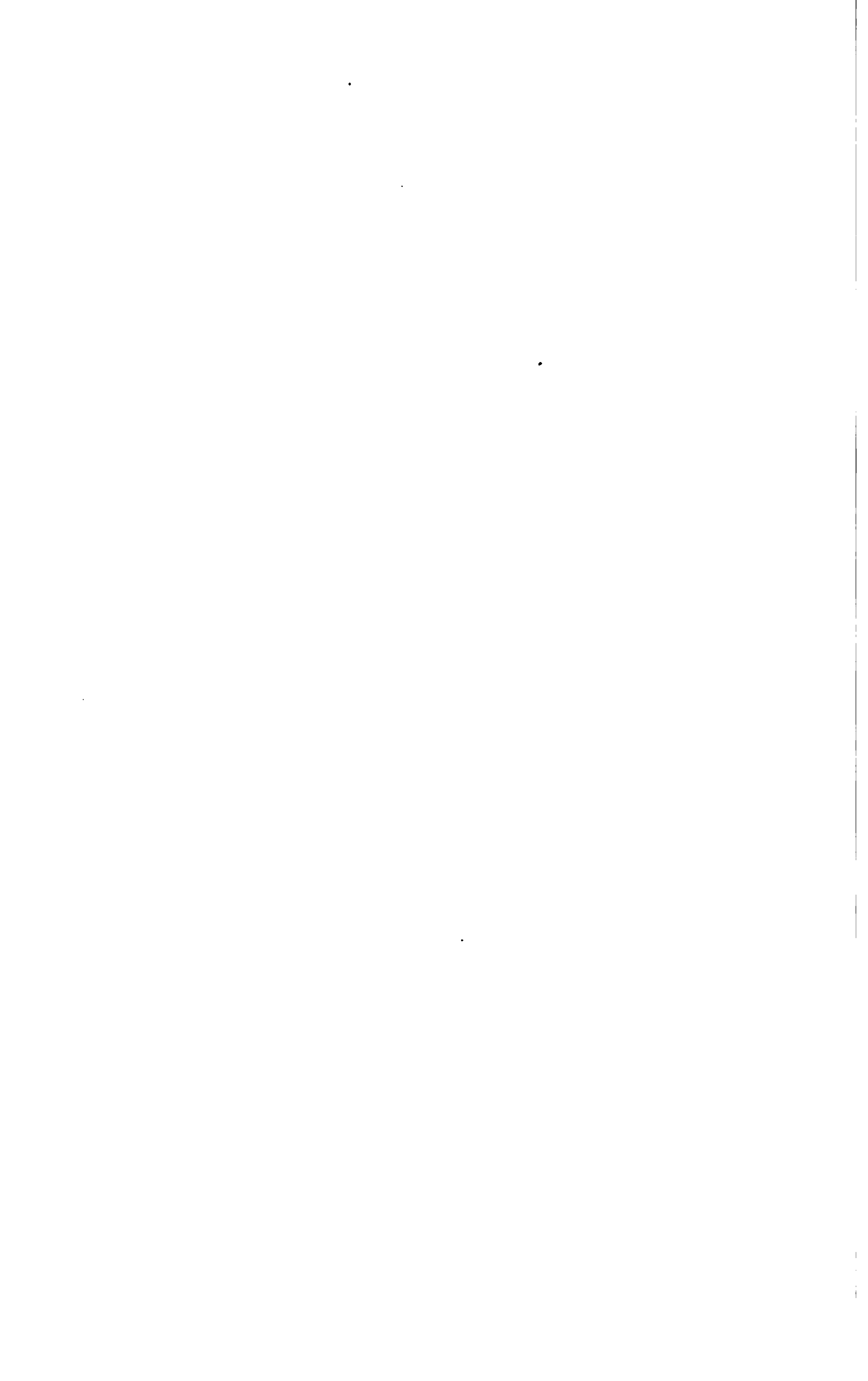
$$\varphi'=arc\cos\left(\frac{m}{\pi}\,\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\sin\left(\frac{m+1}{2m}\right)\pi}\right)\text{ und }N'=\frac{\pi}{m}\,\frac{\sin\left(\frac{m+1}{2m}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{m}}\sin\varphi'-\varphi'.$$

Nun ist aber

$$\sin\frac{\pi}{m}=2\sin\frac{\pi}{2m}\cos\frac{\pi}{2m}=2\sin\frac{\pi}{2m}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2m}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{2m}\sin\left(\frac{m+1}{2m}\right)\pi,$$


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.



mithin auch

$$\varphi' = arc\ \cos\left(\frac{2m}{\pi}\sin\frac{\pi}{2m}\right) \text{ und } N' = \frac{\pi}{2m}\frac{\sin\varphi'}{\sin\frac{\pi}{2m}} - \varphi',$$

also in der That $\varphi' = \varphi$ und $N' = N$, welche Gleichheit sofort auch jene der beiden, dem Minimum und Maximum der Geschwindigkeit entsprechenden Winkel α' und α'' zur Folge hat.

Ferner ist auch allgemein für die doppelt wirkende Kurbel, wegen $p = \frac{P}{n}$ oder da für m ungerad $n = m$, auch $p = \frac{P}{m}$ aus der Relation (3) in Nr. 6: $p = \frac{\pi}{2m} Q$; dagegen für die einfach wirkende Kurbel, aus Relation (b) in Nr. 21., wegen $2n - 1 = m$ sofort $p = \frac{\pi}{m} Q$, also doppelt so gross.

Schliesslich bedarf es kaum der Bemerkung, dass wenn nicht, wie in dieser Entwickelung vorausgesetzt worden, P die auf die Kurbel wirkende bewegende Kraft und Q die durch die Kurbel zu überwindende Last ist, sondern wenn umgekehrt die Kraft von der Kurbel ausgeht und der Widerstand in der Schubstange liegt, man in den vorigen Entwickelungen nur ganz einfach die Kräfte P und Q miteinander zu vertauschen braucht, um auch für diesen Fall die für einen bestimmten gleichförmigen Gang der Kurbel nöthige Masse M zu finden. In diesem Falle wechseln natürlich die beiden durch die Winkel α' und α'' bestimmten Punkte m und m' in der Weise, dass jetzt in m die grösste und in m' die kleinste Kurbelgeschwindigkeit stattfindet.

Bahnbestimmung des Planeten Galatea (74).

Von **Robert Felgel.**

Am 29. August 1862 wurde von Tempel in Marseille ein neuer Planet, der 74. in der Reihe der Asteroiden, entdeckt, welcher über Aufforderung des Entdeckers von Herrn Director v. Littrow den Namen „Galatea" erhielt. Ich übernahm die Bestimmung seiner Bahn und theile im Nachfolgenden die Resultate sowie die Hauptmomente meiner hierauf bezüglichen Rechnungen mit.

Da dem Entdecker keine Mittel zu Gebote standen, sogleich genaue Ortsbestimmungen des Planeten vorzunehmen, wurden die ersten zu einer Bahnbestimmung verwendbaren Beobachtungen erst Mitte September 1862 gewonnen und hierauf, sobald dieses möglich war, von Dr. Frischauf in Wien Elemente abgeleitet, welche zunächst den Zweck hatten, eine weitere Beobachtung des neuen Planeten zu erleichtern. Als die daraus sich ergebenden Orte von den Beobachtungen etwas stärker abzuweichen begannen, berechnete Dr. Tietjen in Berlin ein neues Elementen-System und mittelst desselben eine Ephemeride, welche es der Berliner Sternwarte möglich machte, Galatea bis Mitte Februar 1863 zu verfolgen. Um für die Durchführung der weiteren Rechnungen eine möglichst gute Grundlage zu bekommen, leitete ich abermals ein System von Elementen ab aus Beobachtungen, die durch grössere Zwischenzeiten getrennt waren als jene, welche von den beiden früher genannten Berechnern benützt werden konnten.

Die drei Beobachtungen, welche ich zu diesem Zwecke auswählte, sind, von Aberrationszeit und Parallaxe befreit, folgende:

Datum	Mittl. Berl. Zeit	*AR.* app.	Decl. app.
1862 Sept. 16.	11ʰ 4ᵐ33ˢ	358°13'21"6	+ 2°12'58"7
„ Oct. 28.	10 28 47	353 32 24·7	— 1 59 28·4
„ Dec. 16.	6 5 52	1 51 1·6	— 0 10 18·4.

Von diesen ist die erste das Mittel aus zwei Bilker Ortsbestimmungen, die zweite das Mittel aus einer Berliner und einer Wiener Beobachtung desselben Datums und die dritte eine einzelne Beobachtung der Berliner Sternwarte. Die Bestimmung der Bahn wurde vorgenommen nach der Methode von Gauss und die damit erhaltenen Elemente sind:

1862 Dec. 16·25407

(I)

M 12°56'37·78
π 7 15 8·80 } Mittl. Aquin. 1862·0
☊ 197 55 16·07 }
i 3 58 56·32
φ 13 46 51·28
μ 766"3494
log α 0·4437199.

Mit diesen Elementen wurde nun eine Ephemeride gerechnet, die ich nachfolgend gleich in jenem Umfange mittheile, welcher für die Vergleichung derselben mit den sämmtlichen Beobachtungen aus der ersten Opposition nothwendig ist.

1862 mittl. Berl. Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Logarithmus der Entfernung von der Erde	Aberrationszeit
Sept. 15·0	23h 53m 52s73	+2°23'16"1	0·0507	9m 19s4
16·0	53 12·25	2 16 15·0		18·7
17·0	52 31·41	2 9 8·5		18·1
18·0	51 50·29	2 1 57·3		17·6
19·0	51 8·98	1 54 41·9	0·0489	9 17·2
20·0	50 27·55	1 47 23·0		16·9
21·0	49 46·06	1 40 1·3		16·8
22·0	49 4·62	1 32 37·3		16·8
23·0	48 23·29	1 25 11·7	0·0487	9 16·9
24·0	47 42·16	1 17 45·2		17·1
25·0	47 1·32	1 10 18·4		17·5
26·0	46 20·83	1 2 52·0		18·0
27·0	45 40·79	0 55 26·7	0·0501	9 18·6
28·0	45 1·27	0 48 3·1		19·3
29·0	44 22·34	0 40 41·8		20·1
30·0	43 44·08	0 33 23·4		21·0
Octob. 1·0	43 6·57	0 26 8·6	0·0527	9 22·1
2·0	42 29·87	0 18 58·0		23·3
3·0	41 54·04	0 11 52·0		24·6
4·0	23 41 19·16	+0 4 51·3		26·0

1862 mittl. Berl. Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Logarithmus der Entfernung von der Erde	Aberrationszeit
Octob. 5·0	23h 40m 45s·29	—0° 2' 3"6	0·0569	9m 27s·5
6·0	40 12·48	0 8 52·2		29·1
7·0	39 40·79	0 15 34·0		30·9
8·0	39 10·27	0 22 8·5		32·8
9·0	38 40·97	0 28 35·1	0·0624	9 34·8
10·0	38 12·94	0 34 53·6		36·9
11·0	37 46·22	0 41 3·4		39·1
12·0	37 20·85	0 47 4·2		41·4
13·0	36 56·89	0 52 55·6	0·0692	9 43·8
14·0	36 34·37	0 58 37·2		46·3
15·0	36 13·32	1 4 8·7		49·0
16·0	35 53·80	1 9 29·7		51·8
17·0	35 35·84	1 14 39·7	0·0771	9 54·6
18·0	35 19·47	1 19 38·4		57·5
19·0	35 4·72	1 24 25·6		10 0·5
20·0	34 51·62	1 29 1·1		3·6
21·0	34 40·20	1 33 24·5	0·0861	10 6·8
22·0	34 30·47	1 37 35·7		10·1
23·0	34 22·46	1 41 34·4		13·4
24·0	34 16·18	1 45 20·5		16·9
25·0	34 11·66	1 48 53·8	0·0957	10 20·5
26·0	34 8·90	1 52 14·1		24·2
27·0	34 7·92	1 55 21·4		27·9
28·0	34 8·71	1 58 15·7		31·7
Octob. 29·0	23 34 11·29	—2 0 56·6	0·1061	10 35·6
Nov. 18·0	23 41 5·43	—2 8 46·5	0·1652	12 8·3
19·0	41 43·25	2 6 58·0		13·5
20·0	42 22·60	2 4 57·6		18·5
21·0	43 3·45	2 2 45·3		24·1
22·0	43 45·77	2 0 21·4	0·1777	12 29·5
23·0	44 29·54	1 57 46·0		35·0
24·0	45 14·75	1 54 59·2		40·5
25·0	46 1·37	1 52 1·2		46·0
26·0	46 49·37	1 48 52·3	0·1902	12 51·5
27·0	47 38·73	1 45 32·6		57·1
28·0	48 29·44	1 42 2·2		13 2·7
29·0	23 49 21·47	—1 38 21·3		8·3

1862 mittl. Berl. Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Logarithmus der Entfernung von der Erde	Aberrationszeit
Nov. 30·0	23h 50m 14s·81	—1° 34' 30"·1	0·2028	13m 14s·0
Dec. 1·0	51 9·44	1 30 28·7		19·7
2·0	52 5·30	1 26 17·5		25·5
3·0	53 2·38	1 21 56·6		31·3
4·0	54 0·65	1 17 26·1	0·2152	13 37·1
5·0	55 0·09	1 12 46·3		43·0
6·0	56 0·69	1 7 57·2		48·9
7·0	57 2·43	1 2 59·1		54·8
8·0	58 5·29	0 57 52·1	0·2275	14 0·7
9·0	23 59 9·25	0 52 36·4		6·6
10·0	0 0 14·28	0 47 12·0		12·6
11·0	1 20·36	0 41 39·2		18·6
12·0	2 27·47	0 35 58·1	0·2397	14 24·6
13·0	3 35·59	0 30 8·9		30·6
14·0	4 44·71	0 24 11·7		36·7
15·0	5 54·81	0 18 6·6		42·8
16·0	7 5·87	0 11 53·9	0·2518	14 48·9
17·0	8 17·89	—0 5 33·6		55·0
18·0	9 30·86	+0 0 54·0		15 1·2
19·0	10 44·75	0 7 28·9		7·4
20·0	11 59·55	0 14 10·8	0·2636	15 13·5
21·0	13 15·23	0 20 59·6		19·7
22·0	14 31·79	0 27 55·2		25·9
23·0	15 49·20	0 34 57·3		32·1
Dec. 24·0	0 17 7·44	+0 42 5·9	0·2753	15 38·3
1863				
Febr. 13·0	1 37 4·01	+8 12 0·9	0·4019	20 55·8
14·0	38 49·65	8 21 32·7		21 1·8
15·0	40 35·61	8 31 4·1		7·8
16·0	42 21·90	8 40 35·0		13 7
17·0	44 8·52	8 50 5·4	0·4100	21 19·6
18·0	45 55·44	8 59 35·2		25·4
19·0	1 47 42·70	+9 9 4·4		31·2

Die Beobachtungen, die während der ersten Opposition gemacht wurden, sowie die Vergleichung der Ephemeride mit denselben, sind in dem nachstehenden Tableau zusammengestellt.

Beobachtungsort	Datum 1862	Mittlere von Aberration befreite Berliner Zeit	Geocentrische		Beob.—Rechn.	
			Rectascension	Declination	Δα	Δδ
Bilk.......	Sept. 16.	9h48m12s	23h52m56s02	+2°13'22"6	+0s41	+ 1"2
"	" 16.	12 20 55	52 51·70	+2 12 39·2	+0·42	+ 3·1
"	" 18.	12 2 10	51 29·66	+1 58 21·7	+0·07	+ 2·3
Berlin.....	" 20.	12 39 25	50 5·43	+1 43 32·2	—0·22	+ 1·9
Wien......	" 21.	10 3 24	49 28·83	+1 36 58·4	+0·14	+ 2·9
Berlin.....	" 22.	9 11 7	48 48·57	+1 29 48·5	—0·22	+ 1·6
Bilk.......	" 22.	9 40 56	48 47·90	+1 29 37·8	—0·03	+ 0·1
Wien......	" 22.	10 2 51	48 47·34	+1 29 35·0	+0·04	+ 4·1
Berlin.....	" 23	9 37 57	48 6·99	+1 22 13·0	+0·24	+ 6·2
Wien......	" 23	9 53 41	48 6·33	+1 22 13·0	+0·03	+ 5·4
"	" 23.	11 16 48	48 3·78	+1 21 36·4	—0·15	+ 0·3
Leipzig....	" 23.	12 43 53	48 1·12	+1 21 19·1	—0·31	+ 3·9
"	" 23.	12 51 14	48 1·44	+1 21 16·6	+0·22	+ 3·6
"	" 24.	10 5 10	47 25·04	+1 14 38·4	+0·09	+ 1·0
"	" 24.	10 28 55	47 24·17	+1 14 32·2	- 0·12	+ 2·5
Bilk.......	" 24.	10 34 50	47 23·87	+1 14 33·3	—0·24	+ 5·0
Wien......	" 25.	8 38 37	46 46·56	+1 7 41·9	—0·11	+ 4·4
Leipzig....	" 25.	10 20 59	46 44·06	+1 7 7·2	+0·26	+ 1·3
"	" 25.	11 2 51	46 42·47	+1 6 51·3	—0·16	— 1·5
Wien......	" 25.	11 7 34	46 42·49	+1 6 48·2	—0·01	+ 2·6
Berlin.....	" 27.	9 0 57	45 25·65	+0 52 27·4	—0·22	+12·5
Wien......	" 27.	9 36 40	45 24·72	+0 52 28·0	—0·17	— 0·8
"	" 28.	9 39 59	44 45·85	+0 45 8·8	+0·33	+ 3·8
Leipzig....	" 29.	10 57 21	44 4·97	+0 37 29·9	+0·18	+ 7·6
Wien......	" 30.	10 44 36	43 27·15	+0 30 7·7	—0·05	+ 5·2
Berlin.....	" 30.	10 45 58	43 26·98	+0 30 24·0	—0·18	+12·0
Leipzig....	" 30.	11 38 10	43 25·61	+0 29 52·6	+0·20	+ 0·3
Washington	Oct. 2.	13 51 10	23 42 8·88	.....	—0·03	...
"	" 2.	13 51 49	.....	+0 14 54·8	...	+ 0·9
"	" 3.	13 51 29	41 33·69	+0 7 53·7	+0·04	+ 2·8
Berlin.....	" 6.	12 43 5	39 56·13	—0 12 23·3	+0·59	+ 2·7
"	" 10.	9 18 0	38 2·38	0 37 14·9	—0·05	+ 2·9
Wien......	" 11.	8 1 30	37 37·89	—0 43 0·8	+0·32	+ 4·1
Berlin.....	" 11.	10 1 18	37 35·65	—0 43 33·9	+0·19	+ 1·5
"	" 13.	9 30 2	36 47·93	—0 55 5·8	+0·14	+ 4·2
Wien......	" 15.	8 36 2	36 6·39	- 1 6 1·3	+0·26	+ 3·7
Berlin.....	" 15.	9 1 1	36 5·95	—1 6 9·4	+0·16	+ 1·2
Wien......	" 26.	8 37 9	34 8·18	—1 53 20·8	—0·16	+ 2·0
Berlin.....	" 26.	10 0 22	34 8·13	—1 53 32·4	—0·15	+ 1·3

Beobachtungs-ort	Datum 1862	Mittlere von Aberration befreite Berliner Zeit	Geocentrische		Beob.—Rechn.	
			Rectascension	Declination	Δα	Δδ
Wien......	Oct. 27.	9h 57m 31s	23h 34m 7s91	−1° 58′ 33″5	−0s13	+ 1″8
„	„ 28.	7 57 21	34 9·39	−1 59 12·1	+0·03	− 1·5
Berlin.....	„ 28.	13 0 10	34 9·96	−1 59 45·6	+0·08	− 1·0
Berlin.....	Nov. 18	11 52 38	41 23·70	−2 7 54·3	−0·03	+ 0·1
„	„ 21.	7 39 14	43 16·83	−2 1 59·5	+0·03	+ 1·2
„	Dec. 1.	6 54 52	51 25·31	−1 29 16·6	−0·09	+ 0·8
„	„ 2.	6 58 51	52 21·61	−1 25 4·8	−0·16	− 2·1
„	„ 3.	6 40 7	53 18·59	−1 20 45·0	+0·15	− 2·6
„	„ 4.	6 48 9	23 54 17·55	−1 16 9·4	+0·18	− 1·6
„	„ 16.	6 5 51	0 7 24·10	−0 10 18·3	+0·02	− 0·3
„	„ 22.	7 22 59	0 14 55·47	+0 30 1·4	−0·04	− 2·8
	1863					
Berlin.....	Febr. 13.	8 31 0	1 37 42·56	+8 15 27·3	+1·10	+ 3·5
„	„ 14.	7 31 42	39 23·97	+8 24 34·0	+1·11	+ 2·1
„	„ 17.	7 17 39	1 44 41·86	+8 53 1·9	+0·88	+ 3·3

Diese Beobachtungen wurden nun auf die aus der vorhergehenden Zusammenstellung ersichtliche Weise in vier Normalorte zusammengefasst; zu diesem Zwecke hat man im Sinne Beob. — Rechn.:

für die Zeit	Mittel aus		Anzahl der Beobachtungen
	Δα	Δδ	
Vom 16. Sept. bis 30. Sept.	+ 0·01	+ 3·4	27
„ 2. Oct. „ 28. Oct.	+ 0·09	+ 1·9	14
„ 18. Nov. „ 22. Dec.	+ 0·01	− 0·9	8
„ 13. Febr. „ 17. Febr.	+ 1·03	+ 3·0	3

Bringt man diese Werthe von $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ an die entsprechenden Orte der Ephemeride an, so ergeben sich die folgenden Normalorte, wobei noch zu bemerken ist, dass wegen des hinlänglich kleinen Ganges der Ephemeride statt des genauen Mittels aus den Zeiten immer der Anfang des zunächst liegenden Tages angenommen wurde.

Normalort	Datum	Scheinbare geocentrische		Gewicht
		Rectascension	Declination	
I	1862 Sept. 25·0	23h 47m 1s33	+1°10'21"8	27
II	„ Oct. 17·0	23 35 35·93	—1 14 37·8	14
III	„ Dec. 4·0	23 54 0·66	—1 17 27·0	8
IV	1863 Febr. 15·0	1 40 36·64	+8 31 7·1	3

Bevor es mir noch möglich war die Elemente mit Berücksichtigung sämmtlicher Beobachtungen aus der ersten Opposition zu verbessern, trat die Nothwendigkeit ein, eine Ephemeride zu berechnen, mit deren Hilfe Galatea in der zweiten Opposition (Februar 1864) aufgefunden und beobachtet werden sollte. Um die rechtzeitige Publication derselben im Berliner astron. Jahrbuche zu ermöglichen, bildete ich aus einigen der damals mir schon bekannt gewordenen Beobachtungen Normalorte und glich mittelst derselben die Bahn nach der Methode der curtirten Distanzen aus. Es schien um so weniger geboten die Verbesserung gleich in der strengsten Form vorzunehmen, da zu erwarten stand, dass späterhin eine noch grössere Anzahl von Beobachtungen aus der ersten Opposition bekannt werden würde, die für diese Rechnung ohnehin nicht hätten benützt werden können; eine Voraussetzung, welche auch nachträglich durch die That ihre Bestätigung erhielt. Die Elemente, welche ich auf diese Art fand, sind:

1863 Febr. 15·0

(II)

M 25°49'57"8

π 7 20 19·0 } Mittl. Aquin. 1864·0

☊ 198 0 30·0 }

i 3 58 18·5

φ 13 47 32·7

μ 766"1030

la 0·4438129

Mit diesem System berechnete ich eine Jahres- und Oppositions-Ephemeride, welche im Supplement zum Berliner Jahrbuch für 1866 erschienen sind. Auf Grundlage derselben wurde Galatea während der zweiten Opposition, die Anfangs Februar 1864 eintrat, von mehreren Sternwarten beobachtet mit einer Abweichung

der Ephemeride von beiläufig 6 Zeit-Sekunden in Rectascension und 1 Bogenminute in Declination. In der folgenden Tabelle befinden sich die Beobachtungen aus der zweiten Opposition, welche zur Bildung des fünften Normalortes verwendet werden konnten, zusammengestellt; die Vergleichung der citirten Ephemeride des Berliner Jahrbuches mit denselben ist wieder in den letzten beiden Columnen ersichtlich gemacht.

Beobachtungsort	Datum 1864	Mittlere von Aberration befreite Berliner Zeit	Geocentrische		Beob.—Rechn.	
			Rectascension	Declination	Δα	Δδ
Leipzig .	Jän. 30.	12ʰ 4ᵐ 3ˢ	8ʰ56ᵐ56ˢ29	+11°41' 1"1	+5ˢ64	—1' 3"1
Bilk....	Febr. 1.	12 21 11	8 55 8·08	+11 49 44·5	+5·96	—0 57·7
Paris...	„ 5.	12 17 7	8 51 33·65	+12 7 1·1	+5·53	—1 8·2
Leipzig .	„ 9.	10 42 40	8 48 8·30	+12 24 24·7	+5·78	—1 4·3

Es muss jedoch erwähnt werden, dass drei werthvolle Beobachtungen der Leidner Sternwarte vorderhand unberücksichtigt geblieben sind, da deren Publication zu einer Zeit erfolgte, wo der grösste Theil meiner Rechnungen bereits durchgeführt war und es bedeutenden Zeitaufwand gekostet hätte, dieselben nachträglich mit einzubeziehen. An der geringen Ausbeute von Beobachtungsmaterial trägt auch der Umstand Schuld, dass von den Sternwarten Berlin und Wien Ortsbestimmungen von Galatea fehlen. In Berlin war nämlich der Refractor wegen Reparaturen an der Kuppel dienstunfähig und in Wien wurden die wenigen heiteren Abende im Februar 1864 zum Aufsuchen der Concordia benützt; sonst ergab sich theils wegen Mondschein, theils wegen schlechter Witterung kein tauglicher Beobachtungsabend mehr.

Zur Bildung des fünften Normalortes ist demnach:

für die Zeit	Mittel aus		Anzahl der Beobachtungen
	Δα	Δδ	
Vom 30. Jänner. bis 9. Febr. 1864	+ 5ˢ73	— 1' 3"3	4

Bringt man diese Differenzen an den Ephemeridenort, der dem Mittel der Zeiten entspricht, an, so ergibt sich für den letzten

Normalort, dem überdies wegen seiner Wichtigkeit ein doppeltes Gewicht beigelegt wurde:

Normalort	Datum	Scheinbare geocentrische		Gewicht
		Rectascension	Declination	
V	1864. Febr. 4·0	8h 52m 54s 37	+12°0'28"1	8

Um endlich alles auf ein gemeinschaftliches Elementensystem zu beziehen, wurden jetzt noch die Positionen gerechnet, welche das letzte oben angeführte System (II) für die 4 ersten Orte ergibt und die Vergleichung dieser Elemente mit den fünf Normalorten lautet demnach:

für Normalort	Datum	Ephemeridenort		Beob.—Rechn.	
		Rectascension	Declination	Δα	Δδ
I	1862 Sept. 25·0	23h 47m 1s 31	+ 1°10'22"8	+0s02	— 1"0
II	„ Oct. 17·0	23 35 35·75	— 1 14 25·8	+0·18	—12·0
III	„ Dec. 4·0	23 54 0·60	— 1 17 1·4	+0·06	—25·6
IV	1863 Febr. 15·0	1 40 36·36	+ 8 31 37·5	+0·01	—30·4
V	1864 Febr. 4·0	8 52 48·64	+12 1 31·4	+5·73	—63·3

Die Summe der Fehlerquadrate beträgt also, nachdem auch die $\Delta\alpha$ in Bogenmass ausgedrückt worden sind, 13135.

Die Verbesserung der Bahnelemente wurde nun vorgenommen mittelst Differentialquotienten der geocentrischen Orte nach den Elementen und Ausgleichung durch die Methode der kleinsten Quadrate. Für den ersten Theil der weiteren Rechnung benützte ich die Abhandlung von Th. Oppolzer „Entwicklung von Differentialformeln zur Verbesserung einer Planeten- oder Kometenbahn nach geocentrischen Orten“ (Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Cl. der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. XLIX), und verwandelte in Übereinstimmung mit dem dort befolgten Gange die Ekliptikal-Elemente (II) in solche, die sich auf den Äquator als Grundebene beziehen; diese sind unter Beibehaltung der in der erwähnten Abhandlung angewendeten Bezeichnungen folgende:

1863 Febr. 15·0

M	25°49'57"8
π'	7 3 27·98 } Mittl. Äquin. 1862·0
Ω'	356 21 57·92 }
i'	19 42 55·92
φ	13 47 32·7
μ	766"1030.

Hierauf wurden die Differentialquotienten von Rectascension und Declination nach diesen Elementen gerechnet, hierbei die Epoche 1862 September 25·0 als Nullpunkt der Zeit angenommen und durch Summirung der erhaltenen partiellen Differentiale die totalen Änderungen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, wie sie oben durch Vergleichung der Elemente (II) mit den Normalorten bestimmt wurden, dargestellt. Die zehn Gleichungen, welche sich auf diese Art ergaben, wurden nach Massgabe der Gewichte, die den betreffenden Normalorten zukommen, multiplicirt mit dem Maasse der Präcision und somit sind die Ausdrücke, welchen durch die Verbesserungen der Elemente möglichst gut genügt werden soll:

1·18801 dM_0	+ $_n$9·87570.100 $d\mu$	+ $_n$0·52868 $d\varphi$	+ 0·96619 $d\omega'$
0·74386	+ 8·70460	+ $_n$9·99477	+ 0·52144
	+ 0·99240 $d\Omega'$	+ $_n$9·23802 di'	+ $_n$0·19271 = 0
	+ 7·93283	+ 9·68367	+ 0·71568 = 0
1·00723 dM_0	+ $_n$9·56894.100 $d\mu$	+ $_n$0·25964 $d\varphi$	+ 0·78334 $d\omega'$
0·55917	+ $_n$9·31639	+ $_n$9·84595	+ 0·33527
	+ 0 81001 $d\Omega'$	+ $_n$9·62272 di'	+ $_n$1·00432 = 0
	+ $_n$8·49765	+ 0·06888	+ 1·65224 = 0
0·72283 dM_0	+ 0·00632.100$d\mu$	+ 9·48702 $d\varphi$	+ 0·49470 $d\omega'$
0·25726	+ 8·96986	+ $_n$8·85369	+ 0·02582
	+ 0·51992 $d\Omega'$	+ $_n$9·76254 di'	+ $_n$0·40568 = 0
	+ $_n$8·52487	+ 0·20831	+ 1·85979 = 0
0·33017 dM_0	+ 0·31733.100$d\mu$	+ 0·17790 $d\varphi$	+ 0·12666 $d\omega'$
9·81229	+ 9·75514	+ 9·62268	+ 9·60385
	+ 0·13101 $d\Omega'$	+ $_n$9·55018 di'	+ $_n$9·40982 = 0
	+ 8·90887	+ 0·05937	+ 1·72143 = 0
0·51722 dM_0	+ 1·20911.100$d\mu$	+ 0·80221 $d\varphi$	+ 0·60710 $d\omega'$
$_n$9·91055	+ $_n$0·62648	+ $_n$0·18959	+ $_n$0·01263
	+ 0·60857 $d\Omega'$	+ 9·85018 di'	+ $_n$2·37767 = 0
	+ 8·28894	+ 0·44550	+ 2·25295 = 0

worin statt der Coëfficienten die Logarithmen derselben angegeben sind.

Behandelt man dieselben nach der Methode der kleinsten Quadrate, so ergeben sich die sechs Bestimmungsgleichungen für die wahrscheinlichsten Werthe der gesuchten Verbesserungen folgendermassen, worin die Zahlen abermals Logarithmen bedeuten:

$$\begin{aligned}
&2{\cdot}63608\,dM_0 + 1{\cdot}70940.100\,d\mu + {}_{n}1{\cdot}71163\,d\varphi + 2{\cdot}42540\,d\omega' \\
&\qquad + 2{\cdot}39933\,d\Omega' + {}_{n}9{\cdot}00217\,di' + {}_{n}2{\cdot}85421 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&d1{\cdot}70940M_0 + 2{\cdot}45676.100\,d\mu + 2{\cdot}06510\,d\varphi + 1{\cdot}82380\,d\omega' \\
&\qquad + 1{\cdot}79294\,d\Omega' + {}_{n}9{\cdot}90037\,di' + {}_{n}3{\cdot}66178 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{}_{n}1{\cdot}71163\,dM_0 + 2{\cdot}06510.100\,d\mu + 1{\cdot}78775\,d\varphi + {}_{n}1{\cdot}22450\,d\omega' \\
&\qquad + {}_{n}1{\cdot}20713\,d\Omega' + {}_{n}9{\cdot}08991\,di' + {}_{n}3{\cdot}25220 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2{\cdot}42540\,dM_0 + 1{\cdot}82380.100\,d\mu + {}_{n}1{\cdot}22450\,d\varphi + 2{\cdot}22647\,d\omega' \\
&\qquad + 2{\cdot}20038\,d\Omega' + {}_{n}9{\cdot}08600\,di' + {}_{n}3{\cdot}00923 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2{\cdot}39933\,dM_0 + 1{\cdot}79294.100\,d\mu + {}_{n}1{\cdot}20713\,d\varphi + 2{\cdot}20038\,d\omega' \\
&\qquad + 2{\cdot}22409\,d\Omega' + {}_{n}0{\cdot}58756\,di' + {}_{n}3{\cdot}02290 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{}_{n}9{\cdot}00217\,dM_0 + {}_{n}9{\cdot}90037\;100\,d\mu + {}_{n}9{\cdot}08991\,d\varphi + {}_{n}9{\cdot}08600\,d\omega' \\
&\qquad + {}_{n}0{\cdot}58756\,d\Omega' + 1{\cdot}16075\,di' + 2{\cdot}75508 = 0
\end{aligned}$$

Durch Auflösung derselben erhält man:

$$\begin{aligned}
dM_0 &= -\;14''39 \\
d\pi' &= +\;11{\cdot}01 \\
d\Omega' &= -\;2{\cdot}37 \\
di' &= -\;38{\cdot}45 \\
d\varphi &= -\;43{\cdot}62 \\
d\mu &= +\;0{\cdot}3360
\end{aligned}$$

und damit ergibt sich nachstehendes Äquatorial Elementensystem

	1863 Febr. 15·0	
M	25°50'31"46	
π'	7 3 38·99	mittl. Aquin. 1862·0
Ω'	356 21 55·55	mittl. Aquin. 1862·0
i'	19 42 17·47	
φ	13 46 49·08	
μ	766"4390	
$\log a$	0·4436860	

Zur Prüfung der Rechnung habe ich die Vergleichung der neuen Elemente mit den Normalorten direct vorgenommen und auch

die übrig bleibenden Fehler durch Substitution der erhaltenen Verbesserungen in die zehn Differentialausdrücke bestimmt. Die Darstellung der Normalorte wird zufolge

Directer Rechnung $\Delta\alpha$	Directer Rechnung $\Delta\delta$	Beob.—Rechn.	Substitution $\Delta\alpha$	Substitution $\Delta\delta$
— 0ˢ09	+ 0″8		— 0ˢ08	+ 0″9
+ 0·13	— 0·1		+ 0·13	— 0·1
+ 0·04	— 1·6		+ 0·04	— 1·7
— 0·05	— 3·0		— 0·05	— 3·0
+ 0·03	+ 1·7		+ 0·03	+ 1·6

Die Summe der übrigbleibenden Fehlerquadrate geht demnach von 13135 auf 21 herab.

Werden die verbesserten Äquatorial-Elemente wieder für die Ekliptik umgerechnet, so lautet endlich das wahrscheinlichste Ecliptical Elementensystem für Galatea:

Epoche und mittleres Aquin.
1865 Jan. 0·0 mittl. Berl. Zeit.

$$
\text{(III)} \quad
\begin{aligned}
M &\quad 171^\circ 40' 42''18 \\
\pi &\quad 7\;21\;19{\cdot}95 \\
\Omega &\quad 197\;58\;9{\cdot}04 \\
i &\quad 3\;58\;54{\cdot}62 \\
\varphi &\quad 13\;46\;49{\cdot}08 \\
\mu &\quad 766''4390 \\
\log a &\quad 0{\cdot}4436860
\end{aligned}
$$

Mittelst dieser Elemente ist die am Schlusse angegebene Jahres- und Oppositions-Ephemeride berechnet; nach derselben steht die nächste Opposition von Galatea am 4. April 1865 bevor. Die Constanten für die Ephemeriden bezogen auf das mittlere Äquinoctium 1865·0 sind:

$$
\begin{aligned}
x &= \overline{0{\cdot}4433865}\sin(E+97^\circ 6' 23''67) - 0{\cdot}6561121 \\
y &= \overline{0{\cdot}4050935}\sin(E+\;\;7\;4\;40{\cdot}74) - 0{\cdot}0745961 \\
z &= \overline{9{\cdot}9593226}\sin(E+11\;3\;20{\cdot}01) - 0{\cdot}0415933
\end{aligned}
$$

wobei die überstrichenen Zahlen Logarithmen bedeuten.

Endlich sei noch bemerkt, dass die zuletzt angeführte mittlere Oppositionshelligkeit und Grösse abgeleitet ist aus folgenden Grössenschätzungen:

Beobachter	Datum	Lichtstärke	Geschätzte Grösse	Reduction auf mittlere Oppositions-Helligkeit	Mittlere Oppositions-Helligkeit
Tempel......	1862 Aug. 30.	3·86	10·7	+ 1·5	12·2
Bruhns......	„ Sept. 23.	4·33	10·5	+ 1·6	12·1
Weiss.......	„ Oct. 27.	3·42	11·0	+ 1·3	12·3
	Im Mittel aus der I. Opposition.				12·2
R. Luther....	1864 Febr. 1.	0·62	11·5	— 0·5	11·0
	Im Mittel aus beiden Oppositionen				11·6

Jahres-Ephemeride für 1865.

0h mittlere Berl. Zeit	Geocentrische Rectascension	Geocentrische Declination	Log. Entfernung (74) von ♁	Log. Entfernung (74) von ☉	(74) im Meridian	Halber Tagbogen
Jan. 7.	13h 10m 59s	— 8° 40'8	0·5230	0·5361	17h 59m·9	5h 18m
„ 17.	13 15 48	9 6·5	0·5030	0·5363	17 25·4	5 15
„ 20.	13 18 58	9 22·0	0·4824	0·5364	16 49·2	5 14
Febr. 6.	13 20 19	9 26·1	0·4617	0·5365	16 11·3	5 14
„ 16.	13 19 44	9 17·9	0·4416	0·5365	15 31·4	5 14
„ 26.	13 17 10	8 57·0	0·4231	0·5364	14 49·5	5 16
März 8.	13 12 42	8 23·8	0·4073	0·5362	14 5·7	5 19
„ 18.	13 6 38	7 39·7	0·3951	0·5359	13 20·4	5 23
„ 28.	12 59 27	6 47·3	0·3876	0·5356	12 33·9	5 28
April 7.	12 51 45	5 50·7	0·3854	0·5352	11 46·9	5 33
„ 17.	12 44 15	— 4 54·7	0·3886	0·5347	11 0·1	5 38
„ 27.	12 37 36	4 3·8	0·3967	0·5342	10 14·1	5 42
Mai 7.	12 32 20	3 21·7	0·4090	0·5336	9 29·6	5 46
„ 17.	12 28 47	2 51·2	0·4246	0·5329	8 46·7	5 49
„ 27.	12 27 5	2 33·3	0·4424	0·5321	8 5·7	5 50
Juni 6.	12 27 17	2 28·3	0·4611	0·5312	7 26·6	5 51
„ 16.	12 29 16	2 35·3	0·4804	0·5303	6 49·2	5 50
„ 26.	12 32 54	2 53·5	0·4994	0·5293	6 13·5	5 48
Juli 6.	12 38 0	3 21·6	0·5177	0·5282	5 39·3	5 46
„ 16.	12 44 25	3 58·2	0·5350	0·5270	5 6·4	5 43
„ 26.	12 52 0	— 4 42·1	0·5512	0·5258	4 34·6	5 39
Aug. 5.	13 0 35	5 32·0	0·5658	0·5245	4 3·9	5 35

0ʰ mittlere Berl. Zeit	Geocentrische		Log. Entfernung		im Meridian	Halber Tag-bogen
	Rectascension	Declination	(74) von ♁	(74) von ☉		
Aug. 15.	13ʰ 10ᵐ 4ˢ	— 6° 26'8	0·5790	0·5231	3ʰ 34ᵐ0	5ʰ 30ᵐ
„ 25.	13 20 21	7 25·5	0·5906	0·5216	3 5·0	5 24
Sept. 4.	13 31 19	8 27·0	0·6005	0·5200	2 36·6	5 19
„ 14.	13 42 55	9 30·4	0·6088	0·5184	2 8·8	5 13
„ 24.	13 55 4	10 34·7	0·6155	0·5167	1 41·6	5 7
Oct. 4.	14 7 43	11 39·2	0·6205	0·5149	1 14·9	5 1
„ 14.	14 20 50	12 43·0	0.6237	0·5130	0 48·7	4 55
„ 24.	14 34 20	13 45·2	0·6253	0·5110	0 22·8	4 49
Nov. 3.	14 48 11	—14 45·1	0·6251	0·5090	23 53·2	4 44
„ 13.	15 2 20	15 42·0	0·6231	0·5069	23 28·2	4 38
„ 23.	15 16 41	16 35·1	0·6194	0·5047	23 3·2	4 33
Dec. 3.	15 31 12	17 23·8	0·6139	0·5024	22 38·3	4 28
„ 13.	15 45 48	18 7·6	0·6066	0·5000	22 13·6	4 23
„ 23.	16 0 24	18 46·0	0·5975	0·4976	21 48·8	4 19
„ 33.	16 14 54	—19 18·5	0·5865	0·4951	21 24·0	4 15

Oppositions-Ephemeride für 1865.

12ʰ mittl. Berl. Zeit	Geocentrische		Log. Entfernung (74) von ♁	Aberrations-Zeit
	Rectascension	Declination		
März 17.	13ʰ 7ᵐ 0ˢ14	—7°42'14"1	0·39564	20ᵐ 26ˢ5
„ 18.	13 6 19·84	7 37 21·1	0·39464	20 23·6
„ 19.	13 5 38·87	7 32 23·3	0·39369	20 21·0
„ 20.	13 4 57·25	7 27 20·7	0·39279	20 18·5
„ 21.	13 4 15·02	—7 22 13·7	0·39194	20 16·1
„ 22.	13 3 32·22	7 17 2·5	0·39114	20 13·8
„ 23.	13 2 48·89	7 11 47·3	0·39038	20 11·7
„ 24.	13 2 5·06	7 6 28·2	0·38967	20 9·7
„ 25.	13 1 20·78	—7 1 5·7	0·38902	20 7·9
„ 26.	13 0 36·09	6 55 40·0	0·38843	20 6·2
„ 27.	12 59 51·03	6 50 11·3	0·38789	20 4·7
„ 28.	12 59 5·64	6 44 39·9	0·38740	20 3·3
„ 29.	12 58 19·98	—6 39 6·0	0·38696	20 2·1
„ 30	12 57 34·08	6 33 29·9	0·38657	20 1·0
„ 31.	12 56 47·98	6 27 52·0	0·38624	20 0·1
April 1	12 56 1·73	6 22 12·7	0·38596	19 59·4

12h mittl. Berl. Zeit	Geocentrische Rectascension	Geocentrische Declination	Log. Entfernung (74) von ♁	Aberrations-Zeit
April 2.	12h 55m 15s·37	−6° 16′ 32″·1	0·38574	19m 58s·8
„ 3.	12 54 28·95	6 10 50·5	0·38557	19 58·3
„ 4.	12 53 42·51	6 5 8·2	0·38545	19 58·0
„ 5.	12 52 56·09	5 59 25·6	0·38539	19 57·9
„ 6.	12 52 9·74	−5 53 42·9	0·38539	19 57·9
„ 7.	12 51 23·50	5 48 0·3	0·38544	19 58·0
„ 8.	12 50 37·41	5 42 18·2	0·38554	19 58·3
„ 9.	12 49 51·51	5 36 36·8	0·38569	19 58·8
„ 10.	12 49 5·83	−5 30 56·5	0·38590	19 59·4
„ 11.	12 48 20·41	5 25 17·5	0·38616	20 0·1
„ 12.	12 47 35·29	5 19 40·0	0·38647	20 1·0
„ 13.	12 46 50·49	5 14 4·3	0·38684	20 2·0
„ 14.	12 46 6·07	−5 8 30·8	0·38726	20 3·1
„ 15.	12 45 22·07	5 2 59·7	0·38773	20 4·4
„ 16.	12 44 38·53	4 57 31·4	0·38825	20 5·8
„ 17.	12 43 55·50	4 52 6·1	0·38883	20 7·4
„ 18.	12 43 13·02	−4 46 44·0	0·38946	20 9·1

(74) ☍ ☉ in *AR*. April 3. 23h 51m 50s Lichtstärke = 0·352 Grösse 12·7.

VIII. SITZUNG VOM 16. MÄRZ 1865.

Der Secretär liest das folgende Schreiben des Consuls der Vereinigten Staaten von Nordamerika, Herrn Theodor Canisius, an den Präsidenten der kais. Akademie:

Consulat der Vereinigten Staaten N.-Amerikas in Wien.

Euer Hochwohlgeboren!

Unser Minister des Äussern, Herr W. H. Seward, hat mich in einer Depesche, datirt Washington ddo. 16. Februar, beauftragt, Ihnen, als Präsident der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, für den ausgezeichneten Report von A. Ritter von Burg, über das Werk von Capt. Humphreys und Lieut. Abbot, den Dank des Staats-Departements auszusprechen.

Diese Gelegenheit wahrnehmend, Sie meiner ausgezeichnetsten Hochachtung zu versichern, habe ich die Ehre mich zu zeichnen

Euer Hochwohlgeboren

unterthänigster Diener

Theodore Canisius,

Consul der Vereinigten Staaten N.-Amerikas.

Der Secretär legt ferner folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Neue Ansichten oder auch Theorie über den Rückstoss der Geschütze, begründet auf die einfachsten physikalischen Erscheinungen bei den Schusswaffen", nebst einem Anhange über ein neues Pfeilgeschütze, von dem pens. k. k. Rittmeister, Herrn Ferd. Leitenberger zu Reichstadt in Böhmen;

„Neue Synthesen der Ameisensäure" von Herrn Dr. R. Maly, Privatdocenten an der Grazer Universität.

Herr Jos. Harkup, k. k. Telegraphen-Beamter, übermittelt die versiegelte Beschreibung eines von ihm erfundenen neuartigen Relais mit dem Ersuchen um Aufbewahrung zur Sicherung seiner Priorität.

Herr Prof. J. Redtenbacher überreicht eine Abhandlung „über die Trennung von Rubidium und Caesium in Form der Alaune";

ferner die in seinem Laboratorium durch Herrn A. Effenberger ausgeführte „chemische Analyse der Heilquelle zu Müllaken in Ober-Österreich.“

Herr Prof. C. v. Ettingshausen legt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung: „Die fossile Flora des mährisch-schlesischen Dachschiefers“ vor.

Herr Prof. E. Suess übergibt eine Abhandlung „über die Nachweisung zahlreicher Niederlassungen einer vorchristlichen Völkerschaft in Nieder-Österreich“, nebst einer zweiten „über die Cephalopoden-Sippe *Aconthoteuthis* R. Wagn.“

Herr S. Marcus legt die Beschreibung und Zeichnung der von ihm erfundenen Thermosäule vor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale de Belgique: Mémoires. Tome XXXIV. Bruxelles, 1864; 4o. — Mémoires couronnés. Tome XXXI. 1862—1863; 4o; Collection in 8o: Tomes XV & XVI. 1863 & 1864, — Bulletins: 32e Année. Tomes XV & XVI. 1863: 33e Année, Tome XVII. 1864; 8o. — Compte-rendu des séances de la Commission Royale d'histoire: 3e Série. Tome Ve, 1r à 3e Bulletins; Tome VIe 1r à 2me Bulletins. Bruxelles, 1863 & 1864; 8o. — Annuaire 1864. 8o.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Abhandlungen. 1863. Berlin, 1864; 4o. — Preisfrage der phys.-mathem. Classe für 1866 & 1867. 8o.

American Journal of Science and Arts. Vol. XXXIX. No. 115. New Haven, 1865; 8o.

Annalen der Chemie und Pharmacie von Wöhler, Liebig und Kopp. N. R. Band LVI, Heft 3. December 1864; — III. Supplementband, 1. & 2. Heft. 1864. — Band LVII. Heft 1 & 2. Jänner & Februar 1865. Leipzig & Heidelberg; 8o.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1517. Altona, 1865; 4o.

Bauzeitung, Allgemeine. XXX. Jahrgang. Heft 1. Nebst Atlas. Wien, 1865; 4o. & Folio.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. T. Tome XXI, No. 84. 1864; Tome XXII, No. 85. 1865. Génève, Lausanne, Neuchatel; 8o.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 1er Volume, 10e Livraison. Paris, 1865; 8o.

Gesellschaft der Wissenschaften, Königl., zu Göttingen: Gelehrte Anzeigen. 1864. I. & II. Band. Göttingen, 1865; 8o. — Nachrichten von der K. Ges. d. Wiss. und der Georg-Augusts-Universität aus dem Jahre 1864. Göttingen, 1865; 8o.

— Deutsche geologische: Zeitschrift, XVI. Band, 3. Heft. Berlin, 1864; 8o.

— physikalische, zu Berlin: Die Fortschritte der Physik im Jahre 1862. XVIII. Jahrgang, 1. & 2. Abtheilung. Berlin, 1865; 8o.

— naturforschende, in Basel: Verhandlungen. IV. Theil, 1. Heft. Basel, 1864; 8o.

Gewerbe-Verein, n. ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrgang, Nr. 11. Wien, 1865; 8o.

Halle, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1864. 4o & 8o.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer von F. Vorwerk. Band XXIII. Heft 1. Speyer, 1865; 8o.

Königsberg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1864. 4o & 8o.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 8. Wien, 1865; 4o.

Observatoire Royal de Bruxelles: Annales. Tome XVI. Bruxelles, 1864; 4o. — Observations des phénomènes périodiques en 1861. 4o.

Reader. Nr. 115. Vol. V. London, 1865; Folio.

Society, The Royal, of Edinburgh: Transactions. Vol. XXIII. Part 3. For the Session 1863—64. 4o. — Proceedings. Vol. V. Nr. 62—64. Session 1863—64. 8o.

Wiener medicin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 20—21. Wien, 1865; 4o.

Neue Synthesen der Ameisensäure.

Von Med. Dr. **Richard L. Maly,**
Privatdocenten an der Universität zu Graz.

Ich habe Versuche gemacht, durch directe Vereinigung von Kohlensäure und Wasserstoff, Ameisensäure zu erzeugen:

$$C\Theta_2 + H_2 = CH_2\Theta_2$$

Zunächst in der Idee, dass es hinreichen könnte, wenn beide genannten Gase in statu nascenti aufeinander wirken, entwickelte ich aus einem Kolben mittelst reinem Zink und Marmor Kohlensäure und Wasserstoff, bekam aber weder hier, noch nachdem das Zink mit Natriumamalgam vertauscht war, eine Spur Ameisensäure.

Nun sann ich nach einem Verfahren, beide Gase aus einer alkalischen Flüssigkeit zu entbinden, oder vielmehr, da Kohlensäure aus einer kalischen Flüssigkeit nicht auftreten wird, letztere neben nascirendem Wasserstoff im Momente der Übertragung zu haben.

1. Auf eine wässerige Lösung von kohlensaurem Ammon wirkt Natriumamalgam (neben der Wasserzersetzung) bekanntlich unter Bildung von Ammoniumamalgam, das sich aber bald zersetzt unter Freiwerden von Wasserstoff, während zugleich die Kohlensäure in statu der Übertragung vom Ammon auf das gebildete Natron sich befindet.

In eine concentrirte Lösung von kohlensaurem Ammon wurde allmälig verdünntes (flüssiges) Natriumamalgam eingetragen; nachdem alles Ammoniumamalgam sich zurückgebildet hatte, wurde die vom Quecksilber abgegossene Flüssigkeit mit verdünnter Schwefelsäure übersättigt, destillirt, das saure Destillat mit kohlensaurem Natron neutralisirt und abgedampft, worauf die resultirende Salzmasse, in wenig Wasser gelöst, salpetersaures Silberoxyd und

Sublimat beim Kochen reducirte, mit concentrirter Schwefelsäure Kohlenoxydgas entwickelte etc. Das Destillat einer neuen Darstellung wurde mit kohlensaurem Blei heiss neutralisirt; das Filtrat zeigte beim Abdampfen eine schöne Krystallisation von feinen seidenglänzenden Nadeln, die in allen Eigenschaften mit dem ameisensauren Blei übereinstimmten.

0, 4465 Grm. dieses Bleisalzes gaben 0, 454 Grm. schwefelsaures Blei = 0. 31015 Grm. Blei.

In 100 Theilen:

gefunden	für ameisensaures Blei berechnet:
69·50 Pct.	69·70 Pct.

Die Bildung der Ameisensäure lässt sich demnach (der Einfachheit halber das kohlensaure Ammon als neutrales Salz geschrieben) durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$(NH_4)_2\Theta, \mathrm{C}\Theta_2 + Na_2 = 2NH_3 + Na_2\Theta + H_2 + \mathrm{C}\Theta_2 = 2NH_3 + NaH\Theta + \mathrm{C}HNa\Theta_2$$

Diese Reaction ist vielleicht einer Verallgemeinerung fähig zur Bildung der Homologen der Ameisensäure; es wäre nämlich zu versuchen, ob, wenn man Natriumamalgam statt auf kohlensaures Ammon, auf kohlensaures Methyl-Äthylamin etc. einwirken lässt, dann nicht Essigsäure, Propionsäure etc. entstehen.

2. Trägt man in heisse Kalilauge ein Gemenge von Zinkpulver (granulirt) und kohlensaurem Zink, so addirt sich der nascirende Wasserstoff zu dem in Bildung begriffenen kohlensauren Kali, und man bekommt ebenfalls Ameisensäure:

$$\mathrm{C}\Theta_2 + H_2 + KH\Theta = \mathrm{C}HK\Theta_2 + H_2\Theta$$

Das Destillat der mit Schwefelsäure übersättigten alkalischen Flüssigkeit gab alle Reactionen der Ameisensäure, und mit kohlensaurem Blei neutralisirt, die charakteristischen Nadeln. Die Menge der Ameisensäure, die hier entsteht, ist aber sehr gering, wohl weil das Zinkpulver rasch untersinkt, das kohlensaure Zink länger suspendirt bleibt, also im Zersetzungsmomente häufig kein Contact stattfindet.

Wäre es möglich, ein Metall (das mit Kalilauge Wasserstoff entwickelt) und ein kohlensaures Salz zusammenzuschmelzen, so

würde dieses, gepulvert in heisse Kalilauge eingetragen, so reichlich Ameisensäure geben, wie der sub 1 beschriebene Fall.

Man sieht hieraus genau die Bedingungen zur Synthese der Ameisensäure: 1. Wasserstoff in statu nascenti, 2. Kohlensäure im Momente der Übertragung, 3. Gegenwart einer kräftigen Basis.

In diesem Sinne interpretirt sich auch der erste Versuch dieser Art von Kolbe und Schmitt [1]), welche Kalium unter einer mit lauwarmem Wasser abgesperrten und mit Kohlensäure gefüllten Glasglocke ausgebreitet liessen.

---

[1]) Annalen der Chemie. Bd. 119. pag. 251.

Über die Trennung von Rubidium und Cäsium in Form der Alaune.

Von dem w. M. **Joseph Redtenbacher.**

Die bisherige Trennungsmethode von Kalium, Rubidium und Cäsium beruht auf der verschiedenen Löslichkeit der Platindoppelsalze. Diese von Bunsen, dem Entdecker dieser Metalle zuerst gefundene Methode bietet die Schwierigkeit der Schwerlöslichkeit der genannten Platinsalze, so dass, wenn man grössere Mengen von Material bearbeitet, man grosse Mengen von Flüssigkeit zu gewältigen hat, und dass, wenn man selbst fractionirt arbeitet, die Anwendung von Platin den Vorgang kostspielig macht und die fabriksmässige Darstellung von vorne herein hindert.

Die Trennung als weinsaures Salz setzt gleichsam wieder die vorhergehende Anwendung der Platinsalze voraus.

Ich hatte den Gedanken, ob nicht die Alaunsalze in ihrer Löslichkeit so verschieden sind, dass man dadurch Kalium, Rubidium und Cäsium von einander trennen kann, da doch ihre Äquivalente so verschieden sind und der Versuch hat diesen Gedanken bestätigt.

In der chemischen Fabrik des Herrn Dr. Würth[1]) stellt Dr. Schorm Lithionpräparate aus dem mährischen Lepidolit von Roszna im grossen Massstabe dar. Bei Bearbeitung der Rückstände in meinem Laboratorium, aus welchen das Chlorlithium ausgezogen war, um daraus mit Platinsalz das Cäsium und Rubidium zu gewinnen, fiel die Ausbeute den bisherigen Erfahrungen entgegen, so geringe aus, dass auf einen Verlust dieser beiden Metallverbindungen in den Operationen der Fabrik geschlossen werden musste, da auf einen ungeheueren Überschuss von Kalium ganz unbeträchtliche Mengen von Rubidium und fast nur Spuren von Cäsium sich vorfanden.

---

[1]) Von Herrn Dr. Würth und Dr. Schorm habe ich das Material zu diesen Versuchen erhalten und danke bei dieser Gelegenheit auf's freundlichste dafür.

Der Lepidolit wird in der genannten Fabrik mit Schwefelsäure aufgeschlossen, die geglühte Masse mit Wasser ausgezogen, die wässerige Lösung zur Krystallisation eingedampft, um die meiste Thonerde als Alaun zu entfernen. Wenn nun die Schwerlöslichkeit der Alaune im Verhältnisse der Zunahme des Äquivalentes ebenfalls zunimmt, so mussten in den ersten Alaunkrystallisationen obiger Fabrik sich vorzüglich Rubidium und Cäsium finden.

Die ersten Proben, welche ich aus der Fabrik erhielt, gaben schon ohne vorheriges Umkrystallisiren das deutliche Spectrum von Rubidium und Cäsium.

Es wurden hierauf 37 Pfunde in Arbeit genommen und daraus durch eine Reihe von Krystallisationen aus Wasser $^1/_4$ Pfund reiner Cäsiumalaun, $^1/_2$ Pfund reiner Rubidiumalaun und 2 Pfunde eines reinen Gemenges von vollkommen kalifreiem Rubidium- und Cäsiumalaun erhalten, das erst später aufgearbeitet werden soll.

In der Mutterlauge findet sich als das leichtest lösliche Salz auch der Thalliumalaun mit starkem Eisenoxydgehalte.

Als rein wurden Rubidium- und Cäsiumalaun genommen, wenn mit einem Spectroskop von Steinheil in München, welches ein 1 Zoll grosses Objectiv hat, im dunklen Zimmer keine Spur einer fremden Spectrallinie mehr beobachtet werden konnte.

Bei dieser Veranlassung wurden einige Eigenschaften des Rubidium- und Cäsiumalaunes näher untersucht.

Schon Bunsen beobachtete die Krystallgestalt derselben als tesseral.

Herr Dr. Tschermak, dem ich ausgesuchte Krystalle beider Alaune zur krystallographischen Untersuchung übergab, theilt mir folgendes mit:

Die Krystalle des Rubidiumalaunes sind reguläre Oktaëder, deren Kanten und Ecken durch die Flächen des Rhombendodekaëders und Hexaëders schwach abgestumpft erscheinen, nur selten sieht man die Flächen des Pentagonaldodekaëders $\frac{\infty O 2}{2}$. Die Grösse der Oktaëderkante wurde zu 109° 27′ bestimmt, die Rechnung fordert 109° 28′.

Der Cäsiumalaun zeigt ebenfalls tesserale Krystalle, die oft sehr flächenreich sind, dabei aber ebenfalls immer die Flächen des Oktaëders aufweisen. Eine häufige Combination ist die des Oktaëders mit

dem Pentagonaldodekaëder $\frac{\infty O_2}{2}$, in welcher sich die beiden Formen oft das Gleichgewicht halten, so dass sich die bekannte mit 20 Dreiecken begrenzte Gestalt ergiebt. Sonst sieht man das Oktaëder mit den Flächen des Hexaëders, Pentagonaldodekaëders, mit dem Ikositetraëder 202 und mit den übrigen genannten Formen. Die Messung der Kante, welche das Hexaëder mit dem Pentagonaldodekaëder bildet, gab 153° 24′ gegen die berechnete Grösse von 153° 26′. Die Kante zwischen Hexaëder und Ikositetraëder konnte wegen Unvollkommenheit der Fläche der letzteren Form nur annähernd zu 144° bestimmt werden, die Rechnung verlangt 144° 44′. Eigenthümlich ist für den Cäsiumalaun das beständige Auftreten der Flächen des Pentagonaldodekaëder, die bei dem Kalialaun nur ausnahmsweise vorkommen, wenn derselbe aus einer salzsauren Lösung krystallisirt wird.

Das specifische Gewicht habe ich von dem Cäsiumalaun = 2·003, von dem Rubidiumalaun = 1·874 gefunden, während der Kalialaun nach Kopp spec. Gew. = 1·724 hat. So wie das Äquivalent des Rubidiums das mittlere von Kalium und Cäsium ist, so ist dasselbe Verhältniss in der Dichte der Alaune.

		spec. Gew. Rubidiumalaun	
		berechnet	gefunden
Kalialaun . .	1·724		
Cäsiumalaun .	2·003		
	$\frac{3·727}{2}$ =	1·863	1·874

Alle beiden Alaune sind in kochend heissem Wasser sehr leicht löslich, dafür aber in kaltem Wasser viel schwerer löslich als Kalialaun.

Eine bei 16° C. gesättigte Lösung von Rubidiumalaun gab folgende Zahlen:

I. 60·780 Grm. Rubidiumalaunlösung gaben: 1·207 Grm. BaO, SO_3.
II. 61·9765 „ . „ 1·2325 „ „ „

In 100 Theilen:

	Schwefelsäure
I.	0·681
II.	0·682
	0·6815

entspricht Rubidiumalaun 2·218.

100 Theile Wasser lösen also bei 16° C. = 2·27 Rubidiumalaun. 1 Theil Rubidiumalaun löst sich bei 16° C. in 44 Theilen Wasser und die Lösung hatte ein spec. Gew. = 1·0125.

Eine bei 17° C. gesättigte Cäsiumalaunlösung gab folgende Zahlen

Lösung gab		schwefels. Baryt	Schwefelsäure in 100 Theilen	Cäsiumalaun.
I.	40·0785	0·219	0·170	0·605
II.	41·457	0·211	0·1785	0·634
III.	40·248	0·200	0·1704	0·605
IV.	32·675	0·165	0·173	0·615

100 Theile Lösung bei 17° C. gaben Cäsiumalaun im Mittel = 0·615
100 Theile Wasser bei 17° C. lösen Cäsiumalaun . . . . = 0·6188

oder 1 Theil Cäsiumalaun löst sich bei 17° C. in 160 Theilen Wasser.

Die gesättigte Lösung bei 17° C. hatte ein spec. Gew. = 1·0036.

Kalialaun hat nach Poggiale folgende Zahlen gegeben:

100 Theile Wasser bei 17° C. lösen Kalialaun = 13·5 Theile. 1 Theil Kalialaun bei 17° C. löst sich in 7·4 Theilen Wasser. Die Löslichkeit dieser drei Alaune verhalten sich also zu einander, wie:

K		Rb		Cs
13·5	:	2·27	:	0·6188,

während die Platinsalze bei 17° C. nach Bunsen wie:

K		Rb		Cs
1·05	:	0·15	:	0·07

sich verhalten, oder in ganzen Zahlen ausgedrückt, verhaltet sich die Löslichkeit

	K	Rb	Cs
bei 17° C. der Alaune . . . . =	22	4	1
bei 17° C. und die Platinsalze derselben Basen . =	15	2	1
bei 100° C. =	14	1·7	1

Die Alaune bieten also den Vortheil, dass sie im heissen Wasser sehr leicht löslich, dass sie im kalten Wasser ziemlich schwer löslich und dass die Löslichkeitsdifferenzen der Alaune grösser, als die der Platinsalze sind. Man hat also geringere Mengen von Flüssigkeiten zu bearbeiten und bringt eine leichtere Trennung hervor.

Wenn bei Darstellung der jetzt so häufig gebrauchten Lithiumsalze der vorher nach Schrötter geschmolzene Lepidolit, statt mit Salzsäure mit Schwefelsäure aufgeschlossen wird, können die Fabriken den Chemikern schon reine Rubidium- und Cäsiumsalze liefern, vorausgesetzt, dass sie das Spectroskop dabei anwenden.

Man findet in den chemischen Laboratorien nicht selten ganz bedeutende Mengen von Chlorrubidium, welches noch mehrere

Procente Kalium oder Cäsium oder beides zugleich enthält, ebenso Chlorcäsium mit erkennbaren Mengen von Chlorrubidium.

Man kann diese Präparate bequem umarbeiten und reinigen, indem man sie in Alaune verwandelt und durch Umkrystallisiren reiniget. Man nimmt dazu am besten den im Handel vorkommenden Ammoniakalaun. Man rechnet für die anzuwendende Menge Salz, die äquivalente Menge Ammoniakalaun, löst letzteren in so viel Wasser als er bei 17° C. zur Lösung braucht, setzt dann das Rubidium- oder Cäsiumsalz zu, kocht auf bis zur Lösung der Letzteren und lässt durch Erkalten krystallisiren. Die Krystallisation wird gestört um kleine Krystalle zu erhalten. Diese werden abfiltrirt, mit kaltem Wasser gewaschen und noch einmal umkrystallisirt. Auf diese Weise gelingt es oft mit dieser zweiten Krystallisation schon ein reines Salz zu erhalten.

Es erklärt sich diess aus der Löslichkeit der Salze.

Bei 17° C. lösen 100 Theile Wasser:

	Theile	
Cäsiumalaun	0·619	
Rubidiumalaun . . .	2·27	
Kalialaun	13·5	darin SO_3, KO = 2·85
Ammoniakalaun . .	12·7	darin SO_3, NH_4O = 1·74
SO_3, KO	11·3	
ClK	33·3	
SO_3. NH_4 O	50·0	
Cl NH_4	37·7	

Chemische Analyse der Heilquelle zu Müllaken in Ober-Österreich.

Ausgeführt von **Anton Effenberger**

im chemischen Laboratorium des Herrn Prof. Dr. Redtenbacher.

Von der südöstlichen Masse des Böhmerwaldes aus streichen von Nord nach Süd Höhenzüge, aus Granit und Gneiss bestehend, durch den Mühlkreis noch über die Donau hinüber, deren Lauf durch das Streichen dieser krystallinischen Massen bestimmt ist.

Etwa drei Stunden oberhalb Linz am linken Donauufer treten diese Höhenzüge bogenförmig von der Donau zurück und umfassen von drei Seiten die kleine Thalebene von Müllaken. Der Badeort Müllaken selbst liegt am Eingange einer Schlucht, durch welche der Bösenbach über ungeheuere Blöcke von porphyrartigem Granit und theilweise Syenit stürzt, bevor er in die erwähnte Thalebene austritt. In dieser Schlucht oberhalb der Ruine Wallsee finden sich auch grosse Plattenbruchstücke von dunkelgrünem Aphonit, in welchem Amphybol vor Feldspath vorherrscht und der neben etwas Schwefeleisen Eisenkies in fein vertheiltem Zustande in ziemlicher Quantität enthält. Der grobkörnige Granit selbst enthält hier nicht selten Eisenkies, gegen Eschelberg zu ist auch etwas Tintaneisen im Quarz eingesprengt (siehe Jahrbuch der geol. Reichsanstalt 4. Bd. 1853, Peter's „die krystallinischen Schiefer und Massengesteine in Ober-Österreich"). Kaum eine Viertelstunde Weges von der Badeanstalt, etwas tiefer in der vom Bösenbach durchströmten Schlucht entspringt die Quelle, deren Wasser durch eine Röhrenleitung dem Badhause zugeführt wird.

Das Wasser ist, frisch geschöpft, vollkommen klar, bei längerem Stehen an der Luft scheiden sich jedoch gelbbraune Flocken ab. Die Temperatur des Wassers ist 7° R.

Die qualitative Analyse zeigte folgende Bestandtheile als quantitativ bestimmbar: Kohlensäure, Schwefelsäure, Kieselsäure, Chlor,

Eisenoxydul, Thonerde, Kalk, Magnesia, Kali und Natron; ausserdem zeigten sich äusserst geringe Spuren von Mangan und Phosphorsäure.

Das specifische Gewicht wurde mittelst eines Piknometers bestimmt und wurde = 1·0002 gefunden. Zur Bestimmung der Summe der fixen Bestandtheile wurden wiederholt grössere abgemessene Quantitäten des Wassers in einer Platinschale zur Trockene gebracht; es ergaben sich im Mittel 2·08 fixe Bestandtheile in 10000 Theilen des Wassers.

Der durch Abdampfen des Wassers erhaltene Rückstand wurde geglüht und dann unter Zusatz von kohlensaurem Ammoniak im Luftbade einer Temperatur von etwa 130—140° C. längere Zeit ausgesetzt. Es zeigte sich, auf 10000 Theile berechnet, eine Gewichtsabnahme von 0·34 Grm. Es enthalten somit 10000 Theile des Wassers 1·74 mineralische und 0·34 organische Bestandtheile.

Der bei der quantitativen Bestimmung der einzelnen Bestandtheile befolgte Gang ist in Kürze folgender. Zuerst wurde in dem Abdampfrückstande von 10 Litern die Kieselsäure durch wiederholtes Befeuchten mit Salzsäure und Trocknen abgeschieden. Es ergaben sich an Kieselsäure 0·343 Grm.

Eisen und Thonerde wurden durch Schwefelammonium ausgefällt, der erhaltene Niederschlag in Salzsäure gelöst und Eisen so wie Thonerde nach der Oxydation mit Salpetersäure durch Ammoniak wieder gefällt. Das Eisenoxyd- und Thonerdehydrat wurde geglüht, gewogen, sodann das Eisen massanalytisch bestimmt und die Thonerde aus der Differenz berechnet. Eisenoxyd und Thonerde wogen zusammen 0·017 Grm. Hievon erwiesen sich als Eisenoxyd 0·011 und als Thonerde 0·006 Grm.

Aus der von Eisen und Thonerde befreiten Flüssigkeit wurde der Kalk mittelst oxalsaurem Ammoniak abgeschieden und als kohlensaurer Kalk bestimmt. Das Gewicht des kohlensauren Kalkes war 0·738 Grm.

Das Filtrat wurde zur Trockene gebracht, die Ammoniaksalze verflüchtigt, die im Rückstand vorhandenen Salze in schwefelsaure Salze übergeführt und mit Barytwasser versetzt, um Alkalien und Magnesia von einander zu trennen, welch' letztere sodann als phosphorsaure Amon-Magnesia bestimmt wurde. Die phosphorsaure Magnesia wog 0·436 Grm.

Nach Entfernung des überschüssigen Barytes durch Einleiten von Kohlensäure wurden die Alkalien in Chlormetalle verwandelt und als solche gewogen. Chlorkalium und Chlornatrium zusammen wogen 0·253 Grm. Das Chlorkalium wurde dann mit Platinchlorid gefällt, der Niederschlag gewogen und aus der Differenz das Chlornatrium gefunden. Das Chlorkalium betrug 0·167, somit das Chlornatrium 0·086 Grm.

Das Chlor wurde in einer gemessenen Menge des Wassers als Chlorsilber bestimmt. Es ergaben sich aus mehreren Bestimmungen im Mittel auf 10000 Theile berechnet 0·2075 Grm. Chlorsilber.

Die Schwefelsäure wurde in gemessenen Wassermengen nach Verwandlung der kohlensauren Salze in Chlormetalle durch Chlorbarium ausgefällt. Der im Mittel aus 10000 Theilen gewonnene schwefelsaure Baryt wog 0·376 Grm. Zur Ausmittlung der Gesammtmenge der Kohlensäure wurden an der Quelle selbst frisch geschöpfte und gemessene Mengen des Wassers in mehrere luftdicht verschliessbare Flaschen gebracht, in welchen sich eine klare ammoniakalische Lösung von Chlorbarium befand. Aus den erhaltenen Niederschlägen wurde die Gesammtmenge der Kohlensäure sowohl mit Hilfe des Apparates von Will und Fresenius, als auch durch Schmelzen mit Borax bestimmt. Die Gesammtmenge der Kohlensäure betrug im Mittel 2·247 in 10000 Theilen Wasser.

Es enthalten sonach 10000 Theile des Wassers:

Schwefelsäure	0·130
Chlor	0·051
Kohlensäure	2·247
Kieselsäure	0·343
Eisenoxydul	0·005
Thonerde	0·006
Kalk	0·413
Magnesia	0·157
Kali	0·105
Natron	0·033
Organische Substanz	0·340

Wahrscheinliche Verbindungen der angeführten Säuren und Basen in 10000 Theilen des Wassers.

Schwefelsaures Kali	0·190
Chlornatrium	0·084
Schwefelsaurer Kalk	0·076

Kohlensaurer Kalk	0·682
Kohlensaure Magnesia	0·329
Kohlensaures Eisenoxydul	0·008
Thonerde	0·006
Kieselsäure	0·343
Organische Substanz	0·340
Freie Kohlensäure	1·772
Summe der fixen Bestandtheile berechnet	2·080
„ „ „ „ gefunden	2·058

In einer Wiener Mass sind enthalten:

Schwefelsaures Kali	0·02687
Chlornatrium	0·01187
Schwefelsaurer Kalk	0·01075
Kohlensaurer Kalk	0·09645
Kohlensaure Magnesia	0·04653
Kohlensaures Eisenoxydul	0·00113
Thonerde	0·00085
Kieselsäure	0·04851
Organische Substanz	0·04809
Freie Kohlensäure	0·25063
Summe der fixen Bestandtheile berechnet	0·29419
„ „ „ „ gefunden	0·29105

IX. SITZUNG VOM 23. MÄRZ 1865.

Der Secretär liest folgendes an ihn gerichtete Schreiben des w. M. Herrn Prof. A. Jäger:

„Vor einigen Tagen las ich in den öffentlichen Blättern (Neue Fr. Presse Nr. 194), dass in einer der letzten Sitzungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe „Herr Hofrath Haidinger die Mittheilung von einer merkwürdigen Entdeckung des Dr. Kerner in Innsbruck gemacht habe, wonach im vergilbten Papier alter Bücher sich dendritartige Gebilde von Schwefelkupfer gebildet hatten. Die Bücher, in denen diese Erscheinung sich zeige, seien auf der Innsbrucker Bibliothek an einem feuchten Orte aufbewahrt, stammen aus der Zeit von 1545—1677, sind in Schweinsleder gebunden und mit Messingspangen versehen, die den Ausgangspunkt der Kupferbildung bildeten.“

„Obwohl Laie auf dem Gebiete der Naturwissenschaften, konnte ich mich doch nicht entschliessen, die Entdeckung des Herrn Dr. Kerner für eine neue oder merkwürdige zu halten, noch viel weniger seine Ansicht über die Entstehung und den Ausgangspunkt der Erscheinung zu theilen.“

„Wer sich mit Schriften oder Druckwerken der älteren Zeit, und vorzüglich des 16. und 17. Jahrhunderts mehr beschäftigt hat, wird das Vorkommen von Spuren metallischer, zumal dem Kupfer angehöriger Theilchen im Papier der genannten Zeit als etwas gewöhnliches kennen. Es war dies die Zeit des grössten Kleiderluxus, was die vielen auf den Reichstagen, wie in den Landtagen der einzelnen Provinzen erlassenen Gesetze gegen den Luxus, die sogenannten „Kleiderordnungen“ bezeugen, durch welche den unteren Ständen gewisse Kleiderstoffe verboten, und ihrer Prachtliebe eine Schranke gesetzt wurde. Es war in den damaligen Zeiten etwas Gewöhnliches, dass nicht nur Bürger und Gewerbsleute, sondern auch die Bauern gold- und silberdurchwirkte Linnenstoffe trugen. In einer dieser Kleiderordnungen aus der letzten Zeit Kaiser Ferdinand's I., also vor 1564,

wurde für die böhmischen Bauern Folgendes bestimmt: „Die Bauern sollen nicht golddurchwirkte Zeuge, keine holländische Leinwand und Spitzen an ihren Hemden, wie auch keine mit Gold bordirte Brustflecke tragen."

„Diese gold- und silberdurchwirkten Stoffe hatten nun aber das Schicksal aller anderen Kleiderstoffe, sie wurden mit der Zeit abgenützt, und wanderten in die Hände der Hadernsammler und in die Papiermühlen. Niemand gab sich die Mühe, die etwa darin noch vorhandenen Silber- und Goldfäden auszulesen, um so weniger, als dieselben damals wie heutzutage in der Regel nur versilberte oder vergoldete Kupferdrähte waren."

„Daher nun aber auch die so häufig in dem Papier und zwar in der Masse des Papiers der genannten Zeit vorkommende Erscheinung von Kupferspuren."

„Ich glaube demnach nicht, dass die von dem Herrn Dr. Kerner in Innsbruck beobachtete Erscheinung eine ungewöhnliche sei, oder den Messingspangen oder Messingschliessen, die sich an den älteren Büchereinbänden vorfinden, zugeschrieben werden müsse oder könne."

„Zum Beweise des Vorstehenden übersende ich Ihnen mehrere aus Papieren, welche der Zeit von 1548—1760 angehören, herausgeschnittene Zettelchen; sie weisen alle das Vorhandensein von Kupfer und zwar in der Papiermasse nach, theilweise noch in der Form des ehemaligen Kupferdrahtes. Sie sind solchen Papieren entnommen, welche niemals eingebunden waren, oder einen farbigen Schnitt hatten, so dass der Vermuthung, es habe äusserer Einfluss auf die Kupferbildung stattgefunden, nicht Raum gegeben werden kann."

„Machen Sie, verehrtester Herr General-Secretär, jenen Gebrauch von meiner Mittheilung, der Ihnen beliebt."

Ich zeichne mit aller Hochachtung

Ihr ergebener

Wien, den 22. März 1865. Albert Jäger.

Herr Ed. Scholz, pens. erzherzoglicher Montan-Buchhalter in Krassna bei Teschen übersendet eine Mittheilung, betreffend ein angeblich neues physikalisches Gesetz über das Verhalten der Wasserdämpfe.

Herr Prof. Dr. Fr. Unger legt eine Abhandlung „über einige fossile Pflanzenreste aus Siebenbürgen und Ungarn" vor.

Herr Hofrath Prof. J. Hyrtl macht eine Mittheilung über einen freien Körper im Herzbeutel.

Herr Prof. Dr. J. Stefan übergibt eine vorläufige Mittheilung über einige Thermoelemente von grosser elektromotorischer Kraft.

Herr Dr. G. C. Laube überreicht die Fortsetzung seiner Abhandlung über „die Fauna der Schichten von St. Cassian“, die Brachiopoden und Bivalven behandelnd.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale de Belgique: Bulletin. 34e Année, 2e Série, Tome 19, Nr. 1. Bruxelles, 1865; 8o. — Annuaire. 1865; XXXIe Année. Bruxelles; 8o.

Accademia delle Science dell' Istituto di Bologna: Memorie. Serie II. Tomo III. Fasc. 4. Bologna, 1864; 4o. — Indici generali di Memorie in 12 Tomi dal 1850 al 1861. Bologna, 1864; 4o.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 6. Wien, 1865; 8o.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1518. Altona, 1865; 4o.

Ateneo Veneto: Atti. Serie II. Vol. I, Punt. 4. Venezia, 1865; 8o.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LX. No. 9—11. Paris, 1865; 4o.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 1r Vol., 11e Livraison. Paris, 1865; 8o.

Ferdinandeum für Tirol und Vorarlberg: Zeitschrift. 3. Folge. XII. Heft. Innsbruck, 1865; 8o. — 30. Bericht über die Jahre 1862, 1863. Innsbruck, 1864; 8o.

Gesellschaft der Wissenschaften, Oberlausitzische: Neues Lausitzisches Magazin. XLI. Band, 1. & 2. Hälfte. Görlitz, 1864; 8o.

— physikalisch-medicinische, zu Würzburg: Würzburger medicinische Zeitschrift. V. Band, 4.—6. Heft. 1864; 8o. — Würzburger naturw. Zeitschrift. V. Bd. 3. & 4. Heft. 1864; 8o.

Gewerbe-Verein, n. ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 12. Wien, 1865; 8o.

Grunert, Joh. Aug.: Archiv der Mathematik und Physik. XLIII. Theil, 1. Heft. Greifswalde, 1865; 8o.

Institution, The Royal, of Great Britain: Proceedings. Vol. IV. Parts III—IV. Nr. 39—40. London, 1864; 8o.

Istituto Veneto, I. R., di Scienze, Lettere ed Arti: Memorie. Vol. VIII. Parte 1. Venezia, 1859; 4°· — Atti. Tomo X°, Ser. III^a, Disp. 2^a—3^a Venezia, 1864—65; 8°·

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer von F. Vorwerk. Bd. XXIII, Heft 2. Speyer, 1865: 8°·

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 9. Wien, 1865; 4°·

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Jahrg. 1865, II. Heft. Gotha; 4°·

— des k. k. Génie-Comité. Jahrg. 1865. 3. Heft. Wien, 1865; 8°·

Moniteur scientifique. — 198e Livraison, Tome VIIe. Année 1865; Paris; 4°·

Museum of Geology of India: Memoirs of the Geological Survey of India. Vol. III, Part 2; Vol. IV, Part. 2. Calcutta, 1864; Kl.-4°·

— Annual Report. Eighth Year, 1863—64. Calcutta, 1864; 8°.

Reader. Nr. 116, Vol. V. London, 1865; Folio.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'orient. VIIIe Année, Nr. 10. Constantinople, 1865; 4°·

— géologique de France: Bulletin. 2e Série. Tome XXIe, Feuilles 14—28. Paris, 1863 à 1864; 8°·

Society, The Royal Dublin: Journal. Vol. IV. Nr. 31. Dublin, 1864; 8°

— The Royal Astronomical: Memoirs. Vol. XXXII. London, 1864; 4°·

Verein, Offenbacher, für Naturkunde. V. Bericht. Offenbach a. M., 1864; 8°·

— der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg. 18. Jahr. Neubrandenburg, 1864; 8°·

Wiener medizinische Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 23. Wien, 1865; 4°·

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. Nr. 10. Gratz, 1865; 4°·

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines. XVII. Jahrg, 1. Heft. Wien, 1865; 4°·

— für Chemie, Archiv für das gesammte Gebiet der Wissenschaft. Unter Mitwirkung von F. Beilstein und Rud. Fittig herausgegeben von H. Hübner. VIII. Jahrg. Neue Folge. Bd. I, Heft 1—4. Göttingen, 1865; 8°·

Über einige Thermoelemente von grosser elektromotorischer Kraft.

Vorläufige Mittheilung von J. **Stefan**.

Bei Gelegenheit der Untersuchung der von Marcus construirten Thermosäule prüfte ich, angeregt durch die von Bunsen gemachte Mittheilung, auch einige mir gerade zu Gebote stehende Mineralien auf ihr thermoelektrisches Verhalten bei hohen Temperaturen. Das Prüfungsverfahren war folgendes. Der zu untersuchende Körper wurde auf das Ende eines Kupferstreifens, auf den Körper ein Kupferdraht gelegt und das Ganze mit einer Zwinge zusammengedrückt. Dieser Kupferdraht und ein von dem anderen Ende des Kupferstreifens ausgehender, führen zu einem Buff'schen Tangentenmultiplicator mit sehr vielen Windungen. Der Kupferstreifen selbst wird durch die Flamme einer Weingeistlampe erwärmt. Um zwei beliebige Mineralien zu einem Thermoelemente zu verbinden, wurde ein Kupferstreifen zwischen die beiden gebracht und an ihre abgewendeten Seiten wurden zwei zum Multiplicator führende Drähte gelegt und das Ganze mit einer Holzzwinge festgedrückt. Der Fortsatz des zwischen die beiden Mineralien gelegten Kupferstreifens wurde in die Flamme einer Weingeistlampe gehalten. Er hatte nur die Aufgabe, Wärme der Berührungsstelle zuzuführen.

In der folgenden Aufzählung von Elementen ist immer der elektropositive Körper vorangestellt. Die dazu gesetzten Zahlen bedeuten, wie viele von den betreffenden Thermoelementen genommen werden müssen, damit ihre vereinigte elektromotorische Kraft gleich werde der eines Daniell'schen Elementes.

1. Blätteriger Kupferkies — Kupfer : 26.
2. Feinkörniger, compacter Kupferkies — Kupfer : 9.
3. Pyrolusit — Kupfer : 13.

Kupferkies und Pyrolusit wurden schon von Bunsen untersucht. Seine mit auserlesenen Stücken gemachten Versuche ergaben für die elektromotorischen Kräfte dieser beiden Körper Werthe, welche mit den unter 2. und 3. aufgeführten übereinstimmen. Zugleich sieht man aus dem Vergleiche von 1. und 2., welch grossen Einfluss die Structur auf die Grösse der elektromotorischen Kraft hat. Es konnten die beiden Kupferkiese zu einem sehr wirksamen Elemente vereinigt werden.

4. Feinkörniger Kupferkies — Blätteriger Kupferkies : 14.

Noch auffallender zeigt sich der Einfluss der Structur auf das thermoelektrische Verhalten beim Kobaltkies. Während sich körniger Kobaltkies schwach positiv gegen Kupfer verhält, ist krystallisirter dagegen stark negativ. Es wurde gefunden:

5. Kupfer — Krystallisirter Kobaltkies : 26.

6. Körniger Kobaltkies — Kupfer : 78.

Von grosser Wirksamkeit ist Schwefelkies, und zwar entgegengesetzt gegen Kupferkies. Ich hatte nur ein sehr grob geblättertes Exemplar. Vielleicht hätte sich, wie beim Kupferkies, eines von compacterem Gefüge noch vortheilhafter gezeigt. Es wurde gefunden:

7. Kupfer — Schwefelkies : 15·7.

8. Feiner Kupferkies — Schwefelkies : 6.

9. Blätteriger Kupferkies — Schwefelkies : 9·8.

Ein anderes stark negatives Mineral ist Buntkupfererz.

10. Kupfer — Buntkupfererz : 14.

Zu diesem habe ich noch ein sehr stark wirkendes positives Mineral gefunden, nämlich Bleiglanz. Ich untersuchte zwei Exemplare von sogenanntem Bleischweif, eines von sehr compactem Gefüge und ein anderes mehr gröbkörniges. Beide erwiesen sich nahe gleich wirksam. Es wurde gefunden:

11. Feiner Bleischweif — Kupfer : 9·8.

12. Grober Bleischweif — Kupfer : 9.

13. Bleischweif — Buntkupfererz : 5·5.

Letzteres Element ist somit das stärkste von allen bisher untersuchten. Denn auch von den von Marcus construirten Elementen gehen bei Anwendung der höchsten zulässigen Temperatur 18 auf ein Daniell'sches.

Ich habe auch eine Gruppe von Bleiglanzkrystallen untersucht und fand

14. **Bleiglanz — Kupfer : 9·8.**

Diese Bleiglanzkrystalle waren Hexaëder in Combination mit Oktaëdern. Hingegen erwies sich eine andere Gruppe hexaëdrischer Krystalle als negativ [1]).

Alle untersuchten Mineralien sind ziemlich schlechte Elektricitätsleiter. Die zusammengestellten Elemente bieten daher einen ziemlich grossen Widerstand dar. Dieser wurde bei mehreren wohl annäherungsweise bestimmt, doch hätte die Angabe desselben wenig Werth, da die Körper nicht in bestimmbare Formen gebracht waren, sondern, wie sie sich eben darboten, untersucht wurden. Die schlechte Leitungsfähigkeit und möglicher Weise auch eine Veränderung der Elemente in Folge des Gebrauches werden einer vielseitigen Anwendung derselben hinderlich sein. Um so wichtiger scheinen mir aber diese Resultate für die Physik der Erde, und deshalb will ich diese Untersuchungen fortsetzen, sobald mir ein ausgedehnteres Material zu Gebote stehen wird.

---

[1]) Später fand ich auch einige Exemplare Bleiglanz von feinkörnigem Gefüge, die sich gegen Kupfer ebenso stark negativ erwiesen, als die zuerst untersuchten positiv.

Über die Wirkung des Constanten und Inductionsstromes auf die Flimmerbewegung.

Von Dr. Theodor Kistiakowsky aus Kiew.

Aus dem physiologischen Institute der Gratzer Universität.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. März 1865.)

(Mit 1 Tafel.)

Alles, was wir bis in die Neuzeit über den Einfluss elektrischer Ströme auf die Flimmerbewegung wissen, beruht auf Versuchen, welche im Jahre 1835 von Valentin und Purkyně[1]) angestellt wurden. Als diese Experimentatoren bei ihren Untersuchungen einer Voltai'schen Säule von dreissig Elementen sich bedienten, haben sie das Aufhören der Flimmerbewegung, welches während der Stromeswirkung auf die Flimmerzellen bemerkt wurde, der Wirkung der an den Elektroden ausgeschiedenen Jonen zugeschrieben und jeden andern Einfluss des Galvanismus in Abrede gestellt. *Galvanismi effectus*, sagten sie, *non alius, quam chemicus esse videtur*. Die so ausgesprochene Meinung wurde später von den meisten Autoren wiederholt. Da sich seit den 1835 angestellten Untersuchungen von Purkyně und Valentin, namentlich durch die umfassenden Untersuchungen über elektrische Reizung von Muskeln und Nerven, die Methoden elektrischer Reizversuche so wesentlich verbesserten, andererseits durch Versuche von Brücke[2]), M. Schultze[3]), vorzüglich aber von Kühne[4]) constante und Inductionsströme, als Erregungsmittel für die grösste Mehrzahl beweglicher Elementarorganismen nachgewiesen wurden, so musste

[1]) De phenomeno generali et fundamentalis motus Vibratorii Contrini. Vratisl. 1835.

[2]) Über die sogenannte Molecularbewegung in thierischen Zellen. (Sitzung von 2. Mai 1862.) Das Verhalten der sogenannten Protoplasma-Ströme in den Brennhaaren von *Urtica Ureus* gegen die Schläge des Magnetelektromotors (Sitz. 20. Juni 1862).

[3]) Das Protoplasma der Rhizopoden und der Pflanzenzellen. Leipzig, 1863.

[4]) Untersuchungen über das Protoplasma und die Contractilität. Berlin, 1864.

sich auch ein erneuertes Studium des Einflusses elektrischer Ströme auf die Flimmerbewegung empfehlen.

Ich versuchte erstlich mit einer Art unpolarisirbarer Elektroden den constanten und später den Inductionsstrom auf mikroskopische Präparate von der Rachenschleimhaut des Frosches anzuwenden, konnte aber an einem in lebhafter Flimmerbewegung begriffenen Saum zu keinem bestimmten Urtheile darüber gelangen, ob die Bewegung sich beschleunige oder nicht. Was leicht begreiflich, da bei einer so grossen Geschwindigkeit, als die scheinbare Geschwindigkeit der Flimmerbewegung bei starken Vergrösserungen ist, sich eine Beschleunigung nur schwer abschätzen lässt. Ich bemerkte aber an Präparaten, welche ich so lange in *humor aqueus* liegen liess, bis die Bewegung der Flimmerhärchen sich auffallend verlangsamte, immer unter dem Mikroskope eine unzweifelhafte Beschleunigung sowohl auf den constanten Strom als auf den Inductionsschlag. Ich konnte mich mit diesen Resultaten, die ich später ausführlicher besprechen will, nicht befriedigen und wendete mich daher dem Studium der ganzen Rachenschleimhaut in Grossem zu, indem ich die Geschwindigkeit eines durch die Bewegung der Härchen über die Rachenschleimhaut geführten kleinen Signales beobachtete, während und vor der Durchleitung eines constanten Stromes, oder einer Reihe von Inductionsschlägen. Auf diesem Wege ergab es sich in der That unzweifelhaft, dass sowohl der constante Strom, als auch Inductionsschläge einen erregenden Einfluss auf die Flimmerbewegung haben. Die Methode ist ausführlich beschrieben folgende:

Ein viereckiges objectträgerähnliches Stück Spiegelglas wird durch vier passend zugeschnittene und mit Glaskitt aufgeklebte Glasstreifen in einen viereckigen Glastrog verwandelt (s. Fig. 1 *abcd*). Durch den Boden eines solchen Troges sind zwei von 7 bis 11 Millim. von einander abstehende kreisrunde Löcher geschliffen, deren Durchmesser zwischen 12—14 Millim., bei verschiedenen solchen Trögen variirte. In diese Löcher passten dicht schliessend Glasröhrchen *e* und *f*, über deren Enden mit Hornringen *gh* und *g'h'* befestigte Schweinblasenstücke gespannt waren und deren Inneres mit Hühnereiweiss gefüllt war. Das eine Ende, das heisst die darüber gespannte Blase, bildete den Boden des Troges an den durchgeschliffenen Stellen *ik*, das andere Ende tauchte in concentrirte Lösung von reinem Zinkvitriol, aus welcher unpolarisirbare Elek-

troden von amalgamirtem Zink *l*, *m* zur Kette führten. Die Gefässe für die Zinkvitriollösung waren mit Deckeln versehen, die für die Zinkplatten sowohl als auch für die Glasröhrchen passende Ausschnitte erhielten; vorzugsweise aber als Tisch für den darauf liegenden Glastrog dienten.

Die Abbildung wird die beschriebene Anordnung vollkommen verdeutlichen. Die Rachenschleimhaut des Frosches wurde nun der Länge nach mittelst feiner, schief zwischen den Schichten der Blase eingestochenen Hornstiften im Troge von einer Eiweisselektrode zur andern gespannt und der Trog mit *Humor aqueus* oder mit filtrirtem Glaskörper von Ochsen gefüllt, so dass die Oberfläche der Rachenschleimhaut davon eben überdeckt wurde. Mit Hilfe zweier dünner, mit einer dünnen Fettschicht zur Verhinderung der Adhäsion der Flüssigkeit, überzogenen Glascylinder, die quer über die Seiten des Troges gelegt waren, wurde eine Strecke der aufgespannten Rachenschleimhaut genau abgegrenzt. Die Länge dieser Strecke wurde in einigen späteren Versuchen gemessen. Diese Glasstäbchen kreuzten zugleich senkrecht eine der Länge nach durch die Mitte der Rachenschleimhaut gelegte Linie, deren eines Ende in die Mitte einer breiteren Furche am Nasenende der Membran, deren anderes Ende in eine schmälere gut ausgebildete Furche am Rachenende der Membran fiel. Das von den Flimmerhärchen bewegte Signal wurde hart an der einen Grenze dieser Linie auf die Membran gesetzt und bewegte sich während eines Versuches in dieser geraden Linie zur andern Grenze. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung wurde in jedem einzelnen Versuche gemessen durch die Anzahl der Schläge eines Pendels, welches neben dem Versuchstische aufgestellt war. Das bewegliche Signal selbst bestand in einem kleinen kegelartigen Siegellacktropfen (Fig. 1 *s*), der an seiner Basis abgerundet, mit seiner Spitze vermittelst eines Coconfadens an einem Haken, der auf einem Stativ (*A*) verschoben werden konnte, befestigt war. Der Coconfaden war nicht gespannt und diente nur dazu, ein Umfallen des Signals sicher hintanzuhalten.

Einige Übung lässt sehr bald die passende Länge des Coconfadens für jeden einzelnen Versuch so treffen, dass das Signal in dauernder und gleichmässiger Berührung mit der Oberfläche der Schleimhaut bleibt. Der Siegellacktropfen war an seiner dicksten Stelle 2 Millim. dick, von der in der Zeichnung dargestellten Form, und wog 6 Milligramm.

Mittelst dieses Apparates, mit dem ein Schlüssel und ein Stromwender in Verbindung war, habe ich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Versuche, bei Anwendung eines constanten Stromes von sechs Chromsäure-K ohlenelementen von der gewöhnlichen Form Bunsen'scher Elemente erhalten.

Tabelle I.

Nr. der Rachenschleimhaut	Nr. der Messung	Anzahl der Pendelschläge für die eben aufgespannte Membran	Anzahl der Pendelschläge bei geschlossener Kette	Anzahl der Pendelschläge bei offener Kette	Anmerkungen.
I	1	118	—	—	Die abgegrenzte Strecke der Membran Nr. I und IV blieb für alle Versuche an derselben Membran stets dieselbe.
»	2	—	71	—	
»	3	—	—	158	
»	4	—	66	—	
»	5	—	—	116	
»	6	—	—	179	
»	7	—	64	—	
»	8	—	—	113	
»	9	—	—	177	
»	10	—	62	—	
»	11	—	—	118	
»	12	—	—	175	
»	13	—	75	—	
»	14	—	—	130	
»	15	—	—	158	
»	16	—	—	204	
»	17	—	90	—	
»	18	—	—	140	
»	19	—	—	162	
»	20	—	—	198	
»	21	—	120	—	
II	22	160	—	—	Die abgegrenzte Strecke 17 Millim.
»	23	—	56	—	
»	24	—	—	98	
»	25	—	—	168	
»	26	—	56	—	
»	27	—	—	98	
»	28	—	—	158	
»	29	—	60	—	
»	30	—	—	115	
»	31	—	—	160	

Nr. der Rachen-schleim-haut	Nr. der Messung	Anzahl der Pendelschläge für die eben aufgespannte Membran	Anzahl der Pendelschläge bei geschlossener Kette	Anzahl der Pendelschläge bei offener Kette	Anmerkungen.
II	32	—	60	—	
„	33	—	—	110	
„	34	—	—	156	
„	35	—	70	—	
„	36	—	—	114	
„	37	—	—	148	
„	38	—	—	160	
„	39	—	57	—	
„	40	—	—	82	
„	41	—	—	128	
„	42	—	—	140	
„	43	—	—	154	
„	44	—	62	—	
„	45	—	—	92	
„	46	—	—	135	
„	47	—	—	153	
„	48	—	74	—	Die abgegrenzte Strecke 14 Millim. Die Versuche an der Membran Nr. III waren bei ungleichsinniger Stromesrichtung eingestellt.
III	49	277	—	—	
„	50	—	100	—	
„	51	—	—	153	
„	52	—	—	200	
„	53	—	—	320	
„	54	—	80	—	
IV	55	200	—	—	
„	56	—	80	—	Die abgegrenzte Strecke 14 Millim.
„	57	—	—	148	
„	58	—	—	240	
„	59	—	78	—	
„	60	—	—	104	
„	61	—	—	205	
„	62	—	—	200	
„	63	—	84	—	
„	64	—	—	116	
„	65	—	—	145	
„	66	—	—	272	
„	67	—	134	—	
„	68	—	—	160	
„	69	—	—	252	
„	70	—	—	340	
„	71	—	144	—	

Nr. der Rachenschleimhaut	Nr. der Messung	Anzahl der Pendelschläge für die eben aufgespannte Membran	Anzahl der Pendelschläge bei geschlossener Kette	Anzahl der Pendelschläge bei offener Kette	Anmerkungen.
V.	72	112	—	—	Die abgegrenzte Strecke 16 Millim.
„	73	—	40	—	
„	74	—	—	56	
„	75	—	—	60	
„	76	—	—	90	
„	77	—	—	103	
„	78	—	52	—	
„	79	—	—	72	
„	80	—	—	80	
„	81	—	—	90	
„	82	—	—	102	
„	83	—	—	109	
„	84	—	52	—	
„	85	—	—	68	
„	86	—	—	75	
„	87	—	—	100	
„	88	—	—	100	
„	89	—	52	—	
„	90	—	—	64	
„	100	—	—	78	
„	101	—	—	90	
„	102	—		97	
„	103	—	—	104	
„	104	—	58	—	
„	105	—	—	68	
„	106	—	—	94	
„	107	—	—	96	
„	108	—	—	112	
„	109	—	66	—	
VI.	110	78	—	—	
„	111	—	42	—	
„	112	—	—	60	
„	113	—	—	78	
„	114	—	52	—	
„	115	—	—	98	
„	116	—	64	—	
„	117	—	—	132	
„	118	—	77	—	
„	119	—	—	115	
„	120	—	—	123	

Nr. der Rachenschleimhaut	Nr. der Messung	Anzahl der Pendelschläge für die eben aufgespannte Membran	Anzahl der Pendelschläge bei geschlossener Kette	Anzahl der Pendelschläge bei offener Kette	Anmerkungen.
VI.	121	—	—	140	
"	122	—	88	—	
"	123	--	—	142	
"	124	—	98	—	Die abgegrenzte Strecke 15 Millim.
VII.	125	108	—	—	
"	126	—	48	—	
"	127	—	—	68	
"	128	—	—	88	
"	129	—	—	127	
"	130	—	42	—	
"	131	—	—	54	
"	132	—	—	64	
"	133	—	—	87	
"	134	—	—	104	
"	135	—	—	103	
"	136	—	40	—	
"	137	—	—	61	
"	138	—	—	83	
"	139	—	—	107	
"	140	—	—	120	
"	141	—	44	—	
"	142	—	—	96	
"	143	—	—	108	
"	144	—	—	115	
"	145	—	—	116	
"	146	—	82	—	
"	147	—	—	128	
"	148	—	104	—	

Wenn man die in der Tabelle verzeichneten Zeiten, während welchen das Signal sich in den einzelnen Versuchen über die Rachenschleimhaut bewegte mit einander vergleicht, so ersieht man:

1. Dass ganz constant eine Beschleunigung bei geschlossener Kette zu beobachten ist. Ein Blick auf Columne 4 der Tabelle verglichen mit Columne 3 und 5 ergibt dies.

2. Wenn man die in der fünften Columne verzeichneten Zeiten, welche zwischen zwei Querstrichen unmittelbar aufeinander folgen und welche für jede Membran unmittelbar aufeinander und auf den

Versuch bei geschlossener Kette folgenden Versuchen entsprechen, mit einander vergleicht, so zeigt sich eine allmählich verschwindende Nachwirkung des constanten Stromes.

3. Wachsen im Allgemeinen die Zeiten für das bewegte Signal in den späteren an ein und derselben Membran angestellten Versuchen. (Ermüdung.)

4. Zeigen die Zeiten für die offene und geschlossene Kette in den einzelnen Versuchen sehr wechselnde Verhältnisse. Es lässt sich nicht angeben, ob das auf Unvollkommenheit der Methode zurückzuführen ist, oder ob vielleicht diesem Wechsel, wie manche Versuche anzudeuten scheinen, complicirte Erregbarkeitsveränderungen zu Grunde liegen.

Man könnte der Tabelle I noch eine andere Form geben, wenn man aus der abgemessenen Strecke der Rachenschleimhaut und der für die Bewegung des Signales ermittelten Zeit die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung berechnen wollte. Ich habe aber vorgezogen, die unmittelbaren Ergebnisse meiner Versuche ausführlich mitzutheilen, und will jetzt für einige Versuche, die mit denselben Zahlen wie in Tabelle I bezeichnet sind, weil sie jenen entsprechen, die Resultate in dieser abgeänderten Form wegen der Übersichtlichkeit, die sie gewährt, zusammenstellen.

Tabelle II.

Nr. der Rachenschleimhaut	Nr. der Messung	Die mittlere Geschwindigkeit des Signales für die eben aufgespannte Membran	Die mittlere Geschwindigkeit des Signales bei geschlossener Kette	Die mittlere Geschwindigkeit des Signales bei wieder geöffneter Kette	Anmerkungen.
II.	1	0·106	—	—	Die abgegrenzte Strecke 17 Millim.
„	2	—	0·303	—	
„	3	—	—	0·173	
„	4	—	—	0·101	
„	5	—	0·303	—	
„	6	—	—	0·173	
„	7	—	—	0·107	
„	8	—	0·283	—	
„	9	—	—	0·147	
„	10	—	—	0·106	
„	11	—	0·283	—	

Nr. der Rachenschleimhaut	Nr. der Messung	Die mittlere Geschwindigkeit des Signales für die eben aufgespannte Membran	Die mittlere Geschwindigkeit des Signales bei geschlossener Kette	Die mittlere Geschwindigkeit des Signales bei wieder geöffneter Kette	Anmerkungen.
II.	12	—	—	0·154	
„	13	—	—	0·108	
„	14	—	0·242	—	
„	15	—	—	0·149	
„	16	—	—	0·114	
„	17	—	—	0·106	
„	18	—	0·298	—	
„	19	—	—	0·206	
„	20	—	—	0·132	
„	21	—	—	0·128	
„	22	—	—	0·110	
„	23	—	0·274	—	
„	24	—	—	0·184	
„	25	—	—	0·118	
„	26	—	—	0·111	
„	27	—	0·229	—	
VII.	28	0·138	—	—	Die abgegrenzte Strecke 15 Millim.
„	29	—	0·312	—	
„	30	—	—	0·220	
„	31	—	—	0·181	
„	32	—	—	0·118	
„	33	—	0·354	—	
„	34	—	—	0·277	
„	35	—	—	0·234	
„	36	—	—	0·182	
„	37	—	—	0·144	
„	38	—	—	0·132	
„	39	—	0·375	—	
„	40	—	—	0·247	
„	41	—	—	0·180	
„	42	—	—	0·140	
„	43	—	—	0·125	
„	44	—	0·340	—	
„	45	—	—	0·156	
„	46	—	—	0·138	
„	47	—	—	0·130	
„	48	—	—	0·129	
„	49	—	0·172	—	
„	50	—	—	0·117	
„	51	—	0·150	—	

Einen besonderen Einfluss verschiedener Stromesrichtungen auf die Flimmerbewegung habe ich nicht wahrgenommen. Nennt man die Richtung des Stromes, welche mit der Bewegungsrichtung des Signales zusammenfällt, die gleichsinnige, die entgegengesetzte die ungleichsinnige, und leitet man den Strom zuerst in der ersten Richtung durch die Membran, legt unmittelbar zum Ende des Versuches um und macht nun einen neuen Versuch mit der entgegengesetzten Richtung des Stromes, so erhält man kein bestimmtes Resultat, welches auf ein Überwiegen des erregenden Einflusses der einen Stromesrichtung über die andere hindeuten würde. Dagegen zeigte es sich in Versuchen, die unmittelbar auf einander folgend, mit derselben Stromesrichtung angestellt wurden, dass die anfängliche Beschleunigung allmählich abnimmt, wird dann umgelegt, so tritt manchmal eine neue Beschleunigung ein, die wieder allmählig abnimmt, ein neues Wenden des Stromes beschleunigt dann wieder u. s. f.

Ein constantes Resultat erhielt ich aber bei diesen Versuchen nicht und die Beschleunigung beim Umlegen des Stromes ist oft sehr gering, oft fehlt sie ganz. Der Grund dieser Abweichung ist mir unbekannt geblieben. Es sind die betreffenden Versuche in Tabelle III zusammengestellt.

Tabelle III.

Nr. der Rachenschleimhaut	Nr. der Messung	Anzahl der Pendelschläge für die eben aufgespannte Membran	Anzahl der Pendelschläge bei gleichsinnigem Strome	Anzahl der Pendelschläge bei ungleichsinnigem Strome	Anmerkungen.
I.	1	76	—	—	Die abgegrenzte Strecke der Membran blieb für alle Versuche an derselben Membran stets dieselbe.
„	2	—	46	—	
„	3	—	50	—	
„	4	—	52	—	
„	5	—	60	—	
„	6	—	64	—	
„	7	—	—	52	
„	8	—	—	60	
„	9	—	—	67	
„	10	—	—	74	
„	11	—	60	—	
„	12	—	76	—	
	13	—	—	58	

Nr. der Rachenschleimhaut	Nr. der Messung	Anzahl der Pendelschläge für die eben aufgespannte Membran	Anzahl der Pendelschläge bei gleichsinnigem Strome	Anzahl der Pendelschläge bei ungleichsinnigem Strome	Anmerkungen.
I.	14	—	—	70	
„	15		—	100	
„	16	—	78	—	
„	17	—	90	—	
„	18	—	90	—	
„	19	—	—	70	
„	20	—	—	85	
II.	21	52	—	90	
„	22	—	—	—	
„	23	—	33	—	
„	24	—	34	—	
„	25	—	40	—	
„	26	—	40	—	
„	27	—	50	—	
„	28	—	—	41	
„	29	—	—	72	
„	30	—	62	—	
„	31	—	80	—	
„	32	—	—	62	
„	33	—	—	122	
„	34	—	104	—	
„	35	-	114	—	
„	36	—	130	—	
„	37	—	—	120	
III.	38	157	—	—	
„	39	—	78	—	
„	40	—	82	—	
„	41	—	—	50	
„	42	—	—	100	
„	43	—	70	—	
IV.	44	49	—	—	
„	45	—	33	—	
„	46	—	34	—	
„	47	—	38	—	
„	48	—	40	—	
„	49	—	—	40	
„	50	—	—	40	
„	51	—	—	53	
„	52	—	48	—	

Nr. der Rachenschleimhaut	Nr. der Messung	Anzahl der Pendelschläge für die eben aufgespannte Membran	Anzahl der Pendelschläge bei gleichsinnigem Strome	Anzahl der Pendelschläge bei ungleichsinnigem Strome	Anmerkungen.
V.	53	—	65	—	
"	54	—	77	—	
"	55	—	104	—	
"	56	—	—	76	
"	57	—	—	94	
"	58	—	—	108	
"	59	—	62	—	
"	60	—	76	—	
"	61	—	100	76	

Was das Verhalten der Flimmerbewegung zu Inductionsschlägen anbelangt, so habe ich die Inductionsschläge eines Schlittenmagnetelektromotors nach Dubois von der gewöhnlichen Construction (ohne Helmholtz'sche Abänderung) in ähnlicher Weise und unter Anwendung von Eiweisselektroden durch die Membran geleitet und Resultate erhalten, aus welchen sich ein beschleunigender Einfluss der Inductionsschläge ergiebt, wie die folgende Tabelle zeigt.

Tabelle IV.

Nr. der Rachenschleimhaut	Nr. der Messung	Anzahl der Pendelschläge für die eben aufgespannte Membran	Anzahl der Pendelschläge bei thätigem Magnetelektromotor	Anzahl der Pendelschläge nach Unterbrechung der Inductionsschläge	Anmerkungeen.
I.	1	80	—	—	
"	2	—	40	—	Die abgegrenzte Strecke der Membran blieb für alle Versuche an derselben Membran stets dieselbe.
"	3	—	—	52	
"	4	—	—	70	
"	5	—	—	75	
"	6	—	—	80	
"	7	—	45	—	
"	8	—	—	48	
"	9	—	—	70	
"	10	—	—	70	
"	11	—	—	90	
"	12	—	47	—	
"	13	—	—	—	

Nr. der Rachen-schleim-haut	Nr. der Messung	Anzahl der Pendelschläge für die eben aufgespannte Membran	Anzahl der Pendelschläge bei thätigem Magnet-elektromotor	Anzahl der Pendelschläge nach Unterbrechung der Inductionsschläge	Anmerkungen.
I.	14	—	—	90	
„	15	—	50	—	
„	16	—	—	50	
„	17	—	—	115	
„	18	—	55	—	
„	19	—	—	60	
„	20	—	—	82	
„	21	—	—	95	
„	22	—	—	100	
„	23	—	52	—	
„	24	—	—	66	
„	25	—	—	135	
„	26	—	45	—	
„	27	—	—	90	
„	28	—	—	115	
„	29	—	—	148	
„	30	—	50	—	
„	31	—	—	85	
„	32	—	—	120	
„	33	—	—	120	
„	34	—	—	150	
„	35	—	47	—	
II.	36	83	—	—	
„	37	—	44	—	
„	38	—	—	50	
„	39	—	—	72	
„	40	—	—	82	
„	41	—	40	—	
„	42	—	—	50	
„	43	—	—	65	
„	44	—	—	67	
„	45	—	—	70	
„	46	—	—	79	
„	47	—	43	—	
„	48	—	—	62	
„	49	—	—	68	
„	50	—	—	75	
„	51	—	—	77	
„	52	—	—	77	
„	53	—	48	—	

Nr. der Rachen-schleim-haut	Nr. der Messung	Anzahl der Pendelschläge für die eben aufgespannte Membran	Anzahl der Pendelschläge bei thätigem Magnetelektromotor	Anzahl der Pendelschläge nach Unterbrechung der Inductionsschläge	Anmerkungen.
II.	54	—	—	62	Die Membran Nr. II blieb zwischen der Messung 55 und 56 (s. Col. 2), während einer Stunde ruhig bei gewöhnlicher Zimmertemperatur stehen.
„	55	—	—	83	
„	56	—	—	180	
„	57	—	37	—	
„	58	—	—	70	
„	59	—	—	82	
„	60	—	—	90	
„	61	—	—	110	
„	62	—	—	110	
„	63	—	44	—	
„	64	—	—	65	
„	65	—	—	80	
„	66	—	—	90	
„	67	—	36	—	
„	68	—	—	316	Zwischen der 67. und 68. Messung wurde sie zwischen innerem und äusseren Fenster bei einer Temperatur von nahe 0° C. durch 2 Stunden erhalten.
„	69	—	98	—	
„	70	—	—	150	
„	71	—	—	133	
„	72	—	—	125	
„	73	—	—	125	
„	74	—	—	125	
„	75	—	58	—	
„	76	—	—	78	
„	77	—	—	100	
„	78	—	—	124	
„	79	—	68	—	
„	80	—	—	96	
„	81	—	—	100	
„	82	—	—	120	
„	83	—	68	—	
III.	84	64	—	—	
„	85	—	48	—	
„	86	—	—	55	
„	87	—	—	58	
„	88	—	—	74	
„	89	—	48	—	
„	100	—	—	50	
„	101	—	—	70	
„	102	80	—	—	
IV.	103	—	40	—	

Nr. der Rachen-schleim-haut	Nr. der Messung	Anzahl der Pendelschläge für die eben aufgespannte Membran	Anzahl der Pendelschläge bei thätigem Magnet-elektromotor	Anzahl der Pendelschläge nach Unterbrechung der Inductionsschläge	Anmerkungen.
IV.	104	—	40	—	
„	105	—	—	50	
„	106	—	—	67	
„	107	—	—	70	
„	108	—	—	73	
„	109	—	—	77	
„	110	—	—	79	
„	111	—	38	—	
„	112	—	—	57	
„	113	—	—	69	
„	114	—	—	88	
„	115	—	50	—	
„	116	—	—	70	
„	117	—	—	92	
„	118	—	43	—	
„	119	—	—	68	
„	120	—	—	94	
„	121	—	43	—	
„	122	—	—	60	
„	123	—	—	70	
„	124	—	—	90	
„	125	—	44	—	
„	126	—	—	58	
„	127	—	—	85	
„	128	—	50	—	
„	129	—	—	63	
„	130	—	—	92	
„	131	—	60	—	
V.	132	100	—	—	
„	133	—	50	—	
„	134	—	—	55	
„	135	—	—	63	
„	136	—	—	98	
„	137	—	55	—	
„	138	—	—	55	
„	139	—	—	60	
„	140	—	—	75	
„	141	—	—	80	
„	142	—	—	100	
„	143	—	55	—	

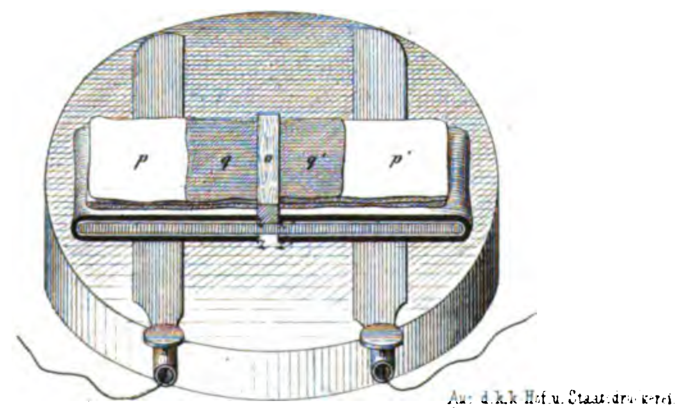
Über die Versuche (Rachenschleimhaut Nr. II von 68—83) habe ich noch besonders zu bemerken, dass sie an einer Membran angestellt wurden, welche zwischen je zwei Versuchen durch eine bestimmte Zeit (s. Bemerkung), so wie sie für den Versuch hergerichtet war bei einer Temperatur von nahe 0 Grad gehalten, für den Versuch aber in gewöhnliche Zimmertemperatur zurückgebracht wurde. Es zeigte sich, dass die Kälte immer bedeutend verlangsamend wirkte. In dem Nachwirkungsstadium zeigt sich ein anderes Verhältniss der Zeiten, was wohl nicht anders, als durch die beschleunigende Wirkung der nach und nach zum Ausgleich mit der Zimmertemperatur zugeführten Wärme erklärt werden kann.

Nachdem ich Methode und Versuche beschrieben, will ich einige Bemerkungen für diejenigen machen, welche die Versuche zu wiederholen gesonnen sind. Es kommt vor Allem darauf an, dass die Membran in dem Troge vollständig horizontal ausgespannt ist. Die Oberfläche derselben soll mit *humor aqueus* vom Ochsen eben, aber gleichmässig und vollständig bedeckt sein. Das Signal muss in bleibender Berührung mit der Oberfläche der Schleimhaut sich erhalten und darf nicht an dem Glasstäbchen, neben welchem es aufgesetzt wird, haften. Was die Frösche betrifft, so sind frisch eingefangene grosse Exemplare am meisten zu empfehlen. Schlechter gehen die Versuche an Fröschen, die längere Zeit in der Gefangenschaft gehalten wurden; namentlich, wenn dieselben, wie dies oft zu beobachten, ihre Oberhaut bereits verlieren. In solchen Fällen ist auch die Flimmerbewegung von viel geringerer Dauerhaftigkeit.

Für die Versuche unter dem Mikroskop habe ich einen Objectträger (Fig. 2) verwendet, mit welchem unpolarisirbare Elektroden nachgeahmt werden. Auf die Mitte des Objectträgers wurde ein gleichbreiter Streifen vom dicken Glas (a) mit Glaskitt geklebt. Ein dünnes Stück amalgamirten Zinkbleches (zz und $z'z$) wurde in der Fig. 2 gezeichneten Weise fest über je ein Ende des Ojecträgers geschoben. Der untere Theil des Zinkbleches wurde über die Kupferschienen eines auf den Mikroskoptisch passenden Objecttisches gelegt, über den oberen Theil lagen flache Papierbausche ($p:p'$) mit concentrirter Zinnvitriollösung getränkt, die bis hart an den aufgeklebten Glasstreifen heranreichten. Zwischen den letzten und den Bäuschen wurden in der ganzen Breite des Objectträgers in Eiweiss getränkte Blasenstückchen (gg') eingeschoben und an den Glasstrei-

Fig. 1.

Fig. 2.



Aus d. k. k. Hof u. Staatsdruckerei.



fen dicht angeschlossen, dann über die Fliesspapierbäusche herüber geschlagen. Auf den Glasstreifen wurde das Object in *humor aqueus* aufpräparirt und bedeckt mit einem Deckgläschen, welches auf den genau in einer Ebene mit der Oberfläche des Glasstreifens liegenden Blasenhäutchen aufruhte. Wenn die Versuche sorgfältig zusammengestellt werden, so lässt sich lange ohne störenden Einfluss von Seite des Zinkvitriols, wie man sich durch empfindliches Lackmuspapier überzeugen kann, der Versuch im Gange halten.

Man bekommt auf diese Weise unter dem Mikroskop eine sichtliche und nicht zu verkennende Beschleunigung an Präparaten, deren selbstständige Bewegung sich nach längerem Liegen in *humor aqueus* bedeutend verlagsamt hat, und zwar unter Anwendung des constanten Stromes sowohl, als auch von Inductionsschlägen und die Resultate sind ganz ähnlich denjenigen, welche man erhält, wenn man sich eines gewöhnlichen mit Stanniol belegten Objectträgers bedient und mittelst dieses abwechselnd gerichtete Inductionsschläge durch das Präparat leitet, oder einen constanten Strom während man den in der Mitte zwischen den Polen befindlichen Theil beobachtet. Immer lässt sich, entsprechend den Versuchen im Grossen, eine Beschleunigung bemerken, wenn eben vor der Stromesschliessung die Bewegung der Härchen durch längeres Liegen bei niederer Temperatur sich so weit verlangsamt hat, dass sich die Bewegung gut mit den Augen verfolgen lässt.

Aus allen Versuchen geht hervor, dass der constante Strom und Inductionsschläge erregend auf die Flimmerbewegung wirken, wie man dies auch von der Wärme [1]) und von einzelnen chemischen Agentien [2]) (Kali, Natron) gefunden hat.

---

1) Calliburçes. Compt. rend. t. XLV. decembre 1857 et t. XLVII. octob. 1858.

2) Virchow, Arch. für patholog. Anat. t. VI, p. 133. 1853.

Über eine neue Thermosäule.

Von Siegfried Marcus.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. März 1865.)

Am 17. November 1864 hatte ich die Ehre der hohen Classe eine neue Thermosäule vorzuzeigen; der Zweck, welchen ich bei deren Construction vor Augen hatte, war, die wichtige Entdeckung Seebek's, welche bisher nur für die Wissenschaft Bedeutung hatte, auch für das weite Feld der Praxis nutzbar zu machen. Denn obwohl es einerseits eine längst nicht mehr zu bezweifelnde Thatsache ist, dass die thermo-elektrischen Ströme alle Wirkungen der hydro-elektrischen Ströme hervorzubringen vermögen, so steht doch andererseits fest, dass alle bisher bekannt gewordenen Thermosäulen einen viel zu geringen Effect ergeben, um mit der hydrogalvanischen Säule auch nur entfernt rivalisiren zu können.

Die Versuche, welche ich mit meiner Säule der hohen Classe vorzuführen die Ehre hatte, dürften dargethan haben, inwieweit mir meine Bemühungen gelungen. Es sei mir gestattet, in kurzen Worten die Resultate jener Versuche zusammenzufassen.

Dieselben ergaben:

1. dass eine Batterie von 125 Elementen in einer Minute 25 Kubikcentimeter Knallgas entwickelt;

2. dass ein Platindraht von $^1/_2$ Millim. Dicke in den Schliessungsbogen derselben Kette geschaltet, glüht;

3. dass 30 Elemente einen Elektromagnet von 150 Pfund Tragkraft erzeugen;

4. dass der Ruhmkorff'sche Apparat gerade so wie mit hydro-galvanischen Elementen functionirt.

Aus den vom Herrn Professor Stefan ausgeführten Bestimmungen hat sich endlich ergeben, dass die elektromotorische Kraft

eines meiner Elemente bei der höchsten zulässigen Temperatur, nämlich der Schmelztemperatur des leichtflüssigen Metalles = $^1/_{18}$ der elektromotorischen Kraft eines Daniell'schen Elementes ist.

Die Herstellung der in Rede stehenden Batterie erforderte zunächst die Gewinnung zweier zu einem Thermoelement sich eignender Elektricitäts-Erreger, und dies möchte ich den physikalischen Theil der Aufgabe nennen; dann aber weiters eine solche Anordnung der einzelnen Elemente untereinander und beziehungsweise der Wärme- und Abkühlungsvorrichtungen zu jenen, dass ein möglichst günstiger Effect erzielt werde; und dieses bildete den constructiven Theil des Problems.

Bei der Lösung der ersten Aufgabe strebte ich folgende Punkte zu erreichen:

a) Die zu Thermoelementen zu benützenden Stäbe sollten in der thermo-elektrischen Reihe möglichst weit von einander liegen;

b) dieselben sollten grosse Temperatur-Differenzen zulassen, ohne eine Abkühlung der einen Berührungsstelle durch Schnee oder Eis nöthig zu machen; die Stäbe sollten also möglichst hohe Schmelzpunkte besitzen;

c) die Materialien, aus denen die Stäbe gefertigt werden, sollten nicht kostspielig sein, und endlich

d) sollte auch der zu den Elementen verwendete Isolator hohen Temperaturen widerstehen können und Festigkeit und Elasticität besitzen.

Obigen Bedingungen entsprechen bekanntlich die bisher gebräuchlichen Thermoketten aus Wismuth und Antimon nicht, da insbesondere Wismuth einen sehr niederen Schmelzpunkt hat, und in Folge dessen mit einem noch leichtflüssigeren Metalle mit dem Antimon verlöthet werden muss. Da auch die übrigen einfachen Metalle die angedeuteten Erfordernisse nicht haben, so suchte ich die merkwürdige Thatsache, „dass Legirungen in der thermoelektrischen Reihe nicht zwischen jenen Metallen stehen, aus denen sie zusammengesetzt sind", zu nützen.

Versuche, welche ich zu diesem Zwecke anstellte, ergaben, dass folgende Legirungen unter den weiter unten angegebenen

Bedingungen sich zu einem guten Thermoelemente für hohe Temperaturen eignen:

10 Gewichtstheile Kupfer }
6 „ Zink } positives Metall,
6 „ Nickel }

ein Zusatz von einem Theil Kobalt erhöht die elektromotorische Kraft.

12 Gewichtstheile Antimon }
5 „ Zink } negatives Metall,
1 „ Wismuth }

durch öfteres Umschmelzen wird die elektromotorische Kraft dieser Legirung erhöht; — oder Argentan unter dem Namen Alpacca aus der Triestinghofer Metallwaaren-Fabrik mit dem eben bezeichneten negativen Metalle in Verbindung; — oder eine Legirung aus

65 Gewichtstheile Kupfer } als + Metall, und
31 „ Zink }
12 „ Antimon } als — Metall.
5 „ Zink }

Beide Legirungen werden nicht aneinander gelöthet, sondern mit Schrauben verbunden, wie Fig. 1 darstellt.

Das positiv-elektrische Metall schmilzt bei circa 1200 Grad, das negativ-elektrische Metall bei circa 600 Grad.

Um auch Wärmequellen, welche wie die Flamme einer Weingeistlampe oder eines Gasbrenners diese Temperatur von 600 Grad überschreiten, anwenden zu können, muss daher eine solche Anordnung der Elemente getroffen werden, dass die Flamme nur an das positiv-elektrische Metall anschlage. Die Art und Weise dieser Anordnung wird später näher beschrieben.

Die in Fig. 2 in $^1/_6$ der natürlichen Grösse dargestellte Säule wurde mit Rücksicht auf die Anwendung einer Gasflamme construirt. Die einzelnen Elemente bestehen aus Stäben (*a* und *b* Fig. 1) von ungleichen Dimensionen. Der positiv-elektrische ist 7 Zoll lang, 7 Lin. breit, $^1/_2$ Lin. dick; der negativ-elektrische Stab 6 Zoll lang, 7 Lin. breit, 6 Lin. dick. Dem negativ-elektrischen Metallstabe gab ich aus dem Grunde einen grösseren Querschnitt, weil derselbe ein auffallend schlechter elektrischer Leiter ist; es wäre wohlgethan, die Stäbe noch um 1 Zoll länger zu machen, um den Einfluss der strahlenden Wärme auf die untere Contactseite zu ver-

mindern; denn obwohl die Säule eine derartige Anordnung erhalten hat, dass die abströmende erwärmte Luft nicht die zweite kaltzuerhaltende Contactseite der Elemente streife, macht sich doch nach längerer Zeit der Einfluss der strahlenden Wärme auf das Kühlwasser bemerkbar.

32 solcher Elemente verschraubte ich nach dem nebenstehenden Schema so miteinander, dass alle positiv-elektrischen Stäbe auf der einen, alle negativ-elektrischen Stäbe auf der andern Seite sich befinden und so die Form eines Gitters bilden.

Die Säule besteht nun aus zwei solchen Gitterwänden, welche dachförmig aneinander geschraubt und durch eine Eisenstange versteift sind. Als Isolator zwischen der Eisenstange und dem Elemente benützte ich Glimmer, welcher sich seiner Unverbrennlichkeit wegen, dann auch als vollkommener Nichtleiter und leicht zu verarbeitendes elastisches Material besonders hiezu qualificirt. Ausserdem bestrich ich die Elemente, namentlich dort, wo sie mit dem Kühlwasser in Berührung gelangen, mit Wasserglas, um sie untereinander zu isoliren.

Die Erwärmung der Säule geschieht mittelst eines Gasbrenners von der Form Fig. 3. Es ist dies ein in chemischen Laboratorien wohl bekannter Apparat, welcher nach Art des Bunsen'schen Brenners atmosphärische Luft mit dem Leuchtgas mengt und zur Verbrennung gelangen lässt. *a b* ist ein mit der Gasleitung communicirendes Gasrohr mit circa 50 kleinen Ausströmungsöffnungen, *r* ein Hahn, *g* ein Blechgestell, welches an den Seiten gut abgeschlossen, nach unten offen und nach oben mit einem Drahtgitter gedeckt ist.

Diese Lampe könnte dadurch wesentlich verbessert werden, dass eine Vorrichtung die Zuströmung der atmosphärischen Luft regulirte, etwa in der Weise, dass die Lampe einen durchbrochenen Boden erhielte (wie durch Punkte angedeutet ist), über welchen eine ebenfalls durchbrochene Metallplatte zu verschieben wäre; je nachdem nun die Öffnungen beider Platten mehr oder weniger mit einander correspondiren, würde der atmosphärischen Luft der Zufluss mehr oder weniger gestattet.

Bei der zu meinen Thermoversuchen benützten Lampe habe ich vor der Hand auf eine gute ökonomische Einrichtung aus dem

Grunde noch nicht die nöthige Aufmerksamkeit verwendet, weil es sich mir vorläufig darum handelte, ob überhaupt mittelst Thermosäulen grössere Effecte zu erzielen sind oder nicht, und ich die Absicht hatte, die Steinkohle als Consumtionsmaterial zu benützen. Ich werde binnen Kurzem eine Lampe ausführen und seinerzeit über deren Wirksamkeit in Bezug auf meine Säule der hohen Classe Mittheilungen machen. Indessen zeigte sich schon bei Anwendung der beschriebenen Lampe und bei unseren relativ hohen Gaspreisen (100 Kubikfuss 44 kr.), dass die Kosten der Stromerzeugung mittelst meiner Thermosäule sich nicht bedeutend höher stellen, als die mittelst einer jene äquiparirenden hydro-galvanischen Batterie.

Es ist nicht zu bezweifeln, dass durch eine Verbesserung der Wärmevorrichtung die Stromerzeugungskosten sich bedeutend reduciren werden.

Es erübrigt nur noch den Kühlapparat zu beschreiben. Derselbe besteht einfach aus zwei länglichen Thongefässen, in welche je eine Seitenwand der Thermosäule hineingestellt wird. Beide Gefässe werden mit Wasser gefüllt; nach längerem Gebrauche wird das warm gewordene Wasser durch frisches kaltes ersetzt.

Wie ich zu Anfang schon bemerkt, hatte ich bei der Construction der Thermosäule hauptsächlich deren Anwendung in grösserem Massstabe vor Augen. Da Billigkeit der Stromerzeugung ein Hauptbedingniss für die Erreichung des angestrebten Zieles ist, so musste ich selbstverständlich meine Aufmerksamkeit auf die Benützung der Kohle lenken. Zu dem Zwecke habe ich einen eigenthümlich geformten Ofen ausgeführt, derselbe ist in Fig. 5 in $^1/_{12}$ der natürlichen Grösse dargestellt. Bei demselben befindet sich der Heitzraum in der Mitte, rechts und links zweigen sich in horizontaler Richtung zwölf prismatische Röhren ab, welche wieder je sechs auf einer Seite in einen viereckigen Blechkasten $x\,x'$ einmünden und vermittelst zweier convergirender Röhren $p\,p'$ mit dem Rauchfang in Communication treten. Dieser Ofen ist für 768 Elemente berechnet, $r\,r'$ zeigt in welcher Weise dieselben von den prismatischen Röhren erwärmt werden; es sind der Deutlichkeit wegen nur auf der rechten Seite die Elemente gezeichnet, sie befinden sich in gleicher Weise an sämmtlichen prismatischen Röhren, und zwar an jedem Rohr 64. Zur Abkühlung wird ein einfaches, mit Wasser gefülltes Thongefäss benützt. Der Ofen

S. Marcus

Fig. 2.

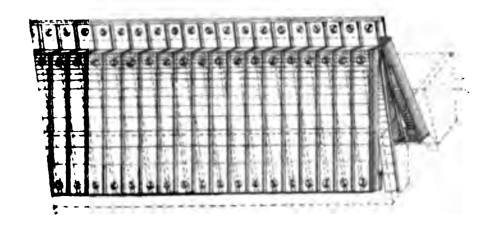


Fig. 3.

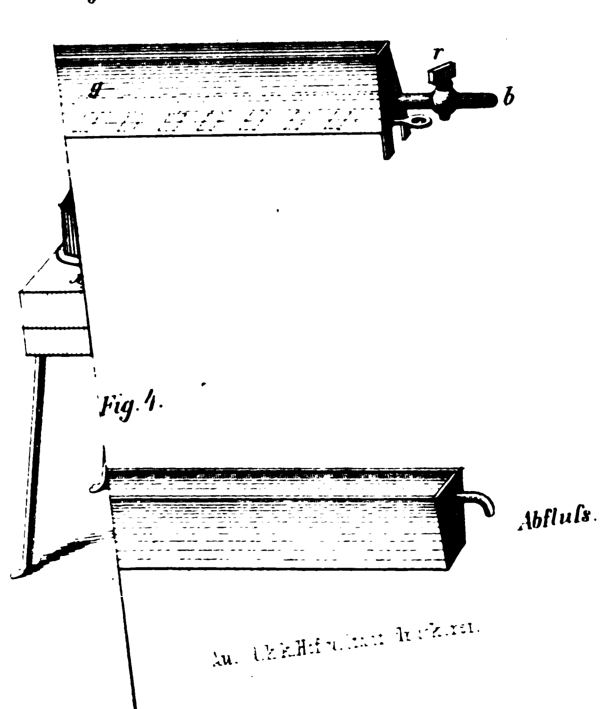


Fig. 4.

wsun
12
kr.
Da
nem
stelen
welche
fl. 4
V
saule
glaube
zu ve
gewi
anstr

consumirt per Stunde circa 20 Pfünd Steinkohle, dies ergibt für 12 Stunden 240 Pfund, deren Kosten sich auf circa 2 fl. 40 kr. stellen.

Da nun nach den vorgeführten Versuchen 25 Thermoelemente einem Bunsen'schen Zinkkohlen-Elemente gleichkommen, so stellen sich die Erhaltungskosten von 30 Bunsen-Elementen, welche durch die 768 Thermoelemente repräsentirt werden, auf 2 fl. 40 kr., was wohl als günstiges Resultat bezeichnet werden darf.

Wenngleich ich nicht der Meinung bin, mit dieser Thermosäule schon das von mir angestrebte Ziel erreicht zu haben, so glaube ich doch, dass dieselbe den Weg bezeichnet, der weiter zu verfolgen ist, um der Elektricität in der Praxis jenen Rang zu gewinnen, welcher ihr, ihrer wunderbaren Eigenschaften wegen, unstreitig zukommt.

Über ein vereinfachtes Verfahren, das Indium aus der Freiberger Zinkblende zu gewinnen.

Von P. Weselsky,

Adjuncten am chemischen Laboratorium des k. k. polytechnischen Institutes.

(Vorgelegt vom Prof. A. Schrötter in der Sitzung am 9. März 1865.)

Herr Professor Schrötter hatte durch Vermittlung des Herrn E. Meusel aus Koburg (derzeit Practicanten am chemischen Laboratorium des k. k. polytechnischen Institutes) eine grössere Partie gerösteter Freiberger Zinkblende erhalten, um aus derselben das Indium zu gewinnen.

Da jedoch die zu diesem Zwecke bis jetzt angegebenen Methoden [1]) von F. Reich und Th. Richter nicht nur sehr kostspielig, sondern auch sehr umständlich und zeitraubend sind, und das in der neuesten Zeit von Dr. C. Winkler angegebene Verfahren [2]) wohl zur Gewinnung des Indiums aus indiumhaltigem Zink, nicht aber für Blende Anwendung findet; so hat mich Professor Schrötter veranlasst, Versuche anzustellen, um einen Weg aufzufinden, der einfacher als die bisherigen auch zur Gewinnung grösserer Quantitäten von Indium geeignet wäre. Dies zu leisten ist mir, wie ich glaube, auch gelungen.

Der von mir eingeschlagene Weg ist folgender:

Die geröstete Blende, wie sie in Freiberg zu haben ist, wird geschlämmt und zu einem Quantum von höchstens 6—8 Pfunden in geeigneten Gefässen, am besten Porzellanschalen, mit Wasser angefeuchtet, hierauf mit einer genügenden Menge eines Gemisches aus 10 Theilen concentrirter Salzsäure und 1 Theil Salpetersäure unter häufigem Umrühren, durch mehrere Stunden bei der Kochhitze digerirt, wobei sie nahezu ganz aufgeschlossen wird. Der späteren

---

[1]) Erdmann, Journal Bd. 89. S 441; Bd. 90, S. 172; Bd. 92, S. 480.

[2]) Erdmann, Journal Bd. 94, S. 1.

Behandlung der erhaltenen Lösung wegen ist es gut, keinen grossen Überschuss von Säuren anzuwenden.

Die Masse wird nun mit Wasser stark verdünnt und in einem Decantirtopf absetzen gelassen. Zu der von der Kieselsäure und von dem unaufgeschlossenen Theil getrennten fast klaren Lösung wird nun zur Sättigung des Säurenüberschusses so lange kohlensaures Natron zugesetzt, bis eben ein Niederschlag sich zu bilden beginnt, und dann wird derselbe mit unterschwefligsaurem Natron auf 1 Pfund gerösteter Blende 7—8 Loth in Glaskolben so lange gekocht, bis keine schweflige Säure mehr entweicht und der Anfangs gebildete gelbe, flockige Niederschlag schwarz erscheint, wo er sich dann auch leicht absetzt. Durch diese Operation werden die mit der Blende vorkommenden Metalle, wie: Arsen, Blei, Kupfer, Antimon zum Theile gefällt zum Theil gehen dieselben sammt dem zu Eisenchlorür reducirten Eisenchlorid und dem Zinkchlorid in Lösung und beeinträchtigen die weiteren Operationen nicht.

In dem schwarzen Niederschlage ist ein grösserer Theil des Indiums als Indiumoxyd enthalten, während ein Theil in der Lösung bleibt; um nun auch diese zu gewinnen, habe ich mit der Methode C. Winkler's [1]) angeschlossen, und fälle denselben mittelst kohlensaurem Baryt.

Zu diesem Behufe wird die Lösung sammt dem, durch Kochen mit unterschwefligsaurem Natron erhaltenen Niederschlage hinreichend abgekühlt, dann ohne den genannten Niederschlag von der Flüssigkeit zu trennen mit frisch gefälltem kohlensauren Baryt im Überschusse versetzt, und unter öfterem Umrühren durch 12 Stunden digerirt. Die klar gewordene Flüssigkeit wird abgezogen und der Niederschlag mehrmals bei gut abgehaltener Luft ausgewaschen.

Der so erhaltene Niederschlag, welcher jetzt neben den durch das Kochen mittelst unterschwefligsauren Natron gebildeten Schwefelverbindungen von Arsen, Kupfer, Blei etc. und dem überflüssig angewandten kohlensauren Baryt, dann dem noch anhängenden Eisenoxyd und Zinkoxyd die ganze Menge des Indiums enthält, wird mit Salzsäure bis zur stark sauren Reaction versetzt, mit Wasser verdünnt, und ohne den ungelösten Theil abzufiltriren, mit Schwefelwasserstoff im Überschusse behandelt.

[1]) Erdmann, Journal Bd. 94, S. 3.

Aus dem Filtrate wird Baryt durch Schwefelsäure entfernt, und das Indiumoxyd durch Ammoniak gefällt. Das so erhaltene Indiumoxyd enthält immer noch etwas Eisen und Zink, von denen es durch nochmalige Behandlung mit unterschwefligsaurem Natron und kohlensaurem Baryt getrennt werden kann.

Der grosse Vortheil des hier angegebenen Verfahrens liegt darin, dass gleich vorhinein fast die ganze grosse Menge des Eisens und Zinkes entfernt wird, und man es dann nur mit einer Masse zu thun hat, in der das Indium in verhältnissmässig grosser Menge enthalten ist.

Es ist möglich, dass man im Stande sein wird, durch anhaltendes Kochen der ursprünglichen Lösung mit dem unterschwefligsauren Natron das ganze Indium mit den Schwefelmetallen zu fällen; es würde dann die Anwendung des kohlensauren Baryts ganz wegfallen, und das Verfahren noch viel einfacher werden.

Ich bin gegenwärtig mit Versuchen hierüber beschäftigt, und werde die Resultate derselben seiner Zeit mittheilen.

Die jedem Fachmanne bekannten, bei der raschen Entwickelung der Wissenschaft von Jahr zu Jahr sich steigernden Unzukömmlichkeiten, welche mit der cumulativen Herausgabe von Abhandlungen verbunden sind, die sich auf sämmtliche naturwissenschaftliche Fächer beziehen, haben die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften bestimmt, ihre Sitzungsberichte in zwei gesonderten Abtheilungen erscheinen zu lassen.

Die **erste Abtheilung** enthält die Abhandlungen aus der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Geologie und Paläontologie; die **zweite Abtheilung** die aus der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

Von jeder dieser Abtheilungen erscheint jeden Monat mit Ausnahme von August und September ein Heft, welches drei Sitzungen umfasst. Der Jahrgang enthält somit zehn Hefte.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine vollständige Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen voran, selbst wenn diese nicht zur Aufnahme in die Schriften der Akademie bestimmt werden.

Der Preis des Jahrganges beträgt für eine Abtheilung 12 Gulden ö. W.

Von allen grösseren Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und sind durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn zu beziehen.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LI. BAND. IV. UND V. HEFT.

Jahrgang 1865. — April u. Mai.

(Mit 12 Tafeln und 1 Holzschnitte.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER KAIS. KÖN. HOF- UND STAATSDRUCKEREI

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1865.

INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

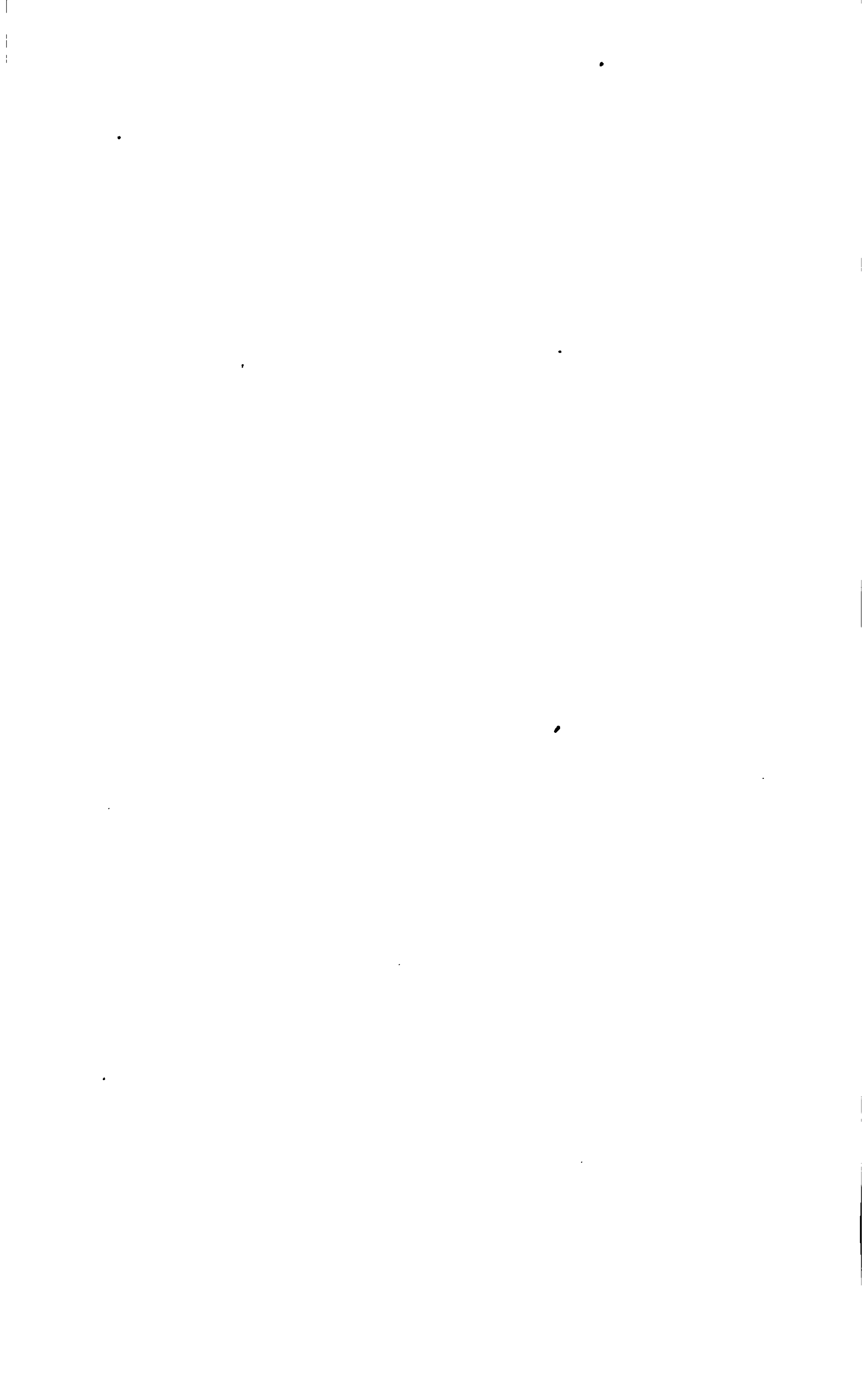
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LI. BAND.

ZWEITE ABTHEILUNG.

4.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.



X. SITZUNG VOM 6. APRIL 1865.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Die Schwefelkupfer-Dendriten in Papier.“ II. Bericht, von Herrn Hofrath W. Ritter v. Haidinger;

„Über das System und die Charakteristik der natürlichen Familien der Vögel“, III. Abtheilung, von Herrn Director Dr. Leop. Fitzinger;

„Über die Umformung unendlicher Reihen“, von Herrn Prof. Dr. A. Winckler.

Herr Dr. A. Boué legt eine Abhandlung: „Vergleichung der ehemaligen geologischen Phänomene mit einigen unserer Zeit“ vor.

Herr Prof. J. Petzval überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. J. Frischauf über „die Integration der linearen Partialgleichungen mit drei Veränderlichen“, nebst einer zweiten des Herrn Dr. M. Allé, Adjuncten der k. k. Sternwarte in Prag, welche den Titel führt: „Über die Eigenschaften derjenigen Gattung von Functionen, welche in der Entwicklung von $(1-2qx+q^2)^{-\frac{m}{2}}$ nach aufsteigenden Potenzen von q auftreten, und über die Entwicklung des Ausdruckes $\left\{1-2q\left(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')\right)+q^2\right\}^{-\frac{m}{2}}$“.

Herr Dr. Th. Kotschy übergibt eine Abhandlung betitelt: „*Plantae Binderianae nilotico-aethiopicae.*“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royal de Belgique: Bulletin. 34e Année, 2e Série, Tome 19, No. 2. Bruxelles, 1865; 8o.

Almanach der österr. Kriegs-Marine für das Jahr 1865. IV. Jahrg. Wien; Kl. 8o.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 7. Wien, 1865; 8o.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1519—1520. Altona, 1865; 4o.

Bosis, Francesco de, La collezione Baroni dei minerali fossili e testacei marini del dipartimento del Metauro. Ancona, 1863; 8o.

— Osservazioni meteorologiche del mese di Ottobre 1863 fatte nel R. Istituto tecnico di Ancona. 8°· — I Minerali utili delle Marche. (Dagli Atti della Soc. ital. etc. vol. III.) 8°· — La grotta degli schiavi. (*Ibidem.*) Milano, 1861; 8°· — Il clima di Ancona. Ancona, 1862; 8°· — L'inverno 1863—64 in Ancona. 8°·

Caron, H., Recherches sur la composition chimique des aciers. Bruxelles, 1865; 4°·

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 1er Volume, 12e—13e Livraisons. Paris, 1865; 8°·

Gesellschaft, k. k. mähr.-schles., zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde in Brünn: Mittheilungen. 1864. Brünn; 4°·

Gewerbe-Verein, n. ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 13—14. Wien, 1865; 8°·

Institut des Provinces, des Sociétés savantes et des Congrès scientifiques: Annuaire. 2de Série. 6. Volume (XVIe Vol. de la collation.) 1864. Paris & Caen; 8°·

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg., Nr. 10. Wien, 1865; 4°·

Lotos. XV. Jahrgang. Januar—März 1865. Prag; 8°·

Moniteur scientifique. 199e Livraison. Tome VIIe, Année 1865. Paris; 4°·

Plantamour, E., Recherches sur la distribution de la température à la surface de la Suisse pendant l'hiver 1863—64. (Lu à la Sté Helvétique des Sciences Naturelles dans sa Séance à Zürich, le 23 Août 1864.) 8°·

Reader. Nr. 117—118. Vol. V. London, 1865; Folio.

Verein für Naturkunde zu Cassel: XIII. & XIV. Bericht. Cassel, 1863 & 1864; 8°·

Wiener medizinische Wochenschrift. XV. Jahrg., Nr. 24—27. Wien, 1865; 4°·

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. Nr. 11. Gratz, 1865; 4°·

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines. XVII. Jahrg. 2. Heft. Wien, 1865; 4°·

Über die Umformung unendlicher Reihen.

Von dem w. M. Dr. A. Winckler,

Professor in Gratz.

Durch die Umformung der Reihen gelangt man bekanntlich in vielen Fällen zu der für die näherungsweise Berechnung einer Reihe geeignetern Form oder selbst zu allgemeinen Summenformeln, in manchen Fällen auch zur Kenntniss von Eigenschaften der Function, welche die Reihe darstellt und zur Transformation oder Bestimmung des Werthes von Integralen. Unter den zahlreichen Hilfsmitteln der Umformung zeichnen sich durch ihre Allgemeinheit die beiden Sätze aus, welche Euler im 2. Bande seiner Differentialrechnung (Cap. 1, §. 3 und Cap. 2, §. 26) bewiesen hat, und welche später von Jacobi in der Abhandlung: „De seriebus ac differentiis observatiunculae“ (Journal von Crelle, Bd. 36) auf eine neue, sehr bemerkenswerthe Art hergeleitet wurden.

Der eine dieser Sätze ist durch die Gleichung ausgedrückt:

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots$$
$$= \frac{A_0}{1-x} + \frac{x\Delta A_0}{(1-x)^2} + \frac{x^2\Delta^2 A_0}{(1-x)^3} + \frac{x^3\Delta^3 A_0}{(1-x)_0} + \dots$$

Der zweite Satz, wovon der vorige nur ein specieller Fall ist, heisst: Wenn die Summe der Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = f(x)$$

gegeben ist, und wenn die auf einander folgenden Coëfficienten derselben noch mit den entsprechenden Gliedern einer andern Reihe multiplicirt werden, so findet für die daraus entstehende neue Reihe die Gleichung statt:

$$a_0 A_0 + a_1 A_1 x + a_2 A_2 x^2 + a_3 A_3 x^3 + \dots$$
$$= A_0 f(x) + \Delta A_0 . x f'(x) + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2} x^2 f''(x) + \frac{\Delta^3 A_0}{1.2.3} x^3 f'''(x) + \dots$$

wo zur Abkürzung

$$f^{(n)}_{(x)} = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

gesetzt wurde.

Aus dem Folgenden wird sich ergeben, dass ausser diesen noch mehrere andere, sehr allgemeine und, so viel mir bekannt, neue Relationen bestehen, welche ebenfalls zur Umformung der Reihen dienen und, mit der Euler'schen, leicht und in beinahe ganz gleichförmiger Weise abgeleitet werden können. Die naheliegende Verbindung dieses Gegenstandes mit der Integralrechnung wird zugleich zu einigen anderen bemerkenswerthen Resultaten führen.

In soweit hierbei meines Wissens bereits bekannte Ergebnisse in Rede kommen, werde ich die mir zugängliche Quelle in jedem einzelnen Falle angeben.

1.

Die zur Umformung dienenden Relationen, deren so eben Erwähnung geschah, fliessen aus einer ganz trivialen Anwendung der Taylor'schen Reihe.

Stellt man nämlich diese Reihe für eine Function $f(x_0+x)$ mit den Reihen für die 1, 2, 3,... Differentialquotienten dieser Function in der Weise zusammen, wie dies schon oft bei ähnlichen Betrachtungen geschehen ist, so erhält man das folgende Schema von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
f(x_0+x) &= f(x_0)+xf'(x_0)+\frac{x^2}{2!}f''(x_0)+\frac{x^3}{3!}f'''(x_0)+\frac{x^4}{4!}f^{IV}(x_0)+\dots\\
f'(x_0+x) &= \qquad\quad + f'(x_0)+xf''(x_0)+\frac{x^2}{2!}f'''(x_0)+\frac{x^3}{3!}f^{IV}(x_0)+\dots\\
f''(x_0+x) &= \qquad\qquad\qquad + f''(x_0)+xf'''(x_0)+\frac{x^2}{2!}f^{IV}(x_0)+\dots\\
f'''(x_0+x) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + f'''(x_0)+xf^{IV}(x_0)+\dots\\
f^{IV}(x_0+x) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + f^{IV}(x_0)+\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} (A)$$

worin zur Abkürzung, wie üblich, $1.2.3\dots n = n!$ gesetzt wurde.

Um nun zunächst die Euler'sche Formel zu erhalten, multiplicire man diese Gleichungen, so wie sie auf einander folgen, mit:

$$A_0 \;,\quad \Delta A_0 . x \;,\quad \frac{\Delta^2 A_0}{2!} x^2 \;,\quad \frac{\Delta^3 A_0}{3!} x^3 \;,\quad \frac{\Delta^4 A_0}{4!} x^4 \ldots.$$

addire sie dann und berücksichtige, dass, wie aus der Differenzenrechnung bekannt ist:

$$\frac{A_0}{n!} + \frac{\Delta A_0}{1!(n-1)!} + \frac{\Delta^2 A_0}{2!(n-2)!} + \ldots + \frac{\Delta^{n-1} A_0}{(n-1)!1!} + \frac{\Delta^n A_0}{n!}$$
$$= \frac{A_n}{1.2.3..n}$$

so erhält man unmittelbar die Gleichung:

$$A_0 f(x_0) + A_1 x f'(x_0) + \frac{A_2}{1.2} x^2 f''(x_0) + \frac{A_3}{1.2.3} x^3 f'''(x_0) + \ldots$$
$$= A_0 f(x_0+x) + \Delta A_0 . x f'(x_0+x) + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2} x^2 f''(x_0+x)$$
$$+ \frac{\Delta^3 A_0}{1.2.3} x^3 f'''(x_0+x) + \ldots \qquad \text{(I)}$$

Hieraus ergibt sich sofort die Euler'sche Formel. Setzt man nämlich $x_0 = 0$ und:

$$f(0) = a_0 ,\; f'(0) = a_1 ,\; f''(0) = 1.2.a_2 ,\; f'''(0) = 1.2.3 a_3 , \ldots$$

so folgt:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

und man hat die Gleichung:

$$a_0 A_0 + a_1 A_1 x + a_2 A_2 x^2 + a_3 A_3 x^3 + \ldots.$$
$$= A_0 f(x) + \Delta A_0 . x f'(x) + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2} x^2 f''(x) + \frac{\Delta^3 A_0}{1.2.3} x^3 f'''(x) + \ldots$$

Ich füge noch die Bemerkung bei, dass sich gewissermassen die umgekehrte Formel zu (I) ergibt, wenn man darin:

$$x_0 = z_0 + z \;,\quad x = -z$$

und nach geschehener Substitution wieder x für z und x_0 für z_0 setzt. Man erhält:

$$A_0 f(x_0+x) - A_1 x f'(x_0+x) + \frac{A_2}{1.2} x^2 f''(x_0+x) - \ldots . =$$

$$A_0 f(x_0) \quad - \Delta A_0 x f'(x_0) \quad + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2} x^2 f''(x_0) \quad - \ldots .$$

eine Gleichung, welche sich übrigens auch auf andere Weise, und zwar direct aus (A) herleiten liesse.

2.

Um einige besondere Fälle zu betrachten, nehme ich an, es sei:

$$A_0 = 1 \quad , \quad A_1 = \frac{\alpha}{\gamma} \quad , \quad A_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \quad , \ldots$$

allgemein:

$$A_n = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-2)}.$$

Wie leicht zu finden, entsprechen dieser Annahme die Ausdrücke:

$$\Delta A_0 = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha} \quad , \quad \Delta^2 A_0 = \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)},$$

$$\Delta^3 A_0 = \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)(\alpha-\gamma-2)}{\gamma.\quad(\gamma+1)\quad(\gamma+2)}$$

allgemein:

$$\Delta^n A_0 = \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)\ldots(\alpha-\gamma-n+1)}{\gamma.\quad(\gamma+1)\ldots\quad(\gamma+n-1)}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (I) ein, so folgt:

$$f(x_0) + \frac{\alpha}{\gamma} x f'(x_0) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{x^2 f''(x_0)}{1.2} + \ldots .$$
$$= f(x_0+x) + \frac{\alpha-\gamma}{\gamma} x f'(x_0+x) + \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{x^2 f''(x_0+x)}{1.2} + \ldots \tag{1}$$

Einige Beispiele verdienen bemerkt zu werden.

1. Es sei: $\qquad f(x) = e^x$

Aus (1) erhält man hiefür die Gleichung:

$$1+\frac{\alpha}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}+\dots$$

$$=e^x\left[1+\frac{\alpha-\gamma}{\gamma}x+\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\dots\right]$$

welche, auf ganz anderem Wege hergeleitet, bekannt ist.

2. Es sei: $f(x)=(1-x)^{-\beta}$; also

$$f'(x)=\beta(1-x)^{-\beta-1}\ ;\quad f''(x)=\beta(\beta+1)(1-x)^{-\beta-2}\ ;\quad \dots .$$

Auch sei $x_0=0$. Man erhält dann die bekannte Gleichung:

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma.(\gamma+1)}x^2+\dots=$$

$$\frac{1}{(1-x)^\beta}\left[1+\frac{\beta(\alpha-\gamma)}{1.\gamma}\,\frac{x}{1-x}+\frac{\beta(\beta+1)(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{1.2.\gamma.(\gamma+1)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2+\dots\right]$$

Gibt man dem letzteren Ausdruck die Form:

$$\frac{1}{(1-x)^\beta}\left[1+\frac{(\gamma-\alpha)\beta}{1.\gamma}.\frac{x}{x-1}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)}{1.\quad 2.}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\dots\right]$$

und bezeichnet, wie üblich, die hypergeometrische Reihe durch $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, so erscheint jene Gleichung in der Form:

$$F(\alpha.\beta,\gamma,x)=\frac{1}{(1-x)^\beta}F(\gamma-\alpha,\beta,\gamma,\frac{x}{x-1})$$

3. Es sei: $f(x)=\log x$; also:

$$f'(x)=\frac{1}{x};\ f''(x)=-\frac{1}{x^2};\dots f^{(n)}_{(x)}=(-1)^{n-1}.\frac{1.2.3\dots(n-1)}{x^n}$$

Auch sei $x_0=1$. Man findet hierfür die Gleichung:

$$\frac{\alpha}{\gamma}x-\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{x^3}{3}-\dots=$$

$$\log(1+x)+\frac{\alpha-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{x}{1+x}-\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{\gamma.(\gamma+1)}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\dots$$

oder auch, wenn $-x$ für x gesetzt wird:

$$\log(1-x)+\frac{\alpha}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{x^3}{3}+\ldots$$

$$=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma}\cdot\frac{x}{x-1}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)}{\gamma.(\gamma+1)}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$$

$$+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\alpha+2)}{\gamma.(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{x}{x-1}\right)^3+\ldots$$

Setzt man:

$$\frac{\alpha}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{x^3}{3}+\ldots=F(\alpha,\gamma.x)$$

so hat diese Reihe hiernach die Eigenschaft, dass:

$$F(\alpha.\gamma,x)=F\left(\gamma-\alpha,\gamma,\frac{x}{x-1}\right)-\log(1-x)$$

4. Es sei: $f(x)=\sin x$

so erhält man aus (1) die Gleichung:

$$\sin x_0+\frac{\alpha}{\gamma}x\cos x_0-\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{x^2\sin x_0}{1.2}$$

$$-\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{x^3\cos x_0}{1.2.3}+\ldots$$

$$=\sin(x_0+x)+\frac{\alpha-\gamma}{\gamma}x\cos(x_0+x)$$

$$-\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{x^2\sin(x_0+x)}{1.2}-\ldots\ldots$$

Wird hierin zuerst $x_0=0$ und dann $x_0=\frac{\pi}{2}$ gesetzt, so ergeben sich die beiden Resultate:

$$\frac{\alpha}{\gamma}x-\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot\frac{x^3}{1.2.3}$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)}\cdot\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots$$

$$=\sin x+\frac{\alpha-\gamma}{\gamma}x\cos x-\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{x^2\sin x}{1.2}-\ldots$$

und:

$$1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{x^2}{1.2}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}\cdot\frac{x^4}{1.2.3.4}-\dots\dots$$

$$=\cos x-\frac{\alpha-\gamma}{\gamma}x\sin x-\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{x^2\cos x}{1.2}+\dots\dots$$

Für $\alpha=\gamma$ findet man hieraus die gewöhnlichen Reihen für $\sin x$ und $\cos x$.

3.

Zu den Gleichungen (A) des Art. 1 zurückkehrend, multiplicire man dieselben nach der Ordnung, in welcher sie auf einander folgen, mit:

$$A_0\,,\quad\frac{\Delta A_0}{1.2}x\,,\quad\frac{\Delta^2 A_0}{1.2.3}\cdot x^2\,,\quad\frac{\Delta^3 A_0}{1.2.3.4}x^3\,,\;\dots\dots$$

addire sie hierauf und bemerke, dass nach einer bekannten Formel der Differenzenrechnung:

$$\frac{A_0}{1!(n-1)!}+\frac{\Delta A_0}{2!(n-2)!}+\frac{\Delta^2 A_0}{3!(n-3)!}+\dots+\frac{\Delta^{n-2}A_0}{(n-1)!}+\frac{\Delta^{n-1}A_0}{n!}$$

$$=\frac{1}{n!}\left[nA_0+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta A_0+\dots\dots+n\Delta^{n-2}A_0+\Delta^{n-1}A_0\right]$$

$$=\frac{A_0+A_1+\dots\dots+A_{n-1}}{1.2.3\dots n}.$$

Aus den Gleichungen (A) geht alsdann die folgende:

$$A_0f(x_0)+\frac{[A_1]}{1.2}xf'(x_0)+\frac{[A_2]}{1.2.3}x^2f''(x_0)+\frac{[A^3]}{1.2.3.4}x^3f'''(x_0)+\dots\dots$$

$$=A_0f(x_0+x)+\frac{\Delta A_0}{1.2}xf'(x_0+x)+\frac{\Delta^2 A_0}{1.2.3}x^2f''(x_0+x)\qquad\text{(II)}$$

$$+\frac{\Delta^3 A_0}{1.2.3.4}x^3f'''(x_0+x)+\dots$$

hervor, worin der Kürze wegen:

$$[A_n]=A_0+A_1+A_2+\dots+A_n$$

gesetzt wurde.

In dieser Gleichung, welche von (I) offenbar verschieden ist, setze man wieder $x_0 = 0$ und wie früher:

$$f(0) = a_0,\ f'(0) = a_1,\ f''(0) = 1.2.a_2,\ f'''(0) = 1.2.3.a_3, \ldots$$

also:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots$$

Man erhält alsdann:

$$a_0 A_0 + \frac{a_1[A_1]}{2} x + \frac{a_2[A_2]}{3} x^2 + \frac{a_3[A_3]}{4} x^3 + \ldots$$

$$= A_0 f(x) + \frac{\Delta A_0}{1.2} x f'(x) + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2.3} x^2 f''(x) + \frac{\Delta^3 A_0}{1.2.3.4} x^3 f'''(x) + \ldots$$

eine Gleichung, welche in gewisser Hinsicht ein Seitenstück zu der Euler'schen bildet.

Man kann die Gleichung (II) dadurch in etwas andere Gestalt bringen, dass man $x_0 = z_0 + z$ und $x = -z$, sodann nach geschehener Substitution wieder x_0 für z_0 und x für z setzt. Man erhält:

$$A_0 f(x_0 + x) - \frac{[A_1]}{2} x f'(x_0 + x) + \frac{[A_2]}{3} x^2 f''(x_0 + x) - \ldots =$$

$$A_0 f(x_0) - \frac{\Delta A_0}{1.2} x f'(x_0) + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2.3} x^2 f''(x_0) - \ldots\ldots$$

Um in Kürze einen besonderen Fall zu berühren, will ich annehmen, es sei:

$$[A_n] = (n+1)^r, \text{ also } A_n = (n+1)^r - n^r,$$

wobei r eine positive ganze Zahl bezeichnet. Es ist dann bekanntlich:

$$\Delta^{r-1} A_0 = 1.2.3\ldots r$$

die letzte von Null verschiedene Differenz, so dass die rechte Seite der Gleichung (II) abbricht, die linke dagegen im Allgemeinen ohne Ende fortgeht.

Ist z. B. $r = 3$, so ergibt sich die Gleichung:

$$f(x_0) + 4 x f'(x_0) + \frac{9}{1.2} x^2 f''(x_0) + \frac{16}{1.2.3} x^3 f'''(x_0) + \ldots$$

$$= f(x_0 + x) + 3 x f'(x_0 + x) + x^2 f''(x_0 + x)$$

von deren Richtigkeit man sich leicht direct oder aus (I) überzeugen kann.

4.

Die Anordnung der Gleichungen (A) des Artikels 1, auf welche sich das Vorangehende allein stützt, lässt noch manche Anwendungen zu. Ich hebe die folgenden hervor: Man multiplicire jene Gleichungen der Ordnung nach mit den Ausdrücken:

$$\varphi(x)\quad,\quad x\int_0^x \varphi(z)dz\quad,\quad \frac{x^2}{1!2!}\int_0^x (x-z)\,\varphi(z)dz\,,$$

$$\frac{x^3}{2!3!}\int_0^x (x-z)^2\,\varphi(z)dz\,,\;\ldots\;\frac{x^m}{(m-1)!m!}\int_0^x (x-z)^{m-1}\,\varphi(z)dz,\;\ldots$$

und addire hierauf alle zusammen. Die Summe der Coëfficienten aller Glieder, welche $\overset{(n)}{f}(x_0)$ enthalten, ist:

$$\frac{x^n}{n!}\,\varphi(x)+\frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^x \varphi(z)dz+\frac{x^n}{(n-2)!1!2!}\int_0^x (x-z)\,\varphi(z)dz\;+\;\ldots$$

$$+\frac{x^n}{1!(n-2)!(n-1)!}\int_0^x (x-z)^{n-2}\,\varphi(z)dz+\frac{x^n}{(n-1)!n!}\int_0^x (x-z)^{n-1}\varphi(z)dz.$$

Dieser Ausdruck lässt eine wesentlich einfachere Form zu. Zunächst kann man denselben wie folgt schreiben:

$$\frac{x^n}{n!}\Big[\varphi(x)+n\int_0^x \varphi(z)dz+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\int_0^x (x-z)\,\varphi(z)dz+\ldots.$$

$$+\,n\,.\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-z)^{n-2}\varphi(z)dz+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-z)^{n-1}\,\varphi(z)\,dz\Big]$$

Bemerkt man ferner noch, dass wenn:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-z)^{n-1}\,\varphi(z)dz=u$$

gesetzt wird, alsdann:

$$\frac{1}{(n-2)!}\int_0^x (x-z)^{n-2}\,\varphi(z)dz=\frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{(n-3)!}\int_0^x (x-z)^{n-3}\varphi(z)dz = \frac{d^3u}{dx^3}$$

. . . .

$$\int_0^x \varphi(z)\,dz \qquad = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$$

$$\varphi(x) \qquad = \frac{d^n u}{dx^n}$$

so erscheint jener Ausdruck in folgender Gestalt:

$$\frac{x^n}{n!}\left[\frac{d^n u}{dx^n} + n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + n\frac{du}{dx} + u\right]$$

und ist also offenbar nichts Anderes, als:

$$\frac{x^n e^{-x}}{n!}\cdot\frac{d^n(ue^x)}{dx^n}.$$

Dies vorausgesetzt, liefert (A) die folgende Gleichung:

$$f(x_0+x)\,\varphi(x) + xf'(x_0+x)\int_0^x \varphi(z)dz + \frac{x^2 f''(x_0+x)}{1!\,2!}\int_0^x (x-z)\,\varphi(z)dz$$

$$+ \ldots + \frac{x^n f^{(n)}_{(x_0+x)}}{(n-1)!\,n!}\int_0^x (x-z)^{n-1}\varphi(z)dz + \ldots$$

$$= e^{-x}.\left\{\begin{array}{l} f(x_0)\,e^x\varphi(x) + \dfrac{xf'(x_0)}{1!}\,\dfrac{d[e^x\int_0^x \varphi(z)dz]}{dx} \\ \qquad + \dfrac{x^2 f''(x_0)}{1!\,2!}\,\dfrac{d^2[e^x\int_0^x (x-z)\,\varphi(z)dz]}{dx^2} \\ + \ldots\ldots + \dfrac{x^n f^{(n)}_{(x_0)}}{(n-1)!\,n!}\cdot\dfrac{d^n[e^x\int_0^x (x-z)^{n-1}\varphi(z)dz]}{dx^n} + \ldots \end{array}\right\}$$

Dass x in $\varphi(z)$ nicht vorkommen darf, ergibt sich aus der vorstehenden Entwickelung von selbst.

Die sehr einfache Annahme: $\varphi(z) = 1$, $f(x) = e^x$ führt zu der Umformung:

$$e^x + x\frac{d(xe^x)}{dx} + \frac{x^2}{2!\,2!}\cdot\frac{d^2(x^2e^x)}{dx^2} + \frac{x^3}{3!\,3!}\cdot\frac{d^3(x^3e^x)}{dx^3} + \ldots$$
$$= e^{2x}\left[1 + x^2 + \left(\frac{x^2}{2!}\right)^2 + \left(\frac{x^3}{3!}\right)^2 + \left(\frac{x^4}{4!}\right)^2 + \ldots.\right].$$

Setzt man allgemeiner: $\varphi(z) = z^{a-1}$ und lässt $f(x)$ unbestimmt, beachtet auch, dass:

$$\int_0^x (x-z)^{n-1} z^{a-1}\,dz = \frac{1.2.3.\ldots.(n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}\cdot x^{a+n-1}$$

so gelangt man zu einer Gleichung, welche nach einigen einfachen Reductionen die folgende Form annimmt:

$$f(x_0)\,.\,x^{a-1}e^x + x\,.\frac{f'(x_0)}{a}\cdot\frac{d(x^ae^x)}{dx} + \frac{x^2}{2!}\cdot\frac{f''(x)}{a(a+1)}\cdot\frac{d^2(x^{a+1}e^x)}{dx^2}$$
$$+\frac{x^3}{3!}\cdot\frac{f'''(x_0)}{a(a+1)(a+2)}\cdot\frac{d^3(x^{a+2}e^x)}{dx^3} + \ldots.$$
$$= x^{a-1}e^x.\left\{f(x_0+x) + x^2\,.\,\frac{f'(x_0+x)}{a} + \frac{x^4}{2!}\frac{f''(x_0+x)}{a(a+1)} + \frac{x^6}{3!}\,\frac{f'''(x_0+x)}{a(a+1)(a+2)} + \ldots\ldots\right\}$$

5.

Von den sehr mannigfachen Resultaten, welche sich auf dem bisher eingeschlagenen Wege finden lassen, möge ferner noch das folgende Platz finden:

Multiplicirt man die Gleichungen (A) des Art. 1 mit:

$$x^a\varphi(x)\,;\;\; ax^a\int_0^x \varphi(z)dz\,;\;\; \frac{a(a-1)}{1!\,2!}\,x^a\int_0^x (x-z)\,\varphi(z)dz\,;$$
$$\ldots\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-m+1)}{(m-1)!\;m!}\,x^a\int_0^x (x-z)^{m-1}\varphi(z)dz\,;\ldots.$$

und addirt dann wieder insgesammt jene Gleichungen, so wird die Summe der $\overset{(n)}{f}(x_0)$ enthaltenden Glieder die folgende sein:

$$\frac{x^{n+a}}{n!}\varphi(x)+\frac{ax^{n+a-1}}{(n-1)!}\int_0^x\varphi(z)dz+\frac{a(a-1)x^{n+a-2}}{(n-2)!\,1!\,2!}\int_0^x(x-z)\,\varphi(z)dz$$

$$+\frac{a(a-1)(a-2)x^{n+a-3}}{(n-3)!\,2!\,3!}\int_0^x(x-z)^2\varphi(z)dz+\ldots$$

$$+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{n+(a-n)}}{(n-1)!\,n!}\int_0^x(x-z)^{n-1}\varphi(z)dz$$

Dieser Ausdruck lässt sich, wenn man für einen Augenblick, wie früher:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x(x-z)^{n-1}\varphi(z)dz=u$$

setzt, in folgender Form schreiben:

$$\frac{x^n}{n!}\Big[x^a.\frac{d^nu}{dx^n}+n.ax^{a-1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}a(a-1)x^{a-2}.\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+\ldots$$

$$\ldots.+n.a(a-1)\ldots(a-n+2)x^{a-n+1}\frac{du}{dx}$$

$$+a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}.u\Big]$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$\frac{x^n}{n!}\Big[x^a\frac{d^nu}{dx^n}+n.\frac{d.x^a}{dx}.\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2.x^a}{dx^2}.\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}$$

$$+\ldots\ldots.+n\frac{d^{n-1}.x^a}{dx^{n-1}}.\frac{du}{dx}+\frac{d^n.x^a}{dx^n}.u\Big]$$

Dieser Ausdruck endlich ist identisch mit:

$$\frac{x^n}{n!}.\frac{d^n(x^a u)}{dx^n}$$

oder, wenn man den Werth von u einsetzt, mit:

$$\frac{x^n}{(n-1)!\,n!}.\frac{d^n\left[x^a\int_0^x(x-z)^{n-1}\varphi(z)\,dz\right]}{dx^n}$$

Dies vorausgesetzt, erhält man nun aus (A) die Gleichung:

$$f(x_0+x)\varphi(x)+af'(x_0+x)\int_0^x\varphi(z)dz$$

$$+\frac{a(a-1)}{1!\,2!}f''(x_0+x)\int_0^x(x-z)\varphi(z)dz+\ldots.$$

$$+\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{(n-1)!\,n!}\overset{(n)}{f}(x_0+x)\int_0^x(x-z)^{n-1}\varphi(z)dz+\ldots$$

$$=x^{-a}.\left\{\begin{array}{l} f(x_0)x^a\varphi(x)+\dfrac{xf'(x_0)}{1!}\,\dfrac{d\left[x^a\int_0^x\varphi(z)\,dz\right]}{dx} \\ \quad+\dfrac{x^2f''(x_0)}{1!\,2!}\,\dfrac{d^2\left[x^a\int_0^x(x-z)\varphi(z)\,dz\right]}{dx^2} \\ +\ldots+\dfrac{x^n\overset{(n)}{f}_{(x_0)}}{(n-1)!\,n!}\,\dfrac{d^n\left[x^a\int_0^x(x-z)^{n-1}\varphi(z)dz\right]}{dx^n}+\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Auch hier darf die sonst willkürliche Function $\varphi(z)$ die Grösse x nicht enthalten.

Es sei: $$\varphi(z)=z^{b-1}$$

Dann ist:

$$\int_0^x(x-z)^{n-1}z^{b-1}\,dz=\frac{1.2.3.\ldots.(n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}\,x^{b+n-1}$$

und man erhält:

$$f(x_0)+\frac{a+b}{b}\cdot\frac{xf'(x_0)}{1!}+\frac{(a+b)(a+b+1)}{b(b+1)}\cdot\frac{x^2f''(x_0)}{2!}$$

$$+\frac{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}{b.(b+1)(b+2)}\cdot\frac{x^3f'''(x_0)}{3!}+\ldots\ldots.$$

$$=f(x_0+x)+\frac{a}{b}xf'(x_0+x)+\frac{a(a-1)}{b(b+1)}\,\frac{x^2f''(x_0+x)}{2!}$$

$$+\frac{a(a-1)(a-2)}{b(b+1)(b+2)}\cdot\frac{x^3f'''(x_0+x)}{3!}+\ldots\ldots.$$

eine Gleichung, welche mit der auf anderem Wege in Art. 2 gefundenen Gleichung (1) übereinstimmt.

6.

Die Anordnung der Gleichungen (A), welche dem Vorangehenden zu Grunde liegt, schreitet von der Function zu deren auf einander folgenden Differentialquotienten fort. Offenbar kann man auch den umgekehrten Weg befolgen, nämlich von der Function zu dem 1, 2, 3,... Integrale derselben fortgehen. Wenn man aber $f(x_0+x)$ wiederholt der Integration nach x zwischen den Grenzen 0 und x unterwirft, so kann bekanntlich das in solcher Weise entstehende $n$fache Integral durch ein einfaches vermöge der Gleichung:

$$\int_0^x dx \int_0^x dx \ldots \int_0^x f(x_0+x)dx = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \int_0^x (x-z)^{n-1} f(x_0+z)\,dz$$

ausgedrückt werden, und erhält man also die folgenden Gleichungen:

$$\int_0^x f(x_0+z)\,dz = xf(x_0) + \frac{x^2}{1.2} f'(x_0) + \frac{x^3}{1.2.3} f''(x_0) + \ldots$$

$$\int_0^x (x-z) \; f(x_0+z)\,dz = \qquad + \frac{x^2}{1.2} f(x_0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'(x_0) + \ldots$$

$$\int_0^x \frac{(x-z)^2}{1.2} f(x_0+z)\,dz = \qquad + \frac{x^3}{1.2.3} f(x_0) + \ldots$$

. . . .

Multiplicirt man diese Gleichungen der Ordnung nach mit:

$$\varphi(x_0)\,, \quad -\varphi'(x_0)\,, \quad +\varphi''(x_0)\,, \quad -\varphi'''(x_0)\,, \ldots\ldots$$

und addirt sie hierauf, so ergibt sich auf der linken Seite der Ausdruck:

$$\int_0^x f(x_0+z)\left[\varphi(x_0) - (x-z)\varphi'(x_0) + \frac{(x-z)^2}{1.2}\varphi''(x_0) - \ldots\right] dz$$

$$= \int_0^x f(x_0+z)\,\varphi(x_0-x+z)\,dz$$

und rechter Hand kann man die mit gleicher Potenz von x verbundenen Glieder, der Kürze halber, in Form von Integralen darstellen. Es ist nämlich:

$$\varphi(x_0)f'(x_0) - \varphi'(x_0)f(x_0) = \int [\varphi(x_0)f''(x_0) - \varphi''(x_0)f(x_0)]\,dx_0$$

$$\varphi(x_0)f''(x_0) - \varphi'(x_0)f'(x_0) + \varphi''(x_0)f(x_0)$$
$$= \int [\varphi(x_0)f'''(x_0) + \varphi'''(x_0)f(x_0)]\,dx_0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und man hat daher die Gleichung:

$$\int_0^x f(x_0+z)\varphi(x_0-x+z)dz = x\varphi(x_0)f(x_0)$$
$$+ \frac{x^2}{1.2}\int [\varphi(x_0)f''(x_0) - \varphi''(x_0)f(x_0)]dx_0$$
$$+ \frac{x^3}{1.2.3}\int [\varphi(x_0)f'''(x_0) + \varphi'''(x_0)f(x_0)]dx_0$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Gelegentlich sei bemerkt, dass man in ähnlicher Weise mit Hilfe von Integralen auch die Taylor'sche Reihe, von der gewöhnlichen Form abweichend darstellen kann. Man überzeugt sich nämlich sehr leicht von der Richtigkeit der Gleichung:

$$f(x+h) =$$
$$\left(1+\frac{h}{x}\right)\left\{f(x)+\frac{h}{x}\int xf'(x)dx+\left(\frac{h}{x}\right)^2\frac{\int x^2f'''(x)dx}{1.2}+\left(\frac{h}{x}\right)^3\frac{\int x^3f^{\text{IV}}(x)dx}{1.2.3}+\ldots\right\}$$

durch welche $f(x+h)$ nach Potenzen des Verhältnisses des Zuwachses h zur Veränderlichen x fortschreitend entwickelt wird. Dass übrigens diese Entwickelung von der Taylor'schen, abgesehen von der Form, nicht wesentlich verschieden ist, braucht kaum bemerkt zu werden.

7.

Von den zahlreichen, zum Theil sehr bemerkenswerthen Formeln, welche auf eben so einfache Art wie die bisherigen aus der Taylor'schen Reihe abgeleitet werden können, möge noch die folgende angeführt werden.

Multiplicirt man die Gleichung:

$$f(x_0+x_0x)=f(x_0)+x_0f'(x_0).x+\frac{x_0^2f''(x_0)}{1.2}x^2+\frac{x_0^3f'''(x_0)}{1.2.3}x^3+..$$

mit x, x^2, x^3,... und differentiirt dann die daraus erhaltenen Gleichungen nach x, resp. 1, 2, 3,...mal, so ergibt sich, wenn man zur Abkürzung:

$$f(x_0+x_0x)=y$$

setzt, das folgende System von Gleichungen:

$$y=f(x_0)+x_0f'(x_0).\ x+\frac{x_0^2f''(x_0)}{1.2}.\ x^2+\frac{x_0^3f'''(x_0)}{1.2.3}.\ x^3+..$$

$$\frac{d.xy}{dx}=\qquad+\quad f(x_0).\frac{d.x}{dx}+x_0f'(x_0)\frac{d.x^2}{dx}+\frac{x_0^2f''(x_0)}{1.2}\frac{d.x^3}{dx}+..$$

$$\frac{d^2.x^2y}{dx^2}=\qquad\qquad+\quad f(x_0)\frac{d^2.x^2}{dx^2}+x_0f'(x_0)\frac{d^2.x^3}{dx^2}+..$$

$$\frac{d^3.x^3y}{dx^3}=\qquad\qquad\qquad+\quad f(x_0)\frac{d^3.x^3}{dx^3}+..$$

. . . .

Nun ist das allgemeine Glied der $m+1$. dieser Gleichungen, bei welcher nämlich linker Hand $\frac{d^m.x^my}{dx^m}$ steht, offenbar von der Form:

$$\frac{x_0^nf^{(n)}_{(x_0)}}{1.2..n}\frac{d^m.x^{m+n}}{dx^m}$$

da aber

$$x_0^n.\frac{d^m.x^{m+n}}{dx^m}=x^n.\frac{d^m.x_0^{m+n}}{dx_0^m}$$

so können die obigen Gleichungen so geschrieben werden, dass auf der rechten Seite nur Differentiationen nach x_0 genommen vorkommen.

Dies vorausgesetzt, multiplicire man jene Gleichungen der Reihe nach mit:

$$1\ ,\quad x\ ,\quad \frac{x^2}{1.2}\ ,\quad \frac{x^3}{1.2.3}\ ,\quad \frac{x^4}{1.2.3.4}\ \dots$$

sie gehen dann über in die folgenden:

$$y=f(x_0)+xf'(x_0).\ x_0+\frac{x^2}{1.2}.f''(x_0).\ x_0^2+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(x_0).x_0^3+..$$

$$x.\ \frac{d.xy}{dx}=\qquad +xf(x_0).\frac{d.x_0}{dx_0}+x^2.f'(x_0)\frac{d.x_0^2}{dx_0}+\frac{x^3}{1.2}f''(x_0)\frac{d.x_0^3}{dx_0}+..$$

$$\frac{x^2}{1.2}.\frac{d^2.x^2y}{dx^2}=\qquad +x^2.\frac{f(x_0)\frac{d^2.x_0^2}{dx_0}}{1.2}+x^3.\frac{f'(x_0).\frac{d^2.x_0^3}{dx_0^2}}{1.2}+..$$

$$\frac{x^3}{1.2.3}.\frac{d^3.x^3y}{dx^3}=\qquad .\qquad .\qquad +x^3.\frac{f(x_0)\ \frac{d^3.x_0^3}{dx_0^3}}{1.2.3}+..$$

. . . .

Addirt man nun alle diese Gleichungen und berücksichtigt, dass die mit gleichen Potenzen von x verbundenen Glieder nach der Formel:

$$f^{(n)}_{(x_0)}x_0^n+nf^{(n-1)}_{(x_0)}\frac{d.x_0^n}{dx_0}+\frac{n(n-1)}{1-2}f^{(n-2)}_{(x_0)}\frac{d^2.x_0^n}{dx_0^2}+\ldots+f(x_0)\frac{d^n.x_0^n}{dx_0^n}$$
$$=\frac{d^n[x_0^nf(x_0)]}{dx_0^n}$$

sich jedesmal in ein Glied vereinigen lassen, ersetzt man auch wieder y durch seinen Werth, so erhält man die folgende Umformung:

$$f((x_0+x_0x)+x.\frac{d[xf(x_0+x_0x)}{dx}+\frac{x^2}{1.2}.\frac{d^2[x^2f(x_0+x_0x)]}{dx^2}$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}.\frac{d^3[x^3f(x_0+x_0x)]}{dx^3}+..$$

$$=f(x_0)\qquad +x.\frac{d[x_0f(x_0)}{dx_0}+\frac{x^2}{1.2}.\frac{d^2[x_0^2f(x_0)]}{dx_0^2}$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}.\frac{d^3[x_0^3f(x_0)]}{dx_0^3}+..$$

Macht man beispielsweise die Annahme, es sei:

$$f(z)=z^a,$$

so erfolgt:

$$(1+x)^a + x.\frac{d[x(1+x)^a]}{dx} + \frac{x^2}{1.2}.\frac{d^2[x^2(1-x)_a]}{dx^2}$$
$$+ \frac{x_3}{1.2.3}.\frac{d^3[x^3(1+x)^a]}{dx^3} + \ldots\ldots$$

$$= 1+(a+1)x + \frac{(a+1)(a+2)}{1 \; . \; 2}x^2 + \frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{1 \; . \; 2 \; . \; 3}x^3 + ..$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{a+1}}$$

Für $a = -1$ ergibt sich:

$$\frac{1}{1+x} + x.\frac{d\left(\frac{x}{1+x}\right)}{dx} + \frac{x^2}{1.2}.\frac{d^2\left(\frac{x^2}{1+x}\right)}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}.\frac{d^3\left(\frac{x^3}{1+x}\right)}{dx^3} + \ldots = 1$$

u. s. f.

8.

Es ist nicht schwer, die meisten der bisher abgeleiteten Resultate auf den Fall auszudehnen, in welchem die Function f von zwei willkürlichen Veränderlichen x und y abhängt, und welcher also die Transformation der Doppelreihen betrifft.

In diesem Sinne werde ich zunächst die Euler'sche Formel verallgemeinern und dabei einen ganz ähnlichen Weg wie früher Art. 1 für eine einzige Veränderliche befolgen.

Wird der Kürze wegen:

$$u = f(x_0, y_0) \;, \quad U = f(x_0 + x, y_0 + y)$$

gesetzt, so hat man nach der Taylor'schen Reihe für zwei Veränderliche die Gleichung:

$$U = u + \left[x\frac{du}{dx_0} + y\frac{du}{dy_0}\right]$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left[x^2\frac{d^2u}{dx_0^2} + 2xy\frac{d^2u}{dx_0 dy_0} + y^2\frac{d^2u}{dy_0^2}\right] + \ldots\ldots$$

$$\frac{dU}{dx_0} = \frac{du}{dx_0} + \left[x\frac{d^2u}{dx_0^2} + y\frac{d^2u}{dx_0 dy_0}\right]$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left[x^2\frac{d^3u}{dx_0^3} + 2xy\frac{d^3u}{dx_0^2 dy_0} + y^2\frac{d^3u}{dx_0 dy_0^2}\right] + \ldots\ldots$$

$$\frac{dU}{dy_0} = \frac{du}{dy_0} + \left[x\frac{d^2u}{dx_0dy_0} + y\frac{d^2u}{dy_0^2}\right]$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left[x^2\frac{d^3u}{dx_0^2dy_0} + 2xy\frac{d^3u}{dx_0dy_0^2} + y^2\frac{d^3u}{dy_0^3}\right] + \ldots$$

$$\frac{d^2U}{dx_0^2} = \frac{d^2u}{dx_0^2} + \left[x\frac{d^3u}{dx_0^3} + y\frac{d^3u}{dx_0^2dy_0}\right]$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left[x^2\frac{d^4u}{dx_0^4} + 2xy\frac{d^4u}{dx_0^3dy_0} + y^2\frac{d^4u}{dx_0^2dy_0^2}\right] + \ldots$$

$$\frac{d^2U}{dx_0dy_0} = \frac{d^2u}{dx_0dy_0} + \left[x\frac{d^3u}{dx_0^2dy_0} + y\frac{d^3u}{dx_0dy_0^2}\right]$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left[x^2\frac{d^4u}{dx_0^3dy_0} + 2xy\frac{d^4u}{dx_0^2dy_0^2} + y^2\frac{d^4u}{dx_0dy_0^3}\right] + \ldots$$

$$\frac{d^2U}{dy_0^2} = \frac{d^2u}{dy_0^2} + \left[x\frac{d^3u}{dx_0dy_0^2} + y\frac{d^3u}{dy_0^3}\right]$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left[x^2\frac{d^4u}{dx_0^2dy_0^2} + 2xy\frac{d^4u}{dx_0dy_0^3} + y^2\frac{d^4u}{dy_0^4}\right] + \ldots$$

. . . .

In solcher Weise denke man sich die Differentialquotienten aller Ordnungen von U entwickelt, und wenn dies geschehen, die erhaltenen Gleichungen der Reihe nach mit:

$$A_0\,,\quad \Delta A_0 x\,,\quad \Delta A_0 y\,,\quad \frac{\Delta^2 A_0}{1.2}x^2\,,\quad \frac{\Delta^2 A_0}{1.2}.2xy\,,\quad \frac{\Delta^2 A_0}{1.2}.y^2,$$

$$\frac{\Delta^3 A_0}{1.2.3}x^3\,,\quad \frac{\Delta^3 A_0}{1.2.3}.3x^2y\,,\quad \frac{\Delta^3 A_0}{1.2.3}3xy^2\,,\quad \frac{\Delta^3 A_0}{1.2.3}y^3,\ \text{u. s. f.}$$

multiplicirt und dann insgesammt addirt. Werden hierauf die mit gleichen Potenzen von x und y und deren Producten verbundenen Glieder zusammengefasst, so überzeugt man sich leicht, dass auf jede dieser Verbindungen die Formel:

$$A_0 + n\Delta A_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 A_0 + \ldots + n\Delta^{n-1}A_0 + \Delta^n A_0 = A_n$$

anwendbar ist.

So ist die Summe der Glieder

$$\text{mit} \quad x\ldots = x\frac{du}{dx_0}\left[A_0 + \Delta A_0\right] = x\frac{du}{dx_0}\; A_1$$

$$\text{mit} \quad y\ldots = x\frac{du}{dy_0}\left[A_0 + \Delta A_0\right] = y\frac{du}{dy_0}\; A_1$$

$$\text{mit} \quad x^2\ldots = x^2\frac{d^2u}{dx_0^2}\left[\frac{A_0}{1.2} + \Delta A_0 + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2}\right] = \frac{x^2}{1.2}\,\frac{d^2u}{dx_0^2}\,.A_2$$

$$\text{mit}\ 2xy\ldots = 2xy\frac{d^2u}{dx_0dy_0}\left[\frac{A_0}{1.2} + \Delta A_0 + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2}\right] = xy\,.\,\frac{d^2u}{dx_0dy_0}\; A_2$$

$$\text{mit} \quad y^2\ldots = y^2\frac{d^2u}{dy_0^2}\left[\frac{A_0}{1.2} + \Delta A_0 + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2}\right] = \frac{y^2}{1.2}\,\frac{d^2u}{dy_0^2}\; A_2$$

u. s. w. Das sowohl in den angeführten Taylor'schen Entwickelungen als in der Formel für A_n obwaltende Gesetz des binomischen Satzes macht hier die weitere Ausführung entbehrlich, und man überzeugt sich unmittelbar, dass diese Betrachtung zu dem folgenden Resultate führt:

$$\begin{aligned}
&A_0 f(x_0+x,\, y_0+y)\\
&+\Delta A_0\left[x\,\frac{df(x_0+x,\, y_0+y)}{dx_0} + y\,\frac{df(x_0+x,\, y_0+y)}{dy_0}\right]\\
&+\frac{\Delta^2 A_0}{A.2}\left[x^2\frac{d^2f(x_0+x, y_0+y)}{dx_0^2} + 2xy\,\frac{d^2f(x_0+y, y_0+y)}{dx_0dy_0}\right.\\
&\qquad\qquad\left. + y^2\,\frac{d^2f(x_0+x, y_0+y)}{dy_0^2}\right]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&= A_0 f(x_0, y_0)\\
&+.A_1\left[x\,\frac{df(x_0, y_0)}{dx_0} + y\,\frac{df(x_0, y_0)}{dy_0}\right]\\
&+\frac{A^2}{A.2}\left[x^2\frac{d^2f(x_0, y_0)}{dx_0^2} + 2xy\,\frac{d^2f(x_0, y_0)}{dx_0dy_0} + y^2\,\frac{d^2f(x_0, y_0)}{dy_0^2}\right]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dies nun ist die verallgemeinerte Euler'sche Formel, von welcher oben die Rede war. Die sehr leichte Art zu ihr zu gelangen, zeigt nochmals, dass der im Art. 1 bezeichnete Weg am

kürzesten zu den ohnehin so nahe liegenden Resultaten führt, welche bis jetzt erhalten worden sind.

Auf demselben Wege lässt sich die Formel finden, welche die weitere Verallgemeinerung der Euler'schen für Functionen von drei Veränderlichen darstellt. Des Raumes wegen beschränke ich mich auf die Angabe des Resultates.

Bezeichnen x, y, z drei willkürliche Veränderliche und setzt man der Kürze wegen

$$u = f(x_0 . y_0 . z_0) \quad , \quad U = f(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z)$$

so findet die Gleichung statt:

$$\begin{aligned} & A_0 U \\ & + \Delta A_0 \left[x \frac{dU}{dx_0} + y \frac{dU}{dy_0} + z \frac{dU}{dz_0} \right] \\ & + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2} \left[x^2 \frac{d^2U}{dx_0^2} + y^2 \frac{d^2U}{dy_0^2} + z^2 \frac{d^2U}{dz_0^2} + 2xy \frac{d^2U}{dx_0 dz_0} + 2yz \frac{d^2U}{dy_0 dz_0} \right. \\ & \qquad \left. + 2zx \frac{d^2U}{dz_0 dx_0} \right] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & = A_0 u \\ & + A_1 \left[x \frac{du}{dx_0^2} + y \frac{du}{dy_0} + z \frac{du}{dz_0} \right] \\ & + \frac{A^2}{1.2} \left[x^2 \frac{d^2u}{dx_0^2} + y^2 \frac{d^2u}{dy_0^2} + z^2 \frac{d^2u}{dz_0} + 2xy \frac{d^2u}{dx_1 dy_0} + 2yz \frac{d^2u}{dy_0 dz_0} \right. \\ & \qquad \left. + 2zx \frac{d^2u}{dz_0 dx_0} \right] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Eben so leicht lassen sich die analogen Formeln für Functionen von 4, 5, 6,.. unabhängigen Veränderlichen aufstellen.

9.

Die Euler'sche Formel dient nicht blos zur Umgestaltung der Reihen, sondern gibt auch den Weg an, wie aus einer bekannten Reihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots . = f(x)$$

eine andere:

$$a_0A_0+a_1A_1x+a_2A_2x^2+a_3A_3x^3+\ldots.$$

durch die Differentialquotienten von $f(x)$ ausgedrückt, in manchen Fällen sogar summirt, resp. durch einen geschlossenen Ausdruck dargestellt werden kann. Einen in vieler Hinsicht ähnlichen Erfolg hat das Verfahren, welches Euler im 2. Bande der Instit. calc. integr. Cap. XI. Probl. 134 zur Summirung der hypergeometrischen Reihe angewendet hat, und welches im weitesten Sinne aufgefasst, aus einer bekannten Reihe:

$$a_0\varphi(x,0)+a_1\varphi(x,1)+a_2\varphi(x,2)+\ldots=\Phi(x)$$

eine andere:

$$a_0A_0+a_1A_1+a_2A_2+\ldots=s$$

durch bestimmte Integrale dargestellt, finden lehrt. Kennt man nämlich eine Function $f(x)$ von der Beschaffenheit, dass:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi(x,m)\,dz=A_m\ldots.(1)$$

so ergibt sich, wenn diese Gleichung mit a_m multiplicirt und wenn $0, 1, 2, 3, \ldots$ für m gesetzt wird:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\Big[a_0\varphi(x,0)+a_1\varphi(x,1)+a_2\varphi(x,2)+\ldots\Big]dx$$
$$=a_0A_0+a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+\ldots.=s$$

Dieses Verfahren, welches Euler, wie bemerkt, nur auf die hypergeometrische Reihe anwendete, welches aber später auch für andere Reihen vielfach benutzt wurde, ist sehr mannigfacher Anwendungen fähig, welche nicht selten auch zur Transformation von Reihen führen und in letzterer Hinsicht will ich hier zum Schlusse einige besondere Fälle anführen.

Es sei:

$$f(x)=x^n\ ,\quad \varphi(x,m)=\frac{(-a)^m}{1.2.3\ldots m}x^m\ ,\quad x_0=0\ ,\quad x_1=1$$

dabei n als positive ganze Zahl angesehen. Man erhält in diesem Falle:

$$s=\int_0^1 x^n\left[1-ax+\frac{a^2x^2}{1.2}-\frac{a^3x^3}{1.2.3}+\ldots\right]dx=\int_0^1 x^n e^{-ax}dx$$

folglich:

$$s=\frac{1}{n+1}-\frac{a}{n+2}+\frac{a^2}{1.2}\frac{1}{n+3}-\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n+4}+\ldots$$

und wenn man das Integral rechter Hand der theilweisen Integration unterwirft, auch:

$$s=\frac{n(n-1)(n-2)..2.1}{a^{n+1}}-\frac{e^{-a}}{a}\left[1+\frac{n}{a}+\frac{n(n-1)}{a^2}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)..2.1}{a^n}\right]$$

Da aber, wenn $1-x$ für x gesetzt wird:

$$s=e^{-a}\int_0^1(1-x)^n e^{ax}dx=e^{-a}\int_0^1(1-x)^n\left[1+\frac{ax}{1}+\frac{a^2x^2}{1.2}+\ldots\right]dx$$

folgt, so ergibt sich noch eine dritte Form der Entwickelung nämlich:

$$s=e^{-a}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{a}{(n+1)(n+2)}+\frac{a^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right]$$

und man erhält also die folgenden Relationen:

$$\frac{1}{n+1}-a\cdot\frac{1}{n+2}+\frac{a^2}{1.2}\cdot\frac{1}{n+3}-\frac{a^3}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n+4}+\frac{a^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{n+5}-..=$$

$$e^{-a}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{a}{(n+1)(n+2)}+\frac{a^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{a^3}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}+\ldots\ldots\right]=$$

$$\frac{n(n-1)\ldots2.1}{a^{n+1}}-\frac{e^{-a}}{a}\left[1+\frac{n}{a}+\frac{n(n-1)}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{a^3}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots2.1}{a^n}\right]$$

welche sich für $n=0, 1, 2, 3,\ldots$ leicht verificiren lassen.

Es sei ferner:

$$f(x)=x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad \varphi(x,m)=\frac{c^m}{1.2.3\,..m}\,x^m, \quad x_0=0, \quad x_1=1.$$

Dann ist:

$$s=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\left[1+cx+\frac{c^2x^2}{1.2}+\ldots\right]dx$$

$$=\int_0^1 e^{cx}\,.\,x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

folglich:

$$s=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\left[1+c.\frac{a}{a+b}+\frac{c^2}{1.2}\,\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}+\ldots\right]$$

Setzt man in dem Integral rechter Hand $1-x$ für x, so gibt es:

$$s=e^c\int_0^1 e^{-cx}x^{b-1}(1-x)^{a-1}\,dx$$

und man hat:

$$s=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\left[1-c.\frac{b}{a+b}+\frac{c^2}{1.2}\,\frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}-\ldots\right].\,e^c$$

Man kann aber den Ausdruck für s in zwei und mehrere Reihen zerlegen.

Durch theilweises Integriren ergibt sich nämlich:

$$s=\frac{b-1}{c}\int_0^1 e^{cx}\,x^{a-1}(1-x)^{b-2}\,dx-\frac{a-1}{c}\int_0^1 e^{cx}\,x^{a-2}(1-x)^{b-1}\,dx$$

oder, wenn man in dem ersten Integral $1-x$ für x setzt:

$$s=\frac{b-1}{c}\,e^c.\int_0^1 e^{-cx}x^{b-2}(1-x)^{a-1}dx-\frac{a-1}{c}\int_0^1 e^{cx}x^{a-2}(1-x)^{b-1}\,dx$$

folglich erscheint mit Rücksicht auf die Gleichungen:

$$(b-1)\Gamma(b-1)=\Gamma(b), \quad (a-1)\Gamma(a-1)=\Gamma(a)$$

die gedachte Zerlegung in folgender Form:

$$s=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b-1)}\cdot\frac{e^c}{c}\left[1-c.\frac{b-1}{a+b-1}+\frac{c^2}{1.2}\cdot\frac{(b-1)b}{(a+b-1)(a+b)}-..\right]$$

$$-\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b-1)}\cdot\frac{1}{c}\left[1+c\,\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{c^2}{1.2}\cdot\frac{(a-1)a}{(a+b-1)(a+b)}-..\right]$$

Durch Vergleichung der drei für s erhaltenen Reihen findet man:

$$1+c\frac{a}{a+b}+\frac{c^2}{1.2}\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$$
$$+\frac{c^3}{1.2.3}\frac{a(a+1)(a+2)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}+\ldots=$$

$$e^c\left[1-c\frac{b}{a+b}+\frac{c^2}{1.2}\frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}\right.$$
$$\left.-\frac{c^3}{1.2.3}\frac{b(b+1)(b+2)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)}+\ldots\right]=$$

$$\frac{a+b-1}{c}e^c\left[1-c\frac{b-1}{a+b-1}+\frac{c^2}{1.2}\frac{(b-1)b}{(a+b-1)(a+b)}\right.$$
$$\left.-\frac{c^3}{1.2.3}\frac{(b-1)b(b+1)}{(a+b-1)(a+b)(a+b+1)}+\ldots\right]$$

$$-\frac{a+b-1}{c}\cdot\left[1+c\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{c^2}{1.2}\frac{(a-1)a}{(a+b-1)(a+b)}\right.$$
$$\left.+\frac{c^3}{1.2.3}\frac{(a-1)a(a+1)}{(a+b-1)(a+b)(a+b+1)}+\ldots\right]$$

Die beiden ersten Glieder dieser Gleichung stellen ein schon im Art. 2 gefundenes Resultat dar. Dass diese Reihen eben so auch in 3, 4, 5, ... andere Reihen zerlegt werden können, braucht nicht näher gezeigt zu werden.

Um noch einen besonderen Fall zu betrachten, will ich annehmen, es sei:

$$f(x)=x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ ,\quad \varphi(x,m)=x^{2m}\ ,\quad x_0=0\ ,\quad x_1=1$$

wofür, wie leicht zu sehen, einmal:

$$s=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\left[1+x^2+x^4+\ldots\right]dx=\int^1\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-2}}{1+x}dx$$

und dann auch:

$$s=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}\left[1-x+x^2-\ldots\right]dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{b-2}(1-x)^{a-1}\left[1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots\right]dx$$

Aus jeder dieser Reihenentwickelungen lässt sich für s eine andere Form erhalten, und man gelangt durch sie zu den folgenden Gleichungen:

$$1-\frac{a}{a+b-1}+\frac{a(a+1)}{(a+b-1)(a+b)}-\frac{a(a+1)(a+2)}{(a+b-1)(a+b)(a+b+1)}+\dots=$$

$$\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\frac{b-1}{a+b-1}+\frac{1}{2^2}\frac{(b-1)b}{(a+b-1)(a+b)}+\frac{1}{2^3}\frac{(b-1)b(b+1)}{(a+b-1)(a+b)(a+b+1)}+\dots\right]=$$

$$\frac{b-1}{a+b-1}\left[1+\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)(a+b+3)}+\dots\right]$$

welche jedoch, wie aus der Herleitung folgt, nur giltig sind, wenn a positiv und b grösser als die Einheit ist.

10.

Die vorstehenden Resultate beziehen sich nur auf Potenzreihen und entspringen im Grunde unmittelbar aus der Reihe von Taylor, von welcher sie nur gewisse Combinationen sind. In einer folgenden Arbeit werde ich ähnliche Betrachtungen auf andere Reihenformen, insbesondere auf die nach trigonometrischen Functionen fortschreitenden Entwickelungen anwenden und daraus Hilfsmittel zur Transformation unendlicher Reihen herleiten.

Integration der linearen Partialgleichungen mit drei Veränderlichen.

Von Dr. Johann Frischauf.

Unter einer linearen Partialgleichung irgend einer Ordnung versteht man eine solche Gleichung zwischen den veränderlichen Grössen und den partiellen Differentialquotienten der abhängigen Variablen, in welcher die Differentialquotienten der höchsten Ordnung nur linear vorkommen. Die allgemeine Form einer solchen Differentialgleichung der $n$ten Ordnung ist:

$$M_0 z^{(n)} + M_1 z^{(n-1)}_{\prime} + M_2 z^{(n-2)}_{\prime\prime} + \ldots + M_{n-1} z'_{(n-1)} + M_n z_{(n)} = W \quad \text{(I)}$$

wo M_0, M_1, $M_2 \ldots M_{n-1}$, M_n und W im Allgemeinen Functionen von $x, y, z, z', z_{\prime}, z'', z'_{\prime}, z_{\prime\prime} \ldots z^{(n-1)}, \ldots z_{(n-1)}$ sind; dabei sind x, y die unabhängigen, z die abhängige Veränderliche. $z', z_{\prime} \ldots z^{(n)} \ldots z_{(n)}$ bedeuten partielle Differentialquotienten, also

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z', \; \frac{\partial z}{\partial y} = z_{\prime},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z'', \; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z'_{\prime}, \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{\prime\prime}$$

allgemein

$$\frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s} = z^{(r)}_{(s)}.$$

Dieses letztere kann analytisch dadurch ausgedrückt werden, indem man erklärt, dass jede der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} dz &= z'\,dx + z_{\prime}\,dy \\ dz' &= z''\,dx + z'_{\prime}\,dy \\ dz_{\prime} &= z'_{\prime}\,dx + z_{\prime\prime}\,dy \\ &\vdots \\ dz_{(n-2)} &= z'_{(n-2)}\,dx + z_{(n-1)}\,dy \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

$$\left.\begin{array}{lr} dz^{(n-1)} = z^{(n)} \, dx + z_{,}^{(n-1)} \, dy \ldots & (0) \\ dz_{,}^{(n-2)} = z_{,}^{(n-1)} \, dx + z_{,,}^{(n-2)} \, dy \ldots & (1) \\ dz_{,,}^{(n-3)} = z_{,,}^{(n-2)} \, dx + z_{,,,}^{(n-3)} \, dy \ldots & (2) \\ \vdots & \\ dz''_{(n-3)} = z'''_{(n-3)} \, dx + z''_{(n-2)} \, dy \ldots & (n-3) \\ dz'_{(n-2)} = z''_{(n-2)} \, dx + z'_{(n-1)} \, dy \ldots & (n-2) \\ dz_{(n-1)} = z'_{(n-1)} \, dx + z_{(n)} \, dy \ldots & (n-1) \end{array}\right\} \text{(III)}$$

integrabel sei durch eine Urgleichung.

Die Integration der Gleichung (I) besteht darin, dass man einen Werth von z durch x, y ausgedrückt findet, welcher die Gleichung (I) identisch erfüllt. Man sieht aber, dass diese Forderung gleichbedeutend ist mit folgender: Für z, z', $z_{,}, \ldots z^{(n)} \ldots z_{(n)}$ solche Functionen von x, y zu finden, welche in die Gleichung (I) gesetzt diese identisch erfüllen; anderseits aber die Eigenschaft besitzen, dass die für z angenommene Function von x, y nach x partiell differenzirt die für z' angenommene Function von x, y gibt, u. s. w. Diese letztere Bedingung wird analytisch ausgedrückt, indem man erklärt, die Gleichungen (II) und (III) sollen durch diese für z, z', $z_{,}, \ldots z^{(n)} \ldots z_{(n)}$ angenommenen Functionen von x, y, zu integrablen Gleichungen werden.

Um diese Functionen von x, y zu erhalten, bestimme man aus (I) etwa den Werth $z^{(n)}$, so wird durch diesen die Gleichung (I) identisch erfüllt. Setzt man diesen aus (I) erhaltenen Werth von $z^{(n)}$ in die Gleichung (0), so braucht man nur noch die Gleichungen (II) und (III) integrabel zu machen, da die Gleichung (I) bereits identisch erfüllt wurde. Bestimmt man nun aus dieser, durch die Substitution von $z^{(n)}$ in die Gleichung (0) erhaltenen, Gleichung den Werth $z_{,}^{(n-1)}$ und setzt diesen in die Gleichung (1), so wird dadurch die an die Stelle von (0) getretene Gleichung identisch erfüllt, und es brauchen daher nur die neue Gleichung (1) so wie die Gleichungen (II) und (2), (3)...(n—1) integrabel gemacht zu werden. Sucht man nun aus der an die Stelle von (1) getretenen Gleichung den Werth $z_{,,}^{(n-2)}$ und setzt diesen in (2), so wird durch obigen Werth von $z_{,,}^{(n-2)}$ die neue (1) identisch erfüllt; es brauchen daher nur mehr die neue Gleichung (2) so wie die Gleichungen (II) und (3), (4)...(n—1) integrabel gemacht zu werden. So fortfahrend erhält man schliesslich aus der Gleichung (n—1) eine neue Gleichung, die

wir vorläufig mit (IV) bezeichnen wollen, die nur $z_{(n)}$ enthält und integrabel gemacht werden soll durch eine Urgleichung, während die Gleichungen (I), (0), (1), (2)...(n—2) bereits identisch erfüllt werden, so dass ausser der erwähnten Gleichung (IV) nur mehr die Gleichungen (II) durch passende Wahl von z, z', $z_{,,}$... $z^{(n-1)}$...$z_{(n-1)}$ und $z_{(n)}$ integrabel zu machen sind.

Diese Gleichung (IV) erhält man aber am leichtesten auf folgende Art:

Die Gleichungen (III) können auch so geschrieben werden

$$z^{(n)}\,dx = dz^{(n-1)} - z_{,}^{(n-1)}dy \quad \dots\dots \quad (0')$$
$$z_{,}^{(n-1)}dx = dz_{,}^{n-2} - z_{,,}^{n-2}\,dy \quad \dots\dots \quad (1')$$
$$z_{,,}^{(n-2)}dx = dz_{,,}^{(n-3)} - z_{,,,}^{(n-3)}dy \quad \dots\dots \quad (2')$$
$$\vdots$$
$$z'''_{(n-3)}dx = dz''_{(n-3)} - z''_{(n-2)}dy \quad \dots\dots \quad (n-3')$$
$$z''_{(n-2)}dx = dz'_{(n-2)} - z'_{(n-1)}dy \quad \dots\dots \quad (n-2')$$
$$z'_{(n-1)}dx = dz_{(n-1)} - z_{(n)}\;dy \quad \dots\dots \quad (n-1')$$

Die Gleichung (n—1′) gibt unmittelbar $z'_{(n-1)}$. Multiplicirt man (n—2′) mit dx, (n—1′) mit $-dy$ und addirt, so erhält man

$$z''_{(n-2)}dx^2 = dz'_{(n-2)}dx - dz_{(n-1)}dy + z_{(n)}\,dy^2.$$

Multiplicirt man (n—3′), (n—2′), (n—1′) resp. mit

$$dx^2,\ -dx\,dy,\ +dy^2$$

und addirt man, so ist

$$z'''_{(n-3)}dx^3 = dz''_{(n-3)}dx^2 - dz'_{(n-2)}dx\,dy + dz_{(n-1)}dy^2 - z_{(n)}\,dy^3$$

u. s. w.

Multiplicirt man (1′), (2′), (3′)...(n—2′), (n—1′) resp. mit

$$dx^{n-2},\ -dx^{n-3}dy,\ +dx^{n-4}dy^2 \dots \mp .\,dx\,dy^{n-3},\ \pm\,dy^{n-2}$$

und addirt man, so wird

$$z_{,}^{(n-1)}\,dx^{n-1} = dz_{,}^{(n-2)}\,dx^{n-2} - dz_{,,}^{(n-3)}\,dx^{n-3}\,dy + dz_{,,,}^{(n-4)}\,dx^{n-4}\,dy^2$$
$$- \dots\dots\dots\dots$$
$$\mp\,dz'_{(n-2)}\,dx\,dy^{n-3} \pm dz_{(n-1)}\,dy^{n-2} \mp z_{(n)}\,dy^{n-1}.$$

Multiplicirt man (0'), (1'), (2') ... (n—2'), (n—1') resp. mit

$$dx^{n-1}, -dx^{n-2}dy, +dx^{n-3}dy^2, \ldots \pm dx\,dy^{n-2}, \mp dy^{n-1},$$

und addirt, so erhält man

$$z^{(n)}dx^n = dz^{(n-1)}dx^{n-1} - dz_{,}^{(n-2)}dx^{n-2}dy + dz_{,,}^{(n-3)}dx^{n-3}dy^2 - \ldots$$
$$\mp dz'_{(n-2)}dx\,dy^{n-2} \mp dz_{(n-1)}dy^{n-1} \pm z_{(n)}dy^n.$$

Substituirt man diese Werthe von $z'_{(n-1)}, z''_{(n-2)}, \ldots z_{,}^{(n-1)}, z^{(n)}$ in die Gleichung (1), so erhält man obige erwähnte Gleichung (IV)

$$\left.\begin{array}{l} -Wdx^n + M_0dz^{(n-1)}dx^{n-1} - [M_0dy - M_1dx]\,dz_{,}^{(n-2)}dx^{n-2} \\ \quad + [M_0dy^2 - M_1dx\,dy + M_2dx^2]\,dz_{,,}^{(n-3)}dx^{n-3} \\ \quad - [M_0dy^3 - M_1dx\,dy^2 + M_2dx^2dy - M_3dx^3]\,dz_{,,,}^{(n-4)}dx^{n-4} \\ \quad + \ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ \quad \mp [M_0dy^{n-1} - M_1dx\,dy^{n-2} + \ldots \mp M_{n-1}dx^{n-1}]\,dz_{(n-1)} \\ \quad \pm [M_0dy^n - M_1dx\,dy^{n-1} + \ldots \pm M_ndx^n]\,z_{(n)} = 0. \end{array}\right\} \text{(IV)}$$

Wird nun diese Gleichung integrabel gemacht durch eine einzige Urgleichung, so werden die Gleichungen (I), (0), (1), (n—2) identisch erfüllt, und die Gleichung (n—1), deren Stelle die (IV) vertritt, integrabel durch eine einzige Urgleichung.

Man setze nun

$$\left.\begin{array}{l} M_0dy^n - M_1dx\,dy^{n-1} + \ldots \pm M_ndx^n = 0 \\ \text{und} \\ -Wdx^n + M_0dz^{(n-1)}dx^{n-1} - [M_0dy - M_1dx]\,dz_{,}^{(n-2)}dx^{n-2} \\ + [M_0dy^2 - M_1dx\,dy + M_2dx^2]\,dz_{,,}^{(n-3)}dx^{n-3} \\ - [M_0dy^3 - M_1dx\,dy^2 + M_2dx^2dy - M_3dx^3]\,dz_{,,,}^{(n-4)}dx^{n-4} \\ + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mp [M_0dy^{n-1} - M_1dx\,dy^{n-2} + \ldots \mp M_{n-1}dx^{n-1}]\,dz_{(n-1)} = 0. \end{array}\right\} \text{(V)}$$

Aus der ersten der beiden Gleichungen (V) erhält man

$$dy = u\,dx, \tag{VI}$$

wo u eine Wurzel der Gleichung

$$M_0u^n - M_1u^{n-1} + M_2u^{n-2} - \ldots \mp M_{n-1}u \pm M_n = 0$$

bedeutet.

Die zweite Gleichung in (V) geht durch die Substitution von

$$dy = u\,dx$$

über in

$$\left.\begin{aligned}
-Wdx + M_0 dz^{(n-1)} - [M_0 u - M_1]\, dz_{,}^{(n-2)} \\
+ [M_0 u^2 - M_1 u + M_2]\, dz_{,,}^{(n-3)} \\
- [M_0 u^3 - M_1 u^2 + M_2 u - M_3]\, dz_{,,,}^{(n-4)} \\
+ \ldots\ldots \\
\ldots\ldots \\
\mp [M_0 u^{n-1} - M_1 u^{n-2} + M_2 u^{n-3} - \ldots \mp M_{n-1}]\, dz_{(n-1)} = 0.
\end{aligned}\right\}\text{(VII)}$$

Man suche nun die Gleichungen (VI) und (VII) (etwa mit Beihilfe der Gleichungen (II)) gleichzeitig zu integriren.

Es seien

$$M = a \text{ und } N = b$$

die Integrale derselben, wo M und N im Allgemeinen Functionen von

$$x, y, z, z', z_{,,} \ldots z^{(n-1)}, \ldots z_{(n-1)}$$

sein werden, a und b sind die Integrationsconstanten.

Nun betrachte man a und b als neue Variable und führe selbe statt der Grössen x, y ein.

Aus den Gleichungen

$$M = a,\ N = b$$

folgt

$$\begin{aligned}
x &= \xi\ a, b, z, z', z_{,} \ldots z^{(n-1)} \ldots z_{(n-1)} \\
y &= \eta\ a, b, z, z', z_{,,} \ldots z^{(n-1)} \ldots z_{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Werden diese Werthe von x und y in die Gleichung (IV) gesetzt, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$A_n da^n + A_{n-1} da^{n-1} db + A_{n-2} da^{n-2} db^2 + \ldots + A_0 db^n$$
$$+ \{\text{Glieder mit den Differentialien von } z, z', z_{,} \ldots z_{(n-1)}\} = 0\ (\odot).$$

Für constante Werthe von a und b wird die Gleichung (IV) identisch erfüllt, daher auch die Gleichung $(\odot)$, welche eigentlich dieselbe Gleichung ist; setzt man in $(\odot)$ a und b constant, so müssen die Glieder mit den Differentialien von

$$z, z', z_{,} \ldots z^{(n-1)} \ldots z_{(n-1)}$$

von selbst verschwinden. Es folgt daher, dass die Glieder mit den erwähnten Differentialien identisch gleich 0 sein müssen.

Durch Einführung der obigen Werthe von x und y geht daher die Gleichung (IV) über in

$$A_n da^n + A_{n-1} da^{n-1} db + A_{n-2} da^{n-2} db^2 + \ldots . + A_0 db^n = 0$$

oder aufgelöst in

$$A da + B db = 0. \tag{VIII}$$

Die Gleichung (VIII) tritt gewissermassen an die Stelle der Gleichung (IV); nun soll aber diese integrabel sein durch eine einzige Urgleichung, es muss daher auch die Gleichung (VIII) integrabel sein durch eine einzige Urgleichung.

Die Coëfficienten

$$A \text{ und } B$$

müssen daher von

$$z, z', z_{\prime}, \ldots . z^{(n-1)} \ldots . z_{(n-1)}$$

entweder ganz unabhängig sein, oder dürfen diese Grössen nur in einem gemeinschaftlichen Factor enthalten. Ist J der integrirende Factor von (VIII), so muss

$$JAda + JBdb = 0$$

ein vollständiges Differential etwa von

$$\psi(a, b) = 0$$

sein, so dass man identisch hat

$$JA = \frac{\partial\psi}{\partial a}, \qquad JB = \frac{\partial\psi}{\partial b}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{\frac{\partial\psi}{\partial a}}{\frac{\partial\psi}{\partial b}} = \frac{A}{B}. \tag{IX}$$

Die Coëfficienten A_n, $A_{n-1}, \ldots A_0$ haben im Allgemeinen die Form

$$\mathfrak{A} + z_{(n)}\mathfrak{B}$$

daraus folgt, dass die Grösse $z_{(n)}$ auch in A und B enthalten ist. Da $z_{(n)}$ unbestimmt bleibt, so kann man diese Grösse willkürlich annehmen. Man kann im Allgemeinen für $z_{(n)}$ eine Function von

$$x, y, z, z', z_{,}, \ldots z^{(n-1)} \ldots z_{(n-1)}$$

setzen; aber die Willkürlichkeit von $z_{(n)}$ ist insoferne beschränkt als man dieser Grösse nur Werthe beilegen darf, welche die Gleichung (VIII) integrabel machen. Für jeden beliebigen Werth von $z_{(n)}$ wird dieses nicht der Fall sein, aber alle Werthe von $z_{(n)}$, welche die Gleichung (VIII) integrabel machen, wird man erhalten, indem man in (IX) die Form der Function ψ willkürlich annimmt; denn jede Annahme der Form von ψ liefert aus (IX) einen Werth von $z_{(n)}$, welcher die Gleichung (VIII) unmittelbar integrabel macht.

Es ist daher

$$\psi(a, b) = 0$$

wo ψ eine willkürliche Function bedeutet, das Integral von (VIII), mithin auch von (IV).

Löst man die Gleichung

$$\psi(a, b) = 0$$

nach b auf, so erhält man

$$b = \varphi(a)$$

wo φ wieder eine willkürliche Function bedeutet.

Setzt man statt a und b deren Werthe, so erhält man

$$N = \varphi(M) \tag{X}$$

als ein erstes Integral von (I).

Dieses erste Integral wird im Allgemeinen eine Partialgleichung von der Ordnung $n-1$ sein. Da man im Allgemeinen n verschiedene Werthe von u erhält, so besitzt jede lineare Partialgleichung der n^{ten} Ordnung im Allgemeinen n erste Integrale.

Beispiel. Es sei M_0, M_1, M_2, .. M_n constant und W eine Function von x, y.

Aus der Gleichung

$$M_0 u^n - M_1 u^{n-} + M_2 u^{n-2} + \ldots \pm M_n =$$

folgt $u =$ constans.

Aus den Gleichungen (VI) und (VII)

$$dy = u dx$$

$$\begin{aligned}-Wdx + M_0 dz^{(n-1)} &- [M_0 u - M_1]\, dz_{\prime}^{(n-2)} \\ &+ [M_0 u^2 - M_1 u + M_2]\, dz_{\prime\prime}^{(n-3)} \\ &- [M_0 u^3 - M_1 u^2 + M_2 u - M_3]\, dz_{\prime\prime\prime}^{(n-4)} \\ &+ \,.\; . \\ &\mp [M_0 u^{n-1} - M_1 u^{n-2} + \ldots \mp M_{n-1}]\, dz_{(n-1)} = 0\end{aligned}$$

folgt

$$y = ux + a.$$

Wird dieser Werth von y in W substituirt, so verwandelt sich diese Grösse in eine Function von x allein, und man erhält

$$\begin{aligned}-\int Wdx + M_0 z^{(n-1)} &- [M_0 u - M_1]\, z_{\prime}^{(n-2)} \\ &+ [M_0 u^2 - M_1 u + M_2]\, z_{\prime\prime}^{(n-3)} \\ &- [M_0 u^3 - M_1 u^2 + M_2 u - M_3]\, z_{\prime\prime\prime}^{(n-4)} \\ &+ \,.\; .\; . \\ &\mp [M_0 u^{n-1} - M_1 u^{n-2} + \ldots \mp M_{n-1}]\, z_{(n-1)} = b\end{aligned}$$

wobei in Wdx statt y die Grösse $ux + a$ gesetzt wurde.

$$b = \varphi(a)$$

wo φ willkürlich ist, ist ein erstes Integral unseres Beispiels.

Setzt man statt b und a deren Werthe, so erhält man als Integral

$$\begin{aligned}M_0 z^{(n-1)} - [M_0 u - M_1]\, z_{\prime}^{(n-2)} &+ [M_0 u^2 - M_1 u + M_2]\, z_{\prime\prime}^{(n-3)} \\ &- [M_0 u^3 - M_1 u^2 + M_2 u - M_3]\, z_{\prime\prime\prime}^{(n-4)} \\ &+ \,.\; . \\ &\mp [M_0 u^{n-1} - M_1 u^{n-2} + M_2 u^{n-3} - \,.\, \mp M_{n-1}]\, z_{(n-1)} \\ &= \int\limits_{a=y-ux} Wdx + \varphi(y - ux).\end{aligned}$$

Dabei wird

$$\int\limits_{a=y-ux} Wdx$$

erhalten, indem man in W zuerst

$$y = ux + a$$

setzt, nach allem x die Differentialgrösse

$$Wdx$$

integrirt und zuletzt wieder die Grösse a durch

$$y-ux$$

ersetzt.

Setzt man der Kürze halber

$$\begin{aligned}
N_0 &= M_0 \\
N_1 &= -[M_0 u - M_1] \\
N_2 &= [M_0 u^2 - M_1 u + M_2] \\
N_3 &= -[M_0 u^3 - M_1 u^2 + M_2 u - M_3] \\
&\vdots \\
N_{n-2} &= \pm [M_0 u^{n-2} - M_1 u^{n-3} + M_2 u^{n-4} - \dots \pm M_{n-2}] \\
N_{n-1} &= \mp [M_0 u^{n-1} - M_1 u^{n-2} + M_2 u^{n-3} - \dots \mp M_{n-1}] \\
&\int\limits_{a=y-ux} W dx + \varphi(y-ux) = X,
\end{aligned}$$

so geht das Integral über in

$$N_0 z^{(n-1)} + N_1 z_{,}^{(n-2)} + N_2 z_{,,}^{(n-3)} - \dots + N_{n-1} z_{(n-1)} = X$$

wo X wieder nur von x, y abhängt.

$$N_0, N_1, N_2 \dots N_{n-1}$$

sind constante Coëfficienten.

Ein erstes Integral dieser Gleichung wird sein

$$\begin{aligned}
N_0 z^{(n-2)} &- [N_0 v - N_1] z_{,}^{(n-3)} + [N_0 v^2 - N_1 v + N_2] z_{,,}^{(n-4)} \\
&- [N_0 v^3 - N_1 v^2 + N_2 v - N_3] z_{,,,}^{(n-5)} \\
&+ \dots \\
&\pm [N_0 v^{n-2} - N_1 v^{n-3} + N_2 v^{n-4} - \dots \pm N_{n-2}] z_{(n-2)} \\
&= \int\limits_{a_1=y-vx} X dx + \chi(y-vx)
\end{aligned}$$

wo v eine Wurzel der Gleichung

$$N_0 v^{n-1} - N_1 v^{n-2} + N_2 v^{n-3} - \dots \mp N_{n-1} = 0$$

ist; χ bedeutet eine willkürliche Function.

$$\int\limits_{a_1=y-vx} X dx$$

wird gefunden, indem man in X zuerst

$$y = vx + a_1$$

setzt, dann nach allem x integrirt, und hierauf wieder statt a_1 seinen Werth

$$y - vx$$

setzt.

Nun ist aber

$$X = \int\limits_{a=y-ux} W dx + \varphi(y - ux),$$

setzt man

$$\int\limits_{a=y-ux} W dx = f(x, y).$$

so wird

$$\int X dx = \int f(x, vx + a_1) dx + \int \varphi([v - u]x + a_1) dx.$$

Setzt man

$$\xi = (v - u) x + a_1$$
$$d\xi = (v - u) dx,$$

so wird

$$\int \varphi([v - u] x + a_1) dx = \frac{1}{v - u} \int \varphi(\xi) d\xi = \psi(\xi),$$

wo ψ eine willkürliche Function bedeutet.

Es ist daher

$$\int X dx = \int (x, vx + a_1) dx + \psi([v - u] x + a_1)$$

und

$$\int\limits_{a_1=y-vx} X dx = \int\limits_{a_1=y-vx} \Big(\int\limits_{a=y-ux} W dx\Big) dx + \psi(y - ux),$$

wobei das Integral

$$\int\limits_{a_1=y-vx} \Big(\int\limits_{a=y-ux} W dx\Big) dx$$

erhalten wird, indem man in

$$\int\limits_{a=y-ux} W dx$$

statt y zuerst

$$vx + a_1$$

setzt, dann nach allem x integrirt und hierauf wieder statt a_1 seinen Werth

$$y - vx$$

setzt.

Man erhält daher als zweites Integral

$$\begin{aligned}
N_0 z^{(n-2)} - [N_0 v - N_1] z_{,}^{(n-3)} + [N_0 v^2 - N_1 v + N_2] z_{,,}^{(n-4)} \\
- [N_0 v^3 - N_1 v^2 + N_2 v - N_3] z_{,,,}^{(n-5)} \\
+ \dots \\
\pm [N_0 v^{n-2} - N_1 v^{n-3} + N_2 v^{n-4} - \dots \pm N_{n-2}] z_{(n-2)} = \\
\psi(y-ux) + \chi(y-vx) + \int_{\alpha_1 = y - vx} \left(\int W dx\right)_{\alpha = y - ux} dx
\end{aligned}$$

wo ψ und χ willkürliche Functionen bedeuten.

Die Gleichungen zur Bestimmung von u und v waren folgende:

$$M_0 u^n - M_1 u^{n-1} + M_2 u^{n-2} - \dots \pm M_n = 0 \quad (\alpha)$$
$$N_0 v^{n-1} - N_1 v^{n-2} + N_2 v^{n-3} - \dots \mp N_{n-1} = 0 \quad (\beta)$$

dabei ist

$$\begin{aligned}
N_0 &= M_0 \\
N_1 &= -[M_0 u - M_1] \\
N_2 &= [M_0 u^2 - M_1 u + M_2] \\
&\vdots \\
N_{r-1} &= \pm [M_0 u^{r-1} - M_1 u^{r-2} + \dots \pm M_{r-1}] \\
N_r &= \mp [M_0 u^r - M_1 u^{r-1} + \dots \mp M_r] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sind nun

$$u_1, u_2, u_3 \dots u_n$$

die Wurzeln der Gleichung (α), und berechnet man die Coëfficienten

$$N_0, N_1, N_2, \dots N_{n-1}$$

mit dem Werthe

$$u = u_1,$$

so ist aus der Lehre der höheren Gleichungen bekannt, dass dann

$$u_2, u_3, u_4 \dots u_n$$

die Wurzeln der Gleichung (β) sind; denn sondert man aus der Gleichung (α) die Wurzel u_1 ab, so erhält man zur Bestimmung der Coëfficienten der neuen Gleichung die Zahlen

$$N_0, N_1, N_2, \dots N_{n-1}.$$

Setzt man diese Schlüsse fort, so findet man für unser Beispiel folgendes Urintegral:

$$M_0 z = \varphi_1(y - u_1 x) + \varphi_2(y - u_2 x) + \ldots + \varphi_n(y - u_n x) + W \quad (m)$$

wo

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots u_n$$

die n Wurzeln der Gleichung

$$M_0 u^n - M_1 u^{n-1} + M_2 u^{n-2} - \ldots \pm M_n = 0$$

sind. W ist das n^{te} Integral von

$$W dx^n,$$

indem man in W zuerst

$$y = u_1 x + a_1$$

setzt, dann nach allem x integrirt und zuletzt wieder die Grösse a_1 durch

$$y - u_1 x$$

ersetzt. Hierauf setze man in dem erhaltenen Integrale

$$y = u_2 x + a_2$$

integrire wieder nach allem x, und ersetze nach der Integration a_2 durch

$$y - u_2 x.$$

So fortfahrend erhält man die Grösse

$$W$$

nach n-maliger Integration.

Nun ist W eine symmetrische Function der Wurzeln

$$u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots u_n.$$

Da sich jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung aus den Coëfficienten derselben bestimmen lässt, ohne dass man die Wurzelwerthe selbst zu kennen braucht; so folgt, dass die Grösse W ohne Auflösung der Gleichung

$$M_0 u^n - M_1 u^{n-1} + M_2 u^{n-2} - \ldots \pm M_n = 0$$

aus den Coëfficienten M_0, M_1, $M_2 \ldots M_n$ erhalten werden kann. Ferner bleibt auch W ungeändert, wenn man zwei Wurzeln mit ein-

ander vertauscht. Es existirt daher für unser Beispiel nur Ein Urintegral mit n willkürlichen Functionen.

Setzt man

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0$$

so erhält man

$$M_0 z = W$$

als besondere Auflösung der vorliegenden Differentialgleichung, d. h. es ist

$$M_0 W^{(n)} + M_1 W_{,}^{(n-1)} + M_2 W_{,,}^{(n-2)} + \ldots + M_n W_{(n)} = M_0 W.$$

Die Gleichung (m) hört auf das allgemeine Integral unseres Beispiels zu sein, wenn zwei oder mehrere Wurzeln der Gleichung (α) einander gleich werden.

Ist

$$u_1 = u_2,$$

so genügt der Differentialgleichung auch

$$M_0 z = x\varphi(y - u_1 x) + W$$

und

$$M_0 z = y\varphi(y - u_1 x) + W$$

wie man durch directe Substitution dieser Werthe in die vorliegende Differentialgleichung findet, wenn man berücksichtigt, dass für $u_1 = u_2$ folgende Gleichungen erfüllt werden:

$$M_0 u_1^n - M_1 u_1^{n-1} + M_2 u_1^{n-2} - \ldots \pm M_n = 0$$
$$nM_0 u_1^{n-1} - (n-1)M_1 u_1^{n-2} + (n-2)M_2 u_1^{n-3} - \ldots \mp M_{n-1} = 0$$
$$-M_1 u_1^{n-1} + 2M_2 u_1^{n-2} - 3M_3 u_1^{n-3} - \ldots \pm nM_n = 0.$$

Man findet daher als allgemeines Integral unserer Differentialgleichung

$$M_0 z = (Ax + By)\varphi_1(y - u_1 x) + \varphi_2(y - u_1 x) + \varphi_3(y - u_3 x)$$
$$+ \ldots + \varphi_n(y - u_n x) + W,$$

wo A und B willkürliche Constante sind.

Wird

$$u_1 = u_2 = u_3,$$

so erhält man auf ähnliche Art als allgemeines Integral

$$M_0 z = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)\varphi_1(y-u_1x) + (Dx+Ey)\varphi_2(y-u_1x) + \varphi_3(y-u_1x) + \ldots + \varphi_n(y-u_nx) + \mathrm{W},$$

wo wieder A, B, C, D, E willkürliche Constante sind.

Man sieht aus dem Vorhergehenden leicht, welche Form das allgemeine Integral annimmt, wenn allgemein r Wurzeln einander gleich werden.

Ist

$$W = 0,$$

so erhält man wegen

$$\mathrm{W} = 0$$

das bekannte Integral für homogene Partialgleichungen mit constanten Coëfficienten.

Über den Auftrieb in Flüssigkeiten, welche specifisch schwerere oder leichtere Körperchen suspendirt enthalten.

Von Camille Bondy.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. März 1865.)

Vorliegende Arbeit unternahm ich auf Vorschlag und unter Leitung meines Lehrers Prof. **Mach**, zunächst blos zu meiner Übung. Da sich jedoch bei der Untersuchung manches vielleicht auch für Andere Brauchbare ergeben hat, entschloss ich mich, die Resultate zu publiciren.

Ich versuchte auf experimentellem und theoretischem Wege die Beantwortung der Frage: **Welchen Einfluss haben specifisch schwerere oder leichtere in einer Flüssigkeit suspendirte Körperchen auf den Auftrieb in derselben?**

Es scheint mir, dass dieser Gegenstand bisher nicht genügend behandelt worden, obgleich sich demselben bei näherer Betrachtung sehr interessante Seiten abgewinnen lassen. Meines Wissens hat diese Frage, wenn auch nicht genau in derselben Form, zuerst **Brücke** bei Gelegenheit der Untersuchung des specifischen Gewichtes der Milch angeregt.

Brücke [1]) sagt in seinem Aufsatze:

Es fragt sich nun, ob die Unterschiede, welche sich in den Angaben des Tausendgranfläschchens und des Aräometers nothwendig zeigen müssen, gross genug sind, um mit Sicherheit wahrgenommen zu werden; ist dies der Fall, so würde man auch aus ihnen einen Schluss auf die Menge des Rahms machen können, den die Milch absetzen wird; denn wenn man die Angabe des Tausendgranfläschchens mit a, die des Aräometers mit b, und eine Constante für das mittlere specifische Gewicht des Rahms mit c be-

---

[1]) **Müller's** Archiv. 1847. S. 409.

zeichnet, wenn man ferner die absoluten Gewichte des Serums und des Rahms mit p und p_1 bezeichnet, so hat man:

$$\frac{p_1}{p} = \frac{c(b-a)}{b(a-c)}.$$

Aus dieser Formel Brücke's ersieht man, dass Brücke annimmt, die suspendirten Körperchen wirkten gar nicht auf das Aräometer; denn sie ist, was übrigens nirgends ausdrücklich gesagt wird, offenbar unter der Annahme abgeleitet, dass die Aräometerangabe b dem specifischen Gewichte des Serums entspreche. Wir erhalten nämlich unter dieser Voraussetzung für das mittlere specifische Gewicht a nach dem Pyknometer die unmittelbar verständliche Formel:

$$a = \frac{p+p_1}{\frac{p}{b}+\frac{p_1}{c}}$$

aus welcher sofort der obige Ausdruck für $\frac{p_1}{p}$ folgt.

Es scheint mir nun diese Annahme Brücke's einer besonderen Prüfung werth. Doch dürfte zu diesem Ende ein anderes Experimentirmaterial als das von Brücke verwendete zweckmässiger sein. Nachdem Brücke aus zehn Versuchen die Grenzen der Differenzen in den Angaben des Pyknometers und eines feinen Aräometers auf +0·00010 und —0·00014 und die mittlere Differenz auf —0·000018 bestimmt hat (durch Abziehen der Aräometer — von der Pyknometerangabe), schreitet er zu den Versuchen mit einer Emulsion von Mohnöl und arabischem Gummi und mit Milch. Das Aräometer zeigte bei zwei Emulsionen und bei zwei Milchsorten constant ein grösseres specifisches Gewicht als das Pyknometer selbst für die unterste Schichte der Flüssigkeit. Die grössten Differenzen sind bei den Emulsionen 0·00356, 0·00370, bei der Milch 0·00058, 0·00017. Diese Differenzen überschreiten allerdings die Grenzen der Beobachtungsfehler.

Ich selbst habe Bestimmungen an ganz frischer Milch versucht mit dem Pyknometer, mit dem Glastropfen an der hydrostatischen Wage und mit einem guten Scalenaräometer, an welchem die Hunderttheile des specifischen Gewichtes abgelesen, die Tausendtheile aber noch sehr gut geschätzt werden konnten.

Die Ergebnisse waren folgende:

I. Versuch.

Aräometer . . . . 1·0300
Glastropfen . . . . 1·0306
Pyknometer . . . . 1·0296

Bei diesem ersten Versuche wurde aus Versehen die noch warme Milch in das Pyknometer gefüllt, in den spätern Versuchen aber immer auf die Temperatur des gewogenen Wassers abgekühlt. (15° C.)

II. Versuch.

Aräometer . . . . 1·0300
Pyknometer . . . . 1·0306

III. Versuch.

Aräometer . . . . 1·0300
Pyknometer . . . . 1·0306

Es drängte sich mir bei diesen Bestimmungen die Überzeugung auf, dass bei der Milch die etwa vorkommenden Differenzen doch zu klein seien, um darauf sichere Schlüsse zu bauen. Ich machte mich also zunächst an die experimentelle Beantwortung der Frage: Haben überhaupt suspendirte Körperchen einen Einfluss auf die Aräometerangabe?

Gepulverter Gyps wurde in Wasser aufgerührt, und diese Flüssigkeit wurde mit dem Aräometer untersucht.

I. Versuch.

Specifisches Gewicht der frisch aufgerührten Flüssigkeit . 1·030
der halb geklärten . . . . 1·020
der ganz klaren . . . . 1·003

II. Versuch.

mit derselben Flüssigkeit am folgenden Tage angestellt:

aufgerührt . . . . 1·030
halb geklärt . . . . 1·020
ganz geklärt . . . . 1·003

Hieraus ist zu ersehen, dass die suspendirten Gypstheilchen einen sehr bedeutenden Einfluss auf die Aräometerangabe äussern, indem die entstehende Gypslösung blos ein Gewicht von 1·003 zeigt.

Ein weiterer Versuch war folgender. Eine Lösung von essigsaurem Blei vom specifischen Gewichte 1·195 wurde mit verdünnter Schwefelsäure vom specifischen Gewichte 1·225 zu gleichen Theilen rasch zusammengerührt.

Verhielt sich das sofort ausgeschiedene, aber noch suspendirte schwefelsaure Blei bezüglich seiner Wirkung auf das Aräometer wie gelöst, so musste die Mischung ein Gewicht von 1·205 zeigen. Das Aräometer gab 1·214, welche Differenz entschieden der Contraction zugeschrieben werden kann. Die geklärte Flüssigkeit zeigte 1·122, die wieder aufgerührte 1·214. Dieser Versuch kann bereits als ein quantitativer angesehen werden. Es geht aus demselben mit höchster Wahrscheinlichkeit hervor, dass das feinvertheilte Blei wie gelöstes Blei auf das Aräometer wirkt.

In 83 Grm. Wasser wurden 5 Grm. schwefelsauren Bleies vom specifischen Gewicht 6·2 zerrührt. Das Gewicht war:

nach der Rechnung . . . . 1·050
nach der Beobachtung . . . . . . 1·050

Wurden noch 83 Grm. Wasser zugesetzt, so war

das berechnete Gewicht . . 1·031
das beobachtete Gewicht . . 1·030

Soweit also meine Beobachtung reicht, wirken fein vertheilte suspendirte Körper auf das Aräometer selbst quantitativ gerade so wie gelöste.

Unmittelbar klar ist, dass diese Wirkung von dem Grade der Vertheilung nicht unabhängig sein kann. Eine Bleikugel einfach in eine Flüssigkeit geworfen, kann nicht so wirken, wie fein vertheiltes Blei. Die Frage stellt sich also jetzt so: Wie hängt die Wirkung der Körper auf das Aräometer von der Feinheit der Vertheilung ab? Die Frage in dieser Fassung experimentell zu beantworten ist mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden. Es ist allerdings leicht in eine Mischung von Alkohol und Wasser eine bedeutende Anzahl von Öltropfen bestimmter Grösse zu bringen. Man lässt einfach Ölstrahlen von bestimmter Dicke einfliessen, welche nach

dem Plateau'schen Gesetz [1]) in Tropfen von bestimmter Grösse zerfallen. Allein wenn die Alkoholmischung und das Öl von nahezu gleichem specifischem Gewicht sind, so ergeben sich für das Aräometer sehr geringe Differenzen. In jedem andern Falle aber sinken etwas grössere Tropfen rasch zu Boden oder steigen rasch auf. Auch ist es schwer, bei der Manipulation mit der Flüssigkeit die Tropfen nicht zu zerstören. Ich muss demnach die Absicht, den Einfluss der Vertheilung experimentell zu untersuchen, vorläufig aufgeben. Vielleicht würde man brauchbarere Experimentirflüssigkeiten erzielen, wenn man Strahlen von geschmolzenem Kolophonium in kaltes Wasser eintreiben würde.

Um die angefangenen Versuche nicht ganz unbenützt zu lassen, wurden einige Emulsionen von Alkohol und Öl mit Hilfe einer kleinen Spritze hergestellt und untersucht.

I. Versuch.

Eine Emulsion aus 3 Volumtheilen Alkohol vom spec. Gewicht 0·805 und 1 Volum Öl vom Gewicht 0·875.

Berechnetes Gewicht der Emulsion	0·820
beobachtetes „ „ „	0·820

II. Versuch.

1 Volum Alkohol vom spec. Gewicht 0·805 und 1 Vol. Öl vom Gewicht 0·875

berechnet	0·840
beobachtet	0·840

III. Versuch.

1 Vol. Alkohol und 2 Vol. Öl. Spec. Gewichte wie oben.

berechnet	0·851
beobachtet	0·850

[1]) Plateau, sur les liquides sans pesanteur. Mémoires de l'Académie de Bruxelles. T. 33. — Mach, Compend. d. Physik. S. 82.

Die Flüssigkeit im Versuche III war sehr zähe und die Aräometerbestimmung daher weniger sicher. Die Versuche bestätigen vollständig meine frühere Ansicht. Zu bemerken ist, dass die Aräometerangaben selbst dann noch mit der Rechnung stimmten, wenn die überwiegende Anzahl der Tropfen mit freiem Auge sichtbar war.

Ich will nun versuchen, das Beobachtete theoretisch begreiflich zu machen. Es kann zunächst gefragt werden, wie es überhaupt möglich ist, dass ein fein vertheilter specifisch schwerer oder leichterer Körper in einer Flüssigkeit so lange suspendirt bleibt. Es ist dies offenbar die Wirkung der Bewegungswiderstände, welche die Körpertheilchen in der Flüssigkeit erfahren. Die Bewegungswiderstände sind Functionen der Geschwindigkeit. Ich versuche zwei Annahmen und setze den Widerstand einmal der ersten, dann der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional. Heisse v die Geschwindigkeit vertical abwärts gerechnet, t die Zeit, p das Gewicht der Masseneinheit des suspendirten Körpers nach Abzug des Gewichtsverlustes, q ein vom Querschnitt abhängiger Widerstandscoëfficient ebenfalls auf die Masseneinheit bezogen, so haben wir für beide Fälle beziehungsweise die Gleichungen:

$$1. \qquad \frac{dv}{dt} + qv - p = 0$$

$$2. \qquad \frac{dv}{dt} + qv^2 - p = 0$$

und beziehungsweise ihre Integrale

$$3. \qquad v = Ae^{-qt} + \frac{p}{q},$$

$$4. \qquad v = \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot \frac{Ae^{2\sqrt{pq}\cdot t} - 1}{Ae^{2\cdot\sqrt{pq}\cdot t} + 1}$$

Man sieht sofort dass, wie auch die Constante A durch den Anfangszustand bestimmt sein möge, sich v schon nach einer endlichen Zeit nahezu auf beziehungsweise folgende zwei Werthe zurückzieht:

$$5. \qquad v = \frac{p}{q},$$

$$6. \qquad v = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

Die Bewegung des suspendirten Theilchens wird alsbald gleichförmig, die Geschwindigkeit constant. Es handelt sich nun um die Bestimmung dieser Grenze von v. Man braucht hiebei nur zu überlegen, dass wenn man einen Körper von bestimmter Form in n kleinere untereinander congruente, dem ersten ähnliche Körper theilt, die Masse in anderm Verhältnisse abnimmt, als der Querschnitt. Nennen wir bei einer bestimmten Masse die Werthe von v beziehungsweise k, k', so lehrt die genannte Überlegung sofort, dass für den $\frac{1}{n}$ Theil dieser Masse die Geschwindigkeiten beziehungsweise gegeben seien durch die Gleichungen:

$$7. \qquad v = \frac{k}{\sqrt[3]{n}}$$

$$8. \qquad v = \frac{k'}{\sqrt[6]{n}}$$

In jedem der beiden Fälle nimmt also die Fallgeschwindigkeit ab, wenn die suspendirte Masse kleiner wird, und sehr kleine Massen können demnach sehr langsam fallen [1].

Die Ableitung gilt aber nur für ein einzelnes in einer Flüssigkeit enthaltenes Körperchen. Enthält die Flüssigkeit eine grosse Menge suspendirter Theile, so müssen sie sich gegenseitig am Fallen hindern. Die Flüssigkeit, die einem Theilchen ausweicht, stosst an das andere. Das Fallen findet desto langsamer statt, je feiner die Vertheilung, je mehr das Suspendirte so zu sagen ein Sieb bildet, welches fallende Sieb die Flüssigkeit durchströmen muss. Die Fallgeschwindigkeit muss mit der Vertheilung in einem weit höhern Maasse abnehmen, als die Formeln 7, 8 besagen. Dies Raisonnement wird durch die Erfahrung auffallend bestätigt. Ich bilde eine Emulsion von Alkohol (sp. Gew.=0·805) und Öl (sp. Gew.=0·875), welche sich etwa 12 Stunden als Emulsion erhält. Bringe ich aber einen Tropfen der Emulsion in Alkohol (vom sp. Gew. 0·805), so fällt dieser ausnehmend rasch zu Boden, zum Beweise, dass hier die Öltröpfchen freier fallen können als in der Emulsion, wo sie sich gegenseitig behindern.

Wie hat man sich nun die Wirkung der suspendirten Theilchen auf das Aräometer vorzustellen?

---

[1] Vergl. die ganz elementare Darstellung in Mach, Compendium der Physik. S. 45

Man könnte zunächst meinen, dass die in der Flüssigkeit eingeschlossenen Theilchen dieselbe einfach in ein Communicationsgefäss mit unzähligen Armen verwandeln, dass also diese Theilchen sonst gar nicht auf das Aräometer wirken. Diese Ansicht ist eben die nächstliegende. Ja es scheint sogar, dass Brücke dieselbe zu der seinigen gemacht hat. Dennoch kann sie eine genauere Prüfung nicht aushalten und lässt sich schon auf blos logischem Wege ad absurdum führen, abgesehen davon, dass sie durch die Erfahrung widerlegt wird.

Man denke sich eine bedeutende Menge Alkohol, in welcher etwas Öl suspendirt ist. Das Aräometer zeigt blos den Alkohol an. Man mische nun Alkohol in eine bedeutende Quantität Öl, so gibt das Aräometer blos das Gewicht des Öles. Öl und Alkohol aber zu gleichen Volumtheilen zusammengemengt, müssten nach obigem Principe beide specifischen Gewichte zeigen, denn im letztern Falle ist der Alkohol so gut im Öl suspendirt, wie das Öl im Alkohol. Das obige Princip kann also kein Princip sein.

Man könnte die Frage mit Hilfe des Princips der virtuellen Bewegung zu behandeln versuchen. Ein Aräometer befinde sich in einer Flüssigkeit, welche suspendirte Theilchen enthält. Bringen wir dem Aräometer eine sehr kleine Verschiebung bei, indem wir es einsinken lassen, so muss offenbar eine entsprechende Quantität Flüssigkeit mit allem was sie suspendirt enthält, gehoben werden. Demnach müsste das Aräometer ein mittleres specifisches Gewicht zeigen. So scheint es auf den ersten Blick. Allein die Sache ist nicht so einfach. Die suspendirten Theile hängen nur durch die Reibung mit der Flüssigkeit zusammen und diese richtet sich nach der Geschwindigkeit, welche letztere in Gleichgewichtsbetrachtungen keine Rolle spielt. Man müsste also hiernach beinahe vermuthen, dass ein Aräometer in der gedachten Flüssigkeit zwar so im Gleichgewichte ist, als ob sie rein wäre, dass es aber in der Flüssigkeit so schwingt, als ob die suspendirten Theile gelöst wären. Die richtige Auflösung dieses Paradoxons liegt, wie mir scheint, in der einfachen Bemerkung, dass die Frage eben niemals eine statische, sondern stets eine dynamische sei. Die suspendirten Theile sind im Fallen begriffen. Sie fallen aber weit aus langsamer als im leeren Raume. Sofern sie aber langsamer fallen, müssen sie durch die Flüssigkeit aufgehalten

sein, was nur möglich ist, indem letztere auf diese einen Druck ausübt, folglich auch selbst einen solchen erleidet. Dieser Druck muss bei einem gleichförmigen Gemenge proportional der Tiefe unter dem Niveau zunehmen.

Stellen wir uns ein cylindrisches mit Flüssigkeit gefülltes Gefäss vor, in welchem eine Reihe horizontal über einander befindlicher feiner Siebe angebracht wären. Jedes Sieb strebt zu fallen. Hierbei muss es die unterhalb befindliche Flüssigkeit zwischen sich durchpressen. Weil dies nur langsam geschehen kann, wirkt es wie der Kolben auf die Flüssigkeit in einem Pumpenstiefel. Je tiefer die Flüssigkeitsschichte, welche wir betrachten, unter dem Niveau liegt, desto mehr Siebe hat sie zu tragen. Der hydrostatische Druck nimmt proportional der Tiefe unter dem Niveau zu. Hierzu gesellt sich der von den Sieben herrührende Druck, der ebenfalls proportional ist der Tiefe unter dem Niveau. Die Druckverhältnisse gestalten sich also ganz so, als wenn dieselbe specifisch schwerer wäre. Das eingesenkte Aräometer muss einen grössern Auftrieb zeigen. Die Flüssigkeit wird durch die suspendirten Theile in ein Communicationsgefäss verwandelt, aber in ein Communicationsgefäss und ein Röhrensystem dessen Wände auf den Inhalt drücken. Die Flüssigkeit wird von unten nach oben durch das Röhrensystem durchgepresst. Abgesehen von dem hydrostatischen Drucke nimmt in jedem solchen Röhrensystem die Pression in der Richtung der Strömung ab. (Vergleiche Volkmann's Hämodynamik.)

Es kann sich jetzt nur mehr um die quantitative Wirkung der suspendirten Theilchen handeln. Würden die Theilchen in absoluter Ruhe in der Flüssigkeit schweben, so müssten sie ihren ganzen Druck äussern und wie gelöst wirken. In dem Masse aber, als sie sich selbst und die Flüssigkeit bewegen, in dem Masse als die Geschwindigkeitshöhe der strömenden Flüssigkeit grösser wird, muss die Widerstandshöhe (der Druck) geringer werden. (Gesetz der Erhaltung der Kraft.)

Da nun in den meisten Fällen, in welchen man überhaupt experimentiren kann, die Theilchen sehr langsam fallen, wird man mit den gewöhnlichen Beobachtungsmitteln ihre Wirkung so finden, als ob sie gelöst wären. Von einer Differenz zwischen Pyknometer und Aräometer kann theoretisch keine Rede sein. Denn auch auf die Wage können die Theilchen nur in so ferne

wirken, als sie im Fallen gehindert sind. Woher also die Differenzen Brücke's rühren, welche doch keine Beobachtungsfehler sein können, dies zu entscheiden bin ich nicht in der Lage.

Experiment und Theorie führen demnach gemeinschaftlich zu dem Satze:

Fein und gleichförmig vertheilte, in einer Flüssigkeit suspendirte Theilchen afficiren das nach irgend einer Methode bestimmte specifische Gewicht und den Auftrieb desto mehr in derselben Weise wie gelöste Körper, je langsamer sie in der Flüssigkeit fallen oder steigen.

Ich schliesse diese Betrachtung in der Hoffnung, etwas zur Klärung der Frage beigetragen zu haben. Es würde mir natürlich sehr zur Befriedigung gereichen, wenn dadurch manche wichtige physiologische Untersuchungen, wie etwa die Bestimmung des specifischen Gewichtes der Blutkörperchen wieder angeregt würden. Endlich bitte ich noch um Nachsicht bei Beurtheilung dieses meines ersten Versuches.

XI. SITZUNG VOM 20. APRIL 1865.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Die Innsbrucker Dendriten auf vergilbtem Papier alter Bücher". III. Bericht, von Herrn Hofrath W. Ritter v. Haidinger.

„Bemerkungen über die Accommodation des Ohres", von Herrn Prof. Dr. E. Mach in Graz.

Herr Prof. Dr. E. Brücke überreicht eine in seinem physiologischen Institute durchgeführte Untersuchung „über die Abhängigkeit des Glycogengehaltes der Leber von der Ernährung", von Herrn Michael Tscherinoff aus Moskau.

Herr Prof. Dr. R. Kner legt einen „vorläufigen Bericht über die an der Ostküste Tenerife's bei Santa Cruz gesammelten Fische", von Herrn Dr. F. Steindachner vor.

Herr Prof. Dr. J. Redtenbacher übergibt eine Abhandlung „über die Zusammenstellung der Mineralwasseranalysen", von Herrn Prof. K. Than in Pest.

Ferner werden folgende Vorträge gehalten:

Von Herrn Prof. Dr. J. Böhm „über die physiologischen Bedingungen der Chlorophyllbildung";

von Herrn Dr. S. Basch, Secundararzt im k. k. allgem. Krankenhause, über „das Zottenparenchym und die ersten Chyluswege";

von Herrn Dr. A. Schrauf „über die Ermittlung des Refractions-Äquivalentes der Grundstoffe";

von Herrn Dr. L. Ditscheiner „über die Krümmung der Spectrallinien", und

von Herrn J. Loschmidt über „Beiträge zur Kenntniss der Krystallformen organischer Verbindungen".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, königl. bayer., zu München: Sitzungsberichte. 1864. II., 3 & 4. Heft, München; 8°.

Annales des mines. VIe Série. Tome VI., 4e & 5e Livraisons de 1864. Paris; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 8. Wien, 1865; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1521—1522. Altona, 1865; 4°.

Comptes rendus de séances de l'Académie des Sciences. Tome LX. No. 12—14. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIV Année, Ier Volume, 14e—15e Livraisons. Paris, 1865; 8°.

Czyrnianski, E., Teoryja chemiczna etc. (Osobne odbicie z T. 33 Roczn. c. k. Tow. nauk. Krak.) 8°.

Fleckles, L., Über *Diabetes mellitus* mit besonderer Berücksichtigung balneotherapeutischer Erfahrungen in Karlsbad. Prag, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n. ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 15—16. Wien, 1865; 8°.

Kokscharow, Nicolai v., Materialien zur Mineralogie Russlands IV. Band. (pag. 97—400. Schluss.) Nebst Atlas. Taf. LXV—LXXI. St. Petersburg, 1861; 8° & 4°.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 11. Wien, 1865; 4°.

Mittheilungen des k. k. Artillerie-Comité. Jahrg. 1864. IX. Bd., 4. Hft.; Jahrg. 1865. 1. Hft. Wien, 1865; 8°.

— der k. k. geographischen Gesellschaft. VII. Jahrg. 1863. Wien; Kl.-4°.

Oroczco y Berra, Manuel, Geografia de las lenguas y carta etnográfica de Mexico. Mexico; 4°.

Reader. No. 119—120, Vol. V. London, 1865; Folio.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'orient. VIIIe Année, No. 11. Constantinople, 1865; 4°.

Wiener medizinische Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 28—31. Wien, 1865; 4°.

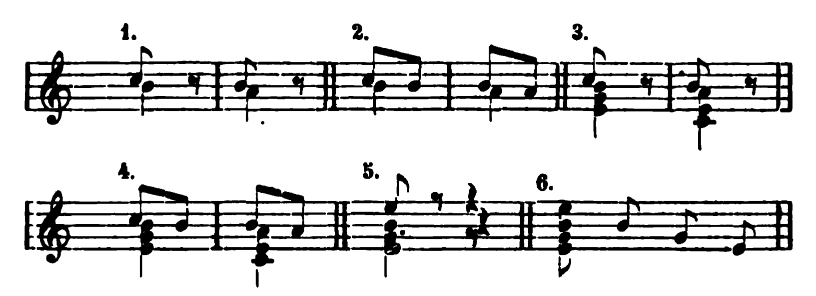
Bemerkungen über die Accommodation des Ohres.

Von Dr. Ernst Mach.

Bei verschiedenen Gelegenheiten habe ich die Ansicht ausgesprochen, dass das Ohr eine Accommodation für die Tonhöhe habe und dass nach der Accommodationsanstrengung die Tonhöhe geschätzt werde. In so allgemeiner Fassung hat diese Ansicht, wie mir vorkommt, einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit. Schwieriger ist es nachzuweisen, dass die Accommodation ganz oder zum Theil durch die Muskel der Trommelhöhle bewirkt werde.

Aufmerksamkeit und Accommodation scheinen bei den Sinnesorganen stets Hand in Hand zu gehen. Am Auge befindet sich ein Muskelapparat, um die Sehaxe in die nöthige Lage zu bringen, ein zweiter Apparat zur Accommodation für die Entfernung. Auch zwischen den beiden Netzhäuten und den einzelnen Stellen derselben Netzhaut (Wettstreit der Wahrnehmungen) kann die Aufmerksamkeit wechseln. Nach meiner Überzeugung geschieht auch dies nicht ohne physiologischen Vorgang und ohne eine Art Accommodationsapparat. Das Auge hat ein ganzes System von Accommodations- oder Fixirapparaten. Ähnlich dürfte es beim Ohr und anderen Organen sich verhalten.

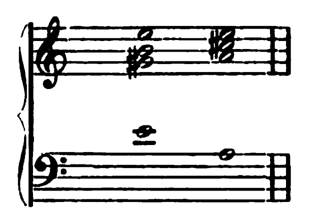
Es sei mir erlaubt ein Experiment anzuführen, welches die Accommodation des Ohres als Thatsache sehr wahrscheinlich macht.



Schlägt man mehrere Töne gleichzeitig am Clavier an und lässt dann eine Taste los, etwa die oberste, während die anderen noch gehalten werden, so zeigt sich eine eigenthümliche Erscheinung. Diejenige Taste meist, welche der losgelassenen zunächst liegt, ertönt wie neu angeschlagen, obgleich sie bloss gehalten wird. Der Satz 1 z. B. klingt fast wie 2, 3 wie 4, 5 wie 6.

Woher mag diese Erscheinung kommen? Weil die Töne des Claviers gleichmässig verklingen, weil ferner der Gehörnerv durch den fortklingenden Ton fort und fort ermüdet wird, würde man diesen Effect a priori nicht erwarten. — Er erklärt sich hingegen einfach durch den Wechsel der Aufmerksamkeit. Jedes Ohr, namentlich aber das musikalisch ungebildete, fixirt in einer Harmonie mit Vorliebe die Oberstimme. Fällt diese weg, so gleitet die Aufmerksamkeit auf den zunächst liegenden Ton hinüber. Hiebei eine Accommodation anzunehmen hat nichts Widersinniges. Bemerkenswerth ist, dass die Verstärkung des Tones merklich nach dem Loslassen der Taste eintritt. Man ertappt hier so zu sagen das Ohr.

Der Musiker kann leicht noch andere interessante Bemerkungen machen. Ich will nicht von den vielfach behandelten Obertönen sprechen. Man betrachte einen beliebigen kleinen Satz, z. B.



und fixire abwechselnd einmal die Oberstimme, dann den Bass. Man hat im ersten Falle ganz den Eindruck als ob der Ton derselbe bliebe und sich nur die Klangfarbe veränderte. Im zweiten Falle hört man einen deutlichen Schritt in die Tiefe, und zwar scheint die ganze Klangmasse in die Tiefe zu steigen.

Diese Thatsachen scheinen mir nebst den von E. H. Weber und v. Wittich beobachteten Fällen von Doppelthören von höchster Wichtigkeit für die Theorie.

Über die Wirkung der Muskel der Trommelhöhle am lebenden Ohr während der Function des Hörens versuchte ich auf verschie-

dene Weise Beobachtungen anzustellen, die jedoch bisher leider erfolglos blieben. Über die manometrischen Versuche habe ich bereits berichtet. Ebenso darüber, dass ich mich bemühte, ein künstliches Doppelthören durch momentane Lähmung der Muskel des einen Ohres hervorzubringen.

Nachdem mehrere Versuche negativ ausgefallen waren, hoffte ich auf rein akustischem Wege mehr zu erfahren, indem wie ich meinte, Veränderungen am Ohr zum Zwecke des Hörens leichter gehört als gesehen werden mussten. Im Sommer 1863 unternahm ich mit Herrn J. Popper, Eleven des physikalischen Institutes zu Wien, und später mit Herrn E. Kulke, Musiker, folgenden Versuch. Ich fasste eine schwingende Stimmgabel mit den Zähnen. In mein Ohr steckte ich ein Gummiröhrchen, welches bis hart an's Trommelfell reichte; das andere Ende des Röhrchens ging in das Ohr des Beobachters. Derselbe betrachtete aufmerksam den Klang, während ich abwechselnd den Grundton oder einen Oberton der Stimmgabel fixirte. Der Gehilfe merkte jedoch keine Veränderung an dem Klange, wie ich meinen Ansichten nach erwarten musste.

Dennoch hat die sehr verwandte Methode Politzer's bei künstlicher Contraction des *tensor tympani* das vermuthete Resultat gezeigt [1]). Leider geben auch diese Experimente nicht über alles Aufschluss, was ich zu psychologischen Zwecken gerne festgestellt sehen würde. Es ist nämlich noch nicht nachgewiesen, dass der *tensor tympani* beim abwechselnden Fixiren hoher und tiefer Töne wirklich in Thätigkeit ist. Was Politzer hier experimentel dargethan hat, habe ich bereits in einer älteren Arbeit theoretisch als mathematisch nothwendige Folgerung hingestellt.

Seither war es mein Bestreben, am lebenden unverletzten menschlichen Ohre zu beobachten. Denn so allein können ja die Versuche für die Psychologie von Bedeutung werden. Die directe Anwendung der Lissajous'schen Methode auf das Trommelfell bietet erhebliche Schwierigkeiten. Ungern entschloss ich mich zu einem andern Verfahren. Ich führe ein feines Gummibläschen in den Gehörgang ein bis hart an das Trommelfell. Das Bläschen communicirt mit einem Röhr-

[1]) Trötsch und Politzer, Archiv für Ohrenheilkunde. 1864. 1. Heft.

chen, welches wieder in einem Bläschen endigt. An letzterem befindet sich eine Borste, deren Schwingungen unter dem Mikroskope beobachtet werden. Die Töne bringe ich dem beobachteten Ohre durch Knochenleitung bei.

Die Theorie und Resultate dieser Versuche sind Gegenstand eines spätern Berichtes, welchen ich vorläufig noch zurückhalten muss.

Über die Zusammenstellung der Mineralwasseranalysen[1].

Von **Prof. Karl Than.**

Wenn man das übliche Verfahren bei der Zusammenstellung der Mineralwasseranalysen einer objectiven Kritik unterzieht, so gelangt man zu der Überzeugung, dass durch eine derartige Zusammenstellung die wirkliche Constitution eines Wassers nicht ausgedrückt wird, ja sogar, dass sie eine idelle Zusammensetzung darstellt, welche sowohl in qualitativer als auch insbesondere in quantitativer Beziehung unrichtig ist.

Da es gegenwärtig keine Methoden gibt, nach welchen man die in einem Mineralwasser enthaltenen gemischten Salze ohne chemische Zersetzung derselben, trennen und bestimmen könnte, so können derzeit durch die chemische Analyse im Allgemeinen nur die einzelnen elementaren Bestandtheile qualitativ und quantitativ durch Versuche sicher bestimmt werden. Mit anderen Worten, man kann es in exacter Weise nicht ermitteln, wie vielerlei Salze und welche Mengen von einem jeden derselben in einem bestimmten Wasser enthalten ist.

Dessenungeachtet ist man gewohnt nach der quantitativen Bestimmung der elementaren Bestandtheile, diese unter sich so zu gruppiren, dass in der Zusammenstellung der Analyse eine bestimmte Anzahl Salze, und von jedem derselben eine bestimmte Menge erscheint.

Bei dieser Gruppirung der Bestandtheile geht man von der unbegründeten Annahme aus, dass die einzelnen bestimmbaren Bestandtheile nach ihren sogenannten relativen Verwandtschaften und den Löslichkeitverhältnissen der denk-

---

[1]) Vorgetragen in der X. Versammlung ungarischer Ärzte und Naturforscher in Maros-Vásárhely 1864.

baren Salze in dem Mineralwasser vereinigt wären. Diesem entsprechend verbindet man die energischesten Metalle mit den energischesten der negativen Elemente oder in der früher üblichen Sprache die stärksten Basen mit den stärksten Säuren; dann theilt man die minder energischen Bestandtheile unter sich ein, jedoch in der Weise, dass unter sonst gleichen Verhältnissen immer die am schwierigsten löslichen Salze zusammengestellt werden.

Die bei diesem Verfahren zum Ausgangspunkt gewählte Hypothese ist wesentlich mangelhaft, da sie erstens auf keinem sicheren und bestimmten Principe beruht; zweitens weil sie mit Thatsachen im Widerspruche ist. Die Hypothese entbehrt des sicheren Principes, denn ich glaube, dass man die Idee, es seien in gemischten Salzlösungen die Elementarbestandtheile nach ihren relativen Verwandtschaften gruppirt, nicht als ein sicheres Princip ansehen darf, da es bisher kein exactes Naturgesetz gibt, aus welchem man dieses Princip logisch abstrahiren könnte. Von der Bestimmtheit kann kaum die Rede sein, wenn man überlegt, dass die relative Grösse der Verwandtschaft ein unbestimmter und veralteter Ausdruck ist, von dem eigentlich Niemand weiss, was darunter zu verstehen ist, meines Erachtens kann man diesen wenigstens zur Zeit nicht präcis formuliren.

Diesem Mangel eines bestimmten Principes ist es zuzuschreiben, dass die übliche Zusammenstellungsart der Analysen die wirkliche Zusammensetzung der Mineralwasser nicht erkennen liess, und nicht einmal auf das bescheidene Resultat führen konnte, dass diese Zusammenstellungen nach irgend einer Convention übereinstimmend hätten bewerkstelligt werden können, so dass sie mehr oder weniger von der individuellen Anschauung der betreffenden Chemiker abhängig waren. Es war desshalb die Vergleichung zweier Mineralwasser wie die Zusammenstellung selbst eine illusorische und für den nicht Sachkundigen in der That eine Unmöglichkeit. Die experimentellen Daten der Analyse waren in der Weise verborgen, dass man sie erst nach langwierigen Rechnungen wieder finden und so dann eine genaue Vergleichung anstellen konnte.

Dass die Consequenzen der obigen Hypothese mit den Thatsachen im Widerspruche sind, geht aus den folgenden Beispielen klar hervor. Wenn äquivalente Mengen von schwefelsaurem Kalium und Chlornatrium in wässeriger Lösung gemischt werden, so sollten

die beiden Salze ihrer gesammten Menge nach, im Sinne der erwähnten Hypothese unverändert in der gemischten Lösung enthalten sein; da einerseits das Kali eine stärkere Base als das Natron, andererseits aber die Schwefelsäure eine stärkere Säure als die Salzsäure ist. Ausserdem ist das schwefelsaure Kalium schwieriger löslich in Wasser als das Chlornatrium, oder die durch Wechselzerlegung der beiden Salze möglicherweise entstehenden schwefelsaures Natrium und Chlorkalium. Dass die beiden Salze demnach nicht unverändert neben einander in der gemischten Lösung enthalten sind, erhellt ganz bestimmt aus den weiter unten mitzutheilenden Versuchen.

Die schönen Versuche, welche Graham[1]) über die Diffusion gemischter Salzlösungen veröffentlicht hat, beweisen entschieden, dass eine gemischte Lösung von äquivalenten Mengen schwefelsaurem Kalium und Chlornatrium, identisch ist mit einer gemischten Lösung, die aus äquivalenten Mengen von schwefelsaurem Natrium und Chlorkalium hervorgegangen ist. Der Kürze wegen wollen wir das erste Salzgemenge *A*, das zweite *B* nennen. Zu demselben Resultate gelangte Gerland[2]) durch die Versuche, mittelst welcher er gezeigt hat, dass die Spannkräfte, der aus den beiden erwähnten Salzgemengen dargestellten Lösungen bei denselben Temperaturen entstehenden Dämpfe, vollkommen gleich sind. Es ist klar, dass die Identität beider Lösungen nur durch eine symmetrische Wechselzerlegung der in ihnen enthaltenen Salze zu Stande kommen kann. Die erwähnten Forscher haben diese Identität beider Lösungen durch die Annahme erklärt, dass in beiden Lösungen in Folge der Wechselzersetzung viererlei qualitativ und quantitativ identische Salze entstehen. Dies ist aber durch ihre Versuche, welche blos die Identität beider Lösungen beweisen, nicht dargethan. Zur Beurtheilung der Frage, ob die Salze wirklich in der Form, in der gemischten Lösung enthalten sind, wie die Consequenz obiger Hypothese verlangt, ist aber gerade nothwendig zu erfahren, durch welche Art chemischer Umwandlung beide Lösungen identisch geworden sind. Die Identität kann nämlich einmal dadurch zu Stande gekommen sein, dass in dem einen Salzgemenge die Salze unverändert bleiben, während in dem zweiten durch eine

[1]) Liebig, Annalen der Chemie und Pharm. CXXI. 1.

[2]) Pogg. Annal. d. CXXIV. 179.

vollständige Wechselzerlegung mit jenen identische Salze entstehen, z. B. nach folgender Gleichung:

A. bleibt beim Auflösen unverändert . .	$KSO_4 + NaCl = KSO_4 + NaCl$	I.
B. dagegen erleidet eine vollständige Wechselzerlegung	$NaSO_4 + KCl = KSO_4 + NaCl$	

Im Gegensatze zu diesem ist es auch denkbar, dass die Umwandlung gerade in entgegengesetztem Sinne stattfindet, also:

A. erleidet eine vollst. Wechselzerl. . .	$KSO_4 + NaCl = NaSO_4 + KCl$	II.
B. bleibt unverändert	$NaSO_2 + KCl = NaSO_4 + KCl$	

Endlich ist es möglich, dass bei der Auflösung in beiden Salzgemengen eine theilweise Wechselzerlegung in dem Sinne vor sich geht, dass die Producte identisch werden. Am einfachsten könnte dies nach folgenden Gleichungen geschehen:

A.	$2\,KSO_4 + 2\,NaCl = KSO_4 + NaCl + NaSO_4 + KCl$	III.
B.	$2\,NaSO_4 + 2\,KGl = KSO_4 + NaCl + NaSO_4 + KCl$	

Man sieht es auf den ersten Blick, dass im Sinne der oft erwähnten Hypothese die Identität der beiden Salzlösungen nach der I. Gleichung zu Stande kommen müsste, während nach der Verwandtschaftslehre von Bertholet die Umwandlung nach III erfolgen sollte. Zur Entscheidung dessen, nach welchen dieser drei möglichen Gleichungen die Umwandlung in der Wirklichkeit erfolgt, habe ich einige Versuche angestellt, welche auf die Löslichkeit der hier in Betracht kommenden Salze gegründet waren.

Nennt man die Gewichtsmenge Wassers, welches zur Auflösung der Gewichtseinheit eines Salzes bei einer bestimmten Temperatur erforderlich ist, den Lösungscoëfficienten (λ) des Salzes für diese Temperatur, so ist es klar, dass man die Menge des Wassers, welche zur Lösung einer beliebigen Salzmenge erforderlich ist, einfach durch Multipliciren des Gewichtes derselben mit dem bezüglichen Coëfficienten erhält. Man findet so, dass zur Auflösung zweier Äquivalente ($2a$) der betreffenden Salze bei 20° C. folgende Wassermengen ($2\lambda a$) erforderlich sind.

	$2a$	λ bei 20°C.	$2\lambda a$
$2KSO_4$ =	1·742 —	8·333 —	14·514
$2NaSO_4$ =	1·420 —	4·851 —	6·888
$2KCl$ =	1·492 —	2·890 —	4·312
$2NaCl$ =	1·170 —	$2{\cdot}76^6$ —	3·238

Es ergibt sich hieraus, dass zur Auflösung von vier Äquivalenten dieser Salze, welche dasselbe absolute Gewicht besitzen, je nach der Combination derselben folgende Wassermengen nothwendig sind.

Zu der Comb. nach der		G. Th. Salz.	G. Th. Wasser	Diff.
I. Gl.	$2KSO_4 + 2NaCl$	= 2·912	— 17·752	3·276
II. „	$KSO_4 + NaCl + NaSO_4 + KCl$	= 2·912	— 14·476	3·276
III. „	$2NaSO_4 + 2KCl$	= 2·912	— 11·200	

Aus der Menge des Wassers, welches zur Auflösung der Salzgemenge erforderlich ist, kann man daher beurtheilen, nach welchen der drei Gleichungen die Wechselzerlegung erfolgt. Je nachdem die Zersetzung nach der Gleichung I, II oder III erfolgt, wird zur Auflösung der beiden Salzgemenge die grösste, kleinste oder die mittlere der angeführten Wassermengen nothwendig sein. Folgende Versuche zeigen mit Bestimmtheit, dass zur Auflösung der Salzgemenge *A* und *B* die mittlere Wassermenge hinreicht, während die kleinste Menge zu diesem Zwecke nicht hinreichend ist, woraus mit Evidenz hervorgeht, dass die Salze in der gemischten Lösung, nicht wie es die Hypothese verlangt, im Sinne der I. Gleichung und auch nicht nach der II. Gleichung gruppirt enthalten sein können, während es wahrscheinlich erscheint, dass die Identität nach dem Satze von Bertholet also im Sinne der III. Gleichung in der Weise zu Stande kommt, dass vier identische Salze entstehen.

In einem sehr leichten gewogenen Glaskölbchen wurden 1·420 Grm. wasserfreies schwefelsaures Natrium und 1·492 Grm. Chlorkalium gegeben, und dann mit Hilfe einer sehr feinen Pipette auf der Wage gerade 11·200 Grm. Wasser zugesetzt. Der kleine Kolben wurde nun in ein Wasserbad gestellt, dessen Temperatur fortwährend auf 20°C. erhalten war. Nach häufigem Umschütteln der Flüssigkeit löste sich ein bedeutender Theil der Salzmasse, auch nach 12 Stunden nicht auf. Nun hat man noch 3·276 Grm. Wasser (also im Ganzen 14·476 Grm.) zugesetzt. Hierauf hat sich der Rest des Salzes nach einigem Schütteln etwa in einer Viertelstunde bei 20°C. vollständig gelöst. Könnten das schwefelsaure Natrium und Chlorkalium unverändert neben einander in der Lösung bestehen, so hätte sich das Salzgemenge in der Minimalwassermenge von 11·200 Grm. lösen müssen. Dass dies nicht der Fall ist, wurde ausser dem eben beschriebenen Versuch auch dadurch unwiederleglich

bewiesen, dass man 1·42 Grm. schwefelsaures Natrium mit 6·888 Grm. Wasser und ebenso 1·492 Chlorkalium mit 4·312 Grm. Wasser jedes für sich übergoss. Nach einigem Schütteln im Wasserbade bei 20°C. lösten sich beide Salze in den angeführten Wassermengen. Als man nun beide Salzlösungen mit einander gemischt hat, schied sich nach etwa 10 Minuten aus der gemischten Lösung eine bedeutende Menge krystallisirten Salzes aus.

Auf dieselbe Weise wurden in einem Kölbchen 1·742 Grm. schwefelsaures Kalium und 1·17 Grm. Chlornatrium gegeben. Wenn diese beiden Salze unverändert neben einander in Lösung bestehen könnten, so könnten sie sich nur in 17·752 Grm. Wasser lösen. Nachdem man die mittlere Wassermenge (14·476 Grm.) auf dieses Gemenge gegossen hatte, ist die Auflösung nach häufigem Schütteln bei 20°C., wenn auch etwas langsamer nämlich in 30 Stunden, ganz vollkommen erfolgt.

Ähnliche Versuche habe ich mit salpetersaurem Kalium und Chlornatrium, ferner mit salpetersaurem Natrium und Chlorkalium angestellt, welche bezüglich der Hypothese ganz ähnliche widersprechende Resultate gaben, wie die Versuche mit den vorher erwähnten Gemengen, indem dieselben ebenfalls in der mittleren Wassermenge löslich sind. Weitere Versuche, die ich mit diesen vier Salzgemengen anstellte, zeigten deutlich, dass dieselben sich auch in etwas geringeren als der mittleren Wassermenge zu gesättigten Lösungen auflösen. Dieser Umstand kann seinen Grund entweder darin haben, dass die Salze sich nach ungleichen Äquivalenten zersetzen, oder darin, dass sich Doppelsalze bilden, deren Lösungscoëfficient etwas kleiner als das Mittel der Coëfficienten der vier getrennten Salze ist. Ich bin im Augenblicke mit der Fortsetzung der Versuche in dieser Richtung beschäftigt, und hoffe durch dieselben bezüglich der Gesetze der Wechselzerlegung bei löslichen Salzen, zu interessanten Resultaten zu gelangen. Wie es auch immer sein mag, so viel geht aus den oben angeführten Versuchen mit Bestimmtheit hervor, dass in den Lösungen der vier erwähnten Salzgemenge, die Bestandtheile nicht so gruppirt sind, wie es die Hypothese verlangt, und dass daher diese mit den Thatsachen im Widerspruche steht.

Wenn ein Wasser Calcium, Natrium in der Form von schwefelsauren Salzen und als Chloride enthält, stellt man den Kalk als schwefelsaures Calcium in der Analyse dar, da im Sinne der obigen

Hypothese, dieses Salz unter den möglichen Salzen am schwierigsten löslich ist. Wie wenig diese Annahme berechtigt ist, geht schon aus der einfachen Thatsache hervor, dass der Gyps in kochsalzhaltigem Wasser bedeutend leichter löslich ist, als im reinen Wasser. Die natürlichste Ursache dieser Erscheinung liegt offenbar darin, dass der Gyps und das Kochsalz in Folge einer Wechselzerlegung zum Theil in Chlorcalcium und in schwefelsaures Natrium ($NaCl + CaSO_4 = CaCl + NaSO_4$) verwandelt werden, die vie leichter löslich sind als die ursprünglichen Salze für sich.

Nicht minder unsicher scheint die Annahme zu sein, dass die Gesammtmenge des beim Kochen eines Mineralwassers ausgeschiedenen Niederschlages als kohlensaures Calcium resp. Magnesium im Wasser enthalten war. Es ist denkbar und sogar wahrscheinlich, dass ein Theil dieser kohlensauren Salze geradezu bei der Siedhitze durch Wechselzerlegung aus anderen kohlensauren Salzen gebildet werden. Folgender Versuch scheint diese Ansicht zu unterstützen. Wenn man frisch geschmolzenes kohlensaures Natrium im ausgekochten Wasser löst, und diese Lösung mit ebenfalls ausgekochter Gypslösung bei gewöhnlicher Temperatur vermischt, so dass das erstere Salz im Überfluss vorhanden ist; so scheidet sich der grösste Theil des Kalkes als kohlensaures Salz aus. Filtrirt man dann bei Luftabschluss, so bekommt man eine vollkommen klare alkalische Flüssigkeit, welche sich auch nach längerem Stehen bei gewöhnlicher Temperatur nicht trübt. Kocht man aber diese Flüssigkeit auf, so erhält man einen deutlichen Niederschlag von kohlensaurem Kalk, woraus mit grosser Wahrscheinlichkeit hervorgeht, dass dieser Theil des kohlensauren Kalkes erst beim Kochen gebildet wird.

Ähnliche Einwendungen könnte man noch in grösserer Anzahl anführen. Aus dem bisher Gesagten geht aber schon deutlich hervor, dass die gebräuchliche Zusammenstellung der Analysen, weder die mühsam festgestellten directen Ergebnisse der Analyse, noch die wahre Constitution des Wassers ausdrückt. Die ersteren sind darin in der Weise verborgen, dass eine unmittelbare Vergleichung zweier Analysen unmöglich ist; während die Constitution des Wassers offenbar unrichtig dargestellt wird. Aus diesen zwei Gründen sind die üblichen Zusammenstellungen dem Zwecke der Analysen nicht entsprechend.

Meines Erachtens kann der Zweck derartiger Zusammenstellungen bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse ein zweifacher sein u. z.:

1. Dass durch dieselben die in verschiedenen Mineralwassern enthaltenen Bestandtheile quantitativ exact verglichen werden können.

2. Dass durch dieselben die chemische Constitution des Wassers richtig dargestellt werde.

Es fragt sich, ob es bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft überhaupt möglich ist, die Analysen so zusammenzustellen, dass sie diesen Zwecken vollständig entsprechen? — Die Antwort ist einfach, denn der erste Zweck ist vollkommen erreichbar, während der zweite wenigstens annähereud in der Weise zu erreichen ist, dass man dadurch die Wahrheit unbedingt sicherer erkennt, als durch die bisher üblichen Zusammenstellungen.

Diesen zweifachen Anforderungen wird Genüge geleistet, sobald man als Princip anerkennt dass durch die Zusammenstellungen gerade nur so viel ausgedrückt werden soll, was durch analytische Versuche in exacter Weise bewiesen werden kann. Kurz, wenn die Zusammenstellungen objectiv, ohne Zuhilfenahme von Hypothesen bewerkstelligt werden.

Da keine Methoden bekannt sind, nach welchen man die in einem Wasser enthaltenen Salze, diese ohne chemische Zersetzung derselben trennen und sie daher einzeln quantitativ bestimmen könnte; ferner da man von den Gesetzen, nach welchen die verschiedenen Salze in ihren gemischten Lösungen sich umsetzen, keine exacte Kenntniss hat, so ist es einleuchtend, dass man die Menge der einzelnen Salze in einem Wasser, weder direct noch theoretisch mit Sicherheit feststellen kann. Vor Allem muss man daher an dem erwähnten Principe festhaltend, davon abgehen, dass man bei der Zusammenstellung die einzelnen Bestandtheile in der Form von Salzen anführt.

Wenn die Gesetze der Wechselzerlegungen der löslichen Salze ermittelt wären, so wäre offenbar eine exacte Zusammenstellung der einzelnen Salze die zweckmässigste. Ich glaube, dass man diese auch in anderer Beziehung höchst wichtigen Gesetze dadurch ermitteln könnte, dass man die Löslichkeit der einfachen und der gemischten Salze, ferner die specifischen Gewichte und das

Lichtbrechungs-Vermögen dieser Lösungen, oder die Diffusion derselben einem gründlichen Studium unterzieht. Voraussichtlich wird aber die Entdeckung dieser Gesetze, auch wenn die Wissenschaft in dieser Richtung besondere Fortschritte thun wird, nur nach längerer Zeit zu hoffen sein. Ich halte es auch bis dahin rathsam und im hohen Grade zweckmässig, dass die Zusammenstellung nach dem eben erwähnten Principe bewerkstelligt werde.

Wenn der Chemiker ein Mineralwasser der Analyse unterzieht, so kann er nach den gegenwärtig bekannten analytischen Methoden, im Allgemeinen nur die Gesammtmenge der einzelnen Elementarbestandtheile sicher bestimmen. Er ist aber nicht im Stande sicher zu ermitteln, wie viel von jedem dieser Elementarbestandtheile in den verschiedenen möglicherweise in dem Wasser vorhandenen Salzen enthalten ist. Wenn ein Wasser z. B. verschiedene Metallsalze unter anderen auch verschiedene Kaliumsalze enthält, so kann man durch die Analyse bezüglich des Kaliums nichts anderes bestimmen, als die Gesammtmenge desselben, welche in den verschiedenen Salzen enthalten ist. Speciell kann man in exacter Weise nicht beweisen, welcher Theil dieser Gesammtmenge des Kaliums in der Form von Chlor-, Brom- oder Jodverbindung oder als schwefelsaures Salz u. s. w. im Wasser enthalten ist; sofern das Kalium in allen diesen verschiedenen Salzen zu den betreffenden Reagentien dasselbe Verhalten zeigt.

Ich schlage desshalb auf Grund des oben ausgesprochenen Principes vor, dass bei der Zusammenstellung der Mineralwasseranalysen, **die in 1000 (oder 10000) Gewichtstheilen des Wassers enthaltenen Gesammtmengen der Elemetarbestandtheile ausgedrückt werden sollen, so wie diese aus den directen Ergebnissen der Analyse berechnet werden, ohne dass sie unter sich zu imaginären Salzen eingetheilt wären.**

Bei jenen Bestandtheilen, bei welchen man die Form der Verbindung quantitativ ermitteln kann, sollen die zusammengehörigen Mengen der Elementarbestandtheile über einander geschrieben und durch passende Klammer vereinigt werden. Neben diese Klammer schreibt man dann die Form der Verbindung auf. So z. B. ist es bei den schwefelsauren Salzen (MSO_4) erwiesen, dass in dem negativen Theile derselben auf ein Äquivalent Schwefel, vier Aquivalente Sauer-

stoff enthalten sind. Sind daher in 1000 Theilen Wasser 8·4069 Schwefel als schwefelsaures Salz enthalten, so ist die diesem entsprechende Menge Sauerstoff = 16·8139. Man schreibt daher die zusammengehörigen Schwefel- und Sauerstoffmengen wie folgt auf:

$$\text{In den Sulphaten} \ldots\ldots \begin{cases} S & - \ 8{\cdot}4069 \\ O_4 & - \ 16{\cdot}8139. \end{cases}$$

Es ist klar, dass bei einer derartigen Zusammenstellung die Resultate der Analyse auf den ersten Blick in exacter Weise verglichen werden können; da die Daten, aus welchen eine solche Zusammenstellung hervorgeht, die unmittelbaren Thatsachen der Analyse und daher von jeder Hypothese unabhängig sind. Hierdurch ist einer der oben erwähnten Zwecke vollkommen erreicht.

Damit man die wahre chemische Constitution eines Wassers beurtheilen könne, schlage ich vor, dass bei der Zusammenstellung ausser den in 1000 Theilen enthaltenen Mengen auch die relativen Äquivalente der elementaren Bestandtheile ausgedrückt werden sollen.

Die relativen Äquivalente der Elementarbestandth eile ergeben sich, wenn man die in 1000 Thlen. enthaltenen Mengen durch das Äquivalentgewicht[1]) des betreffenden Bestandtheiles dividirt. Bezeichnet *a* das Äquivalent eines Bestandtheiles *m* die Menge desselben in 1000 Theilen Wasser, *w* dagegen den Werth des relativen Aquivatentes, so hat man:

$$a : 1 = m : w \text{ daher } w = \frac{m}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

So z. B. ist in einem Wasser, welches in 1000 Theilen 0.4452 Calcium enthält $w = \frac{0{\cdot}4452}{20} = 0{\cdot}02226.$

Wenn man in dieser Weise bei allen Bestandtheilen die betreffenden Werthe ermittelt, so gelangt man zu solchen Zahlen, die das Verhältniss der Äquivalente der Bestandtheile ausdrücken. Da aber die absolute Grösse dieser Zahlenwerthe, von der in 1000 Th. enthaltenen Menge abhängig ist, so ist es einleuchtend, dass diese Zahlenwerthe ihrer relativen Natur gemäss, nur bei demselben

---

[1]) Unter Äquivalentgewicht wird hier überall jene relative Gewichtsmenge der Bestandtheile verstanden, welche ein Gewichtstheil Wasserstoff ersetzen kann.

Wasser unter sich verglichen werden können. Dagegen können die so erhaltenen Zahlenwerthe der Äquivalente bei verschiedenem Wasser nicht verglichen werden, da die Summe dieser relativen Zahlen und daher ihre Maasseinheit bei verschiedenem Wasser eine verschiedene ist.

Um diese Vergleichbarkeit zu ermöglichen, ist es nothwendig, dass bei der Zusammenstellung die Zahlenwerthe der Äquivalente immer auf dieselbe Einheit bezogen werden. Ich glaube, dass man dies am zweckmässigsten dadurch erreicht, dass man diese relativen Zahlenwerthe bei einer jeden Wasseranalyse in Procenten ausdrückt, u. z. so dass man die Summe der relativen Äquivalente bei den positiven (Metall-) Bestandtheilen [1]) = 100 setzt. Die Berechnung der Procente der relativen Äquivalente geschieht am einfachsten nach folgender Formel

$$s : w = 100 : w\% \text{ woher } w\% = \frac{100\,w}{s} \;\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wo s die Summe der relativen Äquivalente der Metalle, w das relative Äquivalent der betreffenden Bestandtheile, $w\%$ die gesuchten Procente bedeuten.

Ganz in derselben Weise berechnet man diese Procente bei den negativen (Säure-) Bestandtheilen. Bei Salzen, deren negativer Theil aus zwei verschiedenen Elementen besteht, repräsentirt ein jeder dieser beiden Elemente gleichwohl das Äquivalent des negativen Bestandtheiles. Zur Berechnung des relativen Äquivalentes ist desshalb in solchen Fällen hinreichend, die in 1000 Theilen Wasser enthaltene Menge des einen Elementes, durch jene relative Gewichtsmenge desselben zu dividiren, welche in einem Äquivalentgewicht des betreffenden Salzes enthalten ist. Unter dem Äquivalentgewicht eines Salzes verstehen wir jene relative Menge desselben, in welchem ein Äquivatent Metall enthalten ist.

So besteht z. B. in einem Äquivalente der schwefelsauren Salze MSO_4, der negative Theil aus einem Äquivalente Schwefel und vier Äquivalenten Sauerstoff. Um daher das relative Äquivalent der schwefelsauren Salze in einem Mineralwasser zu erhalten, genügt

---

[1]) Wenn das Wasser oder eine beliebige Mischung eine freie Säure enthalten sollte, so wäre offenbar das relative Äquivalent des Wasserstoffes zu dem der Metalle zuzurechnen.

es, die in 1000 Theilen enthaltene Menge des Schwefels durch 16 [1]) zu dividiren. Wird dieser Quotient im Sinne der zweiten Gleichung (2) mit 100 multiplicirt und durch *s* (die Summe der relativen Äquivalente der Metalle) dividirt, so erhält man die Procente des relativen Äquivalentes des schwefelsauren Salzes.

Die Kohlensäure, welche fast in einem jeden Mineralwasser vorkommt, ist zum Theil in freiem Zustande, zum Theil in der Form von Salzen in denselben enthalten. Mit Sicherheit kann man derzeit ebenfalls nur die Gesammtmenge der Kohlensäure in dem Mineralwasser bestimmen. Wie viel von dieser Kohlensäuremenge in den neutralen Salzen enthalten ist, lässt sich aus der Summe der relativen Äquivalente der Metalle ebenfalls mit Sicherheit ableiten. Anders verhält es sich aber mit der Frage, welcher Theil der Gesammtkohlensäure ist in einem Mineralwasser, in der Form von doppelt kohlensauren Salzen enthalten.

Heidenhain und Meyer [2]) haben durch Versuche gezeigt, dass eine Lösung von kohlensaurem Natrium gerade so viel Kohlensäure zu absorbiren im Stande ist, als zur Bildung von saurem Salz ($HNaC_2O_6$) und zur Sättigung des vorhandenen Wassers erforderlich ist. In dem Mineralwasser kommt aber ausser dem kohlensauren Natrium, auch häufig kohlensaures Calcium und Magnesium vor, von denen man nur weiss, dass sie in kohlensäurehaltigem Wasser löslich sind. Da die kohlensauren Salze dieser beiden Metalle bisher gar nicht dargestellt worden sind, und da es noch durch Versuche nicht ermittelt worden ist, ob die genannten kohlensauren Salze sich mit der freien Kohlensäure nach stöchiometrischen Gesetzen verbinden können [3]), so ist man gegenwärtig nicht im Stande zu berechnen, wie viel die Menge der Kohlensäure beträgt, welche zur Bildung von saurem Salz erforderlich oder wie man sich schlechterdings ausdrückt, halbgebunden ist.

Wenn wir an unserem Princip festhalten wollen, so müssen wir bezüglich der kohlensauren Salze uns damit begnügen, in der

---

[1]) Die in einem Äquivalent der schwefelsauren Salze enthaltene relative Menge des Schwefels ist = 16.

[2]) Annalen der Chemie und Pharm. II. Supl. Bd. S. 170.

[3]) Mit der experimentellen Lösung dieser Frage beschäftigt sich gegenwärtig einer meiner Schüler im hiesigen Laboratorium.

Zusammenstellung blos neutrale kohlensaure Salze anzuführen, während wir den übrigen Theil der Kohlensäure, also die freie und halbgebundene summarisch am Ende der Zusammenstellung mit den anderen Gasen anführen.

Wenn in einem Wasser freier Schwefelwasserstoff vorkommt, so wird der an ihn gebundene in 1000 Theilen enthaltene Wasserstoff bei den Metallen, der Schwefel, welcher an Wasserstoff gebunden, oder möglicherweise auch in den Schwefelmetallen enthalten ist, wird summarisch, jedoch von dem Schwefel der schwefelsauren Salze getrennt, bei den negativen Bestandtheilen angeführt.

Aus dem bisher Gesagten geht hervor, dass die erste Aufgabe bei der neuen Zusammenstellungsweise darin besteht, die relativen Äquivalente der einzelnen elementaren Bestandtheile aufzusuchen. Dann hat man die Summe der relativen Äquivalente der Metalle, von der der negativen Bestandtheile abzuziehen. Die Differenz gibt das relative Äquivalent der freien und halbgebundenen Kohlensäure. Hieraus kann man dann die Menge des Kohlenstoffes und respective des Sauerstoffes berechnen, welche in den neutralen kohlensauren Salzen enthalten ist. Hierauf berechnet man mit Hilfe der Formel 2) die Procente der relativen Äquivalente, und hat sonach alle Daten die zur Zusammenstellung der Analyse erforderlich sind.

Zur Erläuterung des hier auseinander gesetzten Verfahrens diene als Beispiel die Zusammenstellung der analytischen Resultate, des nach „Deák Ferencz" benannten Ofner Bitterwassers [1]).

Die Ergebnisse der Analyse, speciell die in 1000 Thln. Wasser enthaltenen Mengen der Elementarbestandtheile (°/₀₀) und die daraus berechneten relativen Äquivalente (w) sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Positive (oder Metall-) Bestandtheile:

	°/₀₀		w.
K	0·1276	—	0·00326
Na	6·3736	—	0·27712
Mg	3·5983	—	0·29986
Ca	0·4452	—	0·02226
Fe	0·0062	—	0·00022
Summe der rel. Aeq. d. Met. s		=	0·60272.

[1]) Die Analyse dieses Wassers wurde am 1. Juli 1862 in der ungarischen Akademie veröffentlicht.

Negative Bestandtheile:

	‰	w.
Si	0·0012 —	0·00007
C	0·2658 —	0·04430
Cl...........	1·7495 —	0·04928
S	8·4069 —	0·52543
Summe der rel. Äq. d. neg. Best. —		0·61908.

Vergleicht man die Summe der relativen Äquivalente der positiven Bestandtheile mit der der Negativen, so sieht man, dass die letztere grösser ist als jene. Hieraus folgt, dass in dem Wasser saure Salze enthalten sind. Da aber das Wasser alkalisch reagirt, so können darin die sauren Salze nur kohlensaure sein.

Wenn man aus den oben erwähnten Gründen in der Zusammenstellung nur die neutralen Salze anführen will, so muss man zunächst ermitteln, welche Menge des Kohlenstoffes in den neutralen kohlensauren Salzen enthalten ist. Dies ergibt sich aus folgender Betrachtung. In den neutralen Salzen ist die Summe der relativen Äquivalente der positiven und negativen Bestandtheile gleich. Zieht man daher die erstere von der letzteren ab, so stellt die Differenz das relative Äquivalent des in der freien und halbgebundenen Kohlensäure enthaltenen Kohlenstoffes. Diese Differenz ist:

Summe der rel. Äq. der neg. Best.	0·61908
„ „ „ „ „ pos. „	0·60272
rel. Äq. der freien und halbgeb. Kohlensäure =	0·01636.

Zieht man diese Zahl von dem relativen Äquivalente des Gesammtkohlenstoffes ab, so erhält man das relative Äquivalent des in den neutralen Kohlensäuresalzen enthaltenen Kohlenstoffes:

$$0{\cdot}04430 - 0{\cdot}01636 = 0{\cdot}02794.$$

Nach der Gleichung 1 erhält man die absolute Menge des in 1000 Thln. Wasser in der Form von neutralen Kohlensäuresalzen enthaltenen Kohlenstoffes, wenn man die Zahl 0·02794 durch das Äquivalent des Kohlenstoffes =6 multiplicirt. Hiernach ist:

		‰	w.
Kohlenstoff in den neutr. kohlens. Salzen..	C —	0·1676 —	0·02794.

Den rückständigen Theil des Kohlenstoffes berechnet man als wasserfreie Kohlensäure am einfachsten dadurch, dass man die Zahl 0·01636 mit dem Äquivalent der Kohlensäure (CO_2 = 22)

multiplicirt. Das Gewicht der in 1000 Thln. enthaltenen wasserfreien Kohlensäure ist daher:

$$\begin{array}{ccc} & ‰ & w. \\ 0{\cdot}01636\,.\,22 = & 0{\cdot}3599 & - 0{\cdot}01636. \end{array}$$

Nachdem so die relativen Äquivalente aller elementaren Bestandtheile ermittelt sind, berechnet man diese nach Procenten, mit Hilfe der zweiten Formel $w\,\% = \frac{100\,w}{s}$.

Dann hat man noch die Sauerstoffmengen zu berechnen, welche in den verschiedenen Salzen enthalten sind. In dem zum Beispiele gewählten Wasser zeigen die Reagentien, von den sauerstoffhaltigen Salzen, Kieselsäure-, Kohlensäure- und Schwefelsäuresalze an. Sind diese Salze neutral, so entsprechen ihnen folgende allgemeine Formel:

1. .... $MSiO_3$ [1])
2. .... MCO_3
3. .... $MS\,O_4$.

Man ersieht, dass in der ersten, auf je ein Äquivalent Silicium, drei Äquiv. in der zweiten auf je ein Äquiv. Kohlenstoff ebenfalls drei Äquiv., während in der dritten Formel auf je ein Äquiv. Schwefel vier Äquiv. Sauerstoff enthalten sind. Hiernach sind

in 1000 Thln. Wasser enthalten:

Si	0·0012
diesem entsprechen O_3	0·0051
C	0·1676
diesem entsprechen O_3	0·6704
S	8·4069
diesem entsprechen O_4	16·8139

Aus den so festgestellten Daten stellt man die Analyse, wie ich es meine, zweckmässig in folgender Weise zusammen.

Die analytischen Resultate des „Deák Ferencz" Bitterwassers:

	in 1000 Th. Wasser	rel. Äq. %	
Magnesium	3·5983	49·75 Mg.	
Natrium	6·3736	45·98 Na.	
Calcium	0·4452	3·69 Ca.	= 100
Kalium	0·1276	0·54 K.	
Eisen (mit Spuren von Al.)	0·0062	0·04 Fe.	

[1]) Das Äquivalent des Siliciums Si = 14·2.

		in 1000 Th. Wasser	rel. Äq. %
In den Schwefelsäuresalzen	Schwefelst.	8·4069	87·18 SO_4
	Sauerst.	16·8139	
Chlor		1·7495	8·18 Cl.
In den neutr. Kohlensäure	Kohlenst.	0·1676	4·63 CO_3
	Sauerst.	0·6704	
In den kieselsauren Salzen	Silicum	0·0012	0·01 S_4O_3
	Sauerst.	0·0051	
			= 100
Summe der fixen Bestandtheile		38·3654	
Die direct gefundene Summe		38·3989	
Kohlensäure		0·3399	2·71 CO_2%.

Das Volumen der freien Kohlensäure in 1000 KC. Wasser — 168·53 KC.
Die Reaction des Wassers ist alkalisch.

Bei einer derartigen Zusammenstellung sind die angeführten Mengen der elementaren Bestandtheile die unmittelbaren Ergebnisse der Analyse. Als solche sind sie gerade in dem Masse richtig und reel, wie die analytischen Methoden, nach welchen sie gewonnen wurden. Es ist klar, dass man aus diesen Zahlen auf den ersten Blick ersieht, wie viel von den einzelnen Elementarbestandtheilen in dem Wasser enthalten sind. Dies konnte bei der bisher üblichen Zusammenstellungsweise ohne mühsame Rechnungen nicht geschehen, da die einzelnen elementaren Bestandtheile zu Salzen gruppirt waren, und nur das Gewicht dieser Salze angeführt war. So z. B. konnte man unmittelbar nie wissen, wie viel Jod in einem Wasser enthalten ist, denn dieses wurde bald als Jodmagnesium, bald als Jodkalium oder als Jodnatrium angeführt, von welchen Salzen bekanntermassen dieselben Gewichtsmengen eine ganz verschiedene Jodmenge enthalten.

Ein bedeutender Vorzug dieser Zusammenstellungsweise über die übliche besteht desshalb darin, dass man mit ihrer Hilfe die absoluten Mengen der gemeinschaftlichen Bestandtheile in zwei verschiedene Mineralwasser, und daher die Ergebnisse ihrer Analysen unmittelbar vergleichen kann. Da die erwähnten Mengen von einer jeden Hypothese und individueller Anschuung vollkommen unabhängig sind, so kann bei dieser Art der Zusammenstellung der Fall nicht vorkommen, dass bei demselben Wasser, welches durch zwei verschiedene Chemiker mit gleichen Resultaten untersucht worden sind, die Mengen der gemeinschaftlichen Bestandtheile

verschieden wäre; was bei den üblichen Zusammenstellungen nicht selten geschah.

Ein ebenso unbestreitbarer Vorzug dieser Zusammenstellung ist es, dass durch sie der chemische Charakter irgend eines Wassers sicherer beurtheilt werden kann, als dies bisher geschehen konnte, und dass die chemischen Charaktere der verschiedenen Mineralwasser ebenfalls mit Präcision verglichen werden können. Dies geschieht mit Hilfe der Procente der relativen Äquivalente.

Diese Procente der relativen Äquivalente drücken die chemischen Verhältnisse für Mischungen ganz in derselben Weise aus, wie dies bei chemischen Formeln für homogene Verbindungen der Fall ist.

Der wesentliche Unterschied besteht nur darin, dass bei homogenen Verbindungen, im Sinne des Gesetzes der multipleren Proportionen, die Coëfficienten der chemischen Zeichen zu einander in sehr einfachen Verhältnissen stehen, und daher durch einfache ganze Zahlen ausgedrückt werden können; während bei Mischungen diese Coëfficienten alle möglichen Zahlenwerthe haben können. Da die relative Anzahl der Äquivalente durch Procente ausgedrückt ist, so schlage ich vor, die in dieser Weise construirten chemischen Formeln der Mischungen „procentische Formeln" zu nennen.

Die procentischen Formeln drücken ausser der Qualität auch das Verhältniss der Äquivalente der elementaren Bestandtheile aus. Aus diesem Verhältnisse kann man aber am sichersten den chemischen Charakter eines Mineralwassers beurtheilen. Denn es ist klar, dass das Mineralwasser seinen chemischen Charakter jenen Bestandtheilen verdankt, deren Äquivalente nicht aber deren absolute Menge überwiegend ist.

So sieht man z. B. aus der procentischen Formel des obigen Bitterwassers, dass dasselbe auf 49·75 Äquiv. Magnesium 45·98 Äquiv. Natrium, 3·69 Äquiv. Calcium u. s. w. enthält. Aus der Vergleichung der Äquivalente der negativen Bestandtheile geht hervor, dass in diesem Wasser auf 87·18 Äquiv. Sulphate, 8·18 Äquiv. Chloride und 4·63 Äquiv. Carbonate vorkommen. Da die Metalle mit den negativen Bestandtheilen in den Salzen nach gleichen Äquivalenten enthalten sind, ist aus den obigen Zahlen leicht einzusehen, dass die Hauptbestandtheile dieses Bitterwassers das schwefelsaure

Magnesium und das schwefelsaure Natrium sind. Vergleicht man das Äquivalent der neutralen Carbonate 4·63 mit dem der freien Kohlensäure 2·71, so ergibt sich, dass letztere nahezu die Hälfte des ersterrn ausmacht. Da zur Umwandlung von einem Äquivalente neutralen Carbonat MCO_3 in saures Salz (MHC_2O_6) gerade ein Äquivalent Kohlensäure erforderlich ist, so folgt aus den obigen Zahlen, dass von der Gesammtmenge der Carbonate etwas mehr als die Hälfte in der Form Bicarbonat und der Rest als neutrales Kohlensäuresalz vorhanden sind. Das unter den neutralen Kohlensäuresalzen ein Alkalisalz (wahrscheinlich $NaCO_3$) enthalten ist, geht aus dem Umstande hervor, dass das Wasser eine alkalische Reaction besitzt. Aus dem Gesagten geht hervor, dass dem fraglichen Wasser das Bitter- und Glaubersalz, ferner eine geringere Menge kohlensaures Natron einen eigenthümlichen chemischen Charakter verleihen. Man ersieht hierans, dass durch die procentische Formel, und der Summe der fixen Bestandtheile alle Anhaltspunkte gegeben sind, um die chemischen Verhältnisse eines Mineralwassers in wissenschaftlicher Beziehung beurtheilen zu können.

Da bei dieser Art der Zusammenstellung, die absolute Menge der einzelnen Salze nicht angegeben ist, so könnte man vielleicht gegen dieselbe einwenden, dass sie zwar der strengen Objectivität der Wissenschaft entspricht, dass sie aber dem Verständnisse der Beziehungen zwischen der chemischen Constitution und der Heilwirkung des Wassers, nicht die hinlänglichen Anhaltpunkte bietet; und dass desshalb der praktische Arzt sich nicht gehörig bezüglich dessen orientiren kann, welche Arzeneien und wie viel von denselben er seinen Kranken in einem Mineralwasser reicht.

Dass diesen zweifachen Anforderungen die bisher üblichen Zusammenstellungen nur scheinbar entsprochen haben, und dass die Ansicht, als hätten die üblichen Zusammenstellungen diesen Anforderungen wirklich genügt, bei einer objectiven Kritik nicht als berechtigt, oder wenigstens nicht als streng richtig betrachtet werden darf, ist wie ich meine, durch das bisher Gesagte hinlänglich gerechtfertigt. Vorausgesetzt, dass die Mengen der einzelnen Salze richtig angegeben werden könnten, so wäre zur richtigen Beurtheilung der Heilwirkung eines Mineralwassers meiner Ansicht nach, weniger die Kenntnisse der absoluten Menge der einzelnen

Salze, als vielmehr die Kenntniss des gegenseitigen Verhältnisses der Bestandtheile im Ganzen genommen, zu diesem Behufe erforderlich. Denn die eigenthümliche Heilwirkung der einzelnen Mineralwasser, ist wie leicht einzusehen, gerade von diesem gegenseitigen Verhältnisse der Bestandtheile, d. i. von dem chemischen Charakter abhängig. Dieses Verhältniss findet aber vorläufig seinen einfachsten Ausdruck in der procentischen Formel.

Wenn ein complicirtes Mineralwasser auf den lebenden Organismus eine Wirkung äussert, so üben alle seine Salze ihre eigenthümlichen Wirkungen zu gleicher Zeit aus. Bei diesem verwickelten Vorgang ist die Rolle einer bestimmten absoluten Menge eines einfachen Salzes, unter dem modificirenden Einfluss, der durch die Gegenwart der übrigen Salze verursachten chemischen und physiologischen Veränderungen, unstreitig eine wesentlich verschiedene, von der Rolle, welche derselben Menge des fraglichen Salzes dann zukommt, wenn es für sich auf einen bestimmten Theil des Organismus wirkt.

Aus diesen Betrachtungen ist es ersichtlich, dass der Zusammenhang, welcher zwischen der Heilwirkung und dem chemischen Charakter der Mineralwasser ohne Zweifel besteht, nur dann in präciser Form aufzufinden ist, wenn die durch die unbefangene Erfahrung festgestellte Heilwirkung der einzelnen Mineralwasser, mit dem chemischen Gesammtcharakter derselben, nicht aber mit der absoluten Menge der einzelnen Salze combinirt wird. Wenn dieser Zusammenhang in gesetzmässiger Exactheit ermittelt sein wird, dann wird es vielleicht gelingen, aus dem chemischen Charakter der Mineralwasser auch ihre Heilwirkungen im Voraus präciser zu bestimmen.

Wenn der praktische Arzt das Mineralwasser als ein selbstständiges Heilmittel ansieht, dessen individueller Charakter wenigstens in chemischer Beziehung, durch die procentische Formel bestimmt ist, so dient ihm zur Beurtheilung der Menge der wirksameren Bestandtheile als sicheres Maass, die in 1000 Thln. Wasser enthaltene Menge des betreffenden elementaren Bestandtheiles, und die Summe der fixen Bestandtheile. Da $4^1/_6$ Loth gerade 1000 Gran betragen, so drücken die fraglichen Zahlen in Granen die Gewichtsmenge der Bestandtheile in $4^1/_6$ Loth Wasser aus.

Die Vergleichung des chemischen Charakters der verschiedenen Wasser geschieht, mit Hilfe der procentischen Formel leicht und exact. Vergleichen wir z. B. mit dem obigen Bitterwasser, das „Frank"'sche Bitterwasser von Ofen [1]).

Die procentische Formel des ersten Wassers:

posit. Best.	49·75 Mg.	45·98 Na.	3·69 Ca	0·54 K	0·04 Fe.
negat. Best.	87·18 SO_4	8·18 Cl.	4·63 CO_3	0·01 S_1O_4	2·71 CO_3

Summe der fixen Bestandtheile = 38.40.

Die procentische Formel des zweiten Wassers:

posit. Best.	55·7 Mg.	39·8 Na.	4·3 Ca.	0·2 K.
negat. Best.	93·0 SO_4	4·5 Cl.	2·5 CO_3	1·4 CO_3

Summe der fixen Bestandtheile = 65.22.

Aus der Vergleichung der Coëfficienten der gemeinschaftlichen Bestandtheile ersieht man sogleich, dass der Charakter beider Wasser ein ganz ähnlicher ist und dass der wesentliche Unterschied zwischen denselben darin besteht, dass in zweitem Wasser das schwefelsaue Magnesium die anderen Bestandtheile noch mehr überwiegt; ferner dass die absolute Menge der mineralischen Bestandtheile beinahe doppelt so gross ist, als in dem ersten.

Da das hier dargelegte Verfahren, welches von einer jeden Hypothese, und daher von der individuellen Ansicht ganz unabhängig ist, so wäre es meines Erachtens dazu geeignet, um einer allseitig gewünschten aber bisher entbehrten Convention bei der Zusammenstellung der Mineralwasseranalysen zum Ausgangspunkte zu dienen. Es ist leicht einzusehen, dass man auf Grund der procentischen Formel, die Mineralwasser ihrem chemischen Charakter nach, auch exacter eintheilen könnte als dies bisher geschehen ist.

Alles was hier bezüglich der Zusammenstellung der Mineralwasseranalysen gesagt worden ist, gilt natürlich in demselben Maasse für andere Mischungen und Gemenge.

---

[1]) Dieses Bitterwasser wurde durch Herrn Otto Seiben im hiesigen Universitätslaboratorium untersucht. Veröffentlicht am 23. November 1864 in der ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Pest.

Solche sind die isomorphen Mischungen, die verschiedenen Felsarten, die Ackererde, die Asche der Pflanzen, der Thiere, des Blutes u. s. w. Bei allen diesen Substanzen wäre eine Zusammenstellung der Analysen in oben gedachtem Sinne, zur Übersicht der analytischen Resultate geeigneter. Aus ihren procentischen Formeln könnte man ihren chemischen Charakter genau in derselben Weise beurtheilen und vergleichen, wie dies bei den homogenen Verbindungen mittelst der chemischen Formel geschieht.

Über die Krümmung von Spectrallinien.

Von L. Ditscheiner.

(Mit 1 Tafel.)

Wenn man durch ein Prisma, dessen brechende Kante vertical gestellt ist, eine Reihe verticaler Linien, etwa die Kanten eines Fensterkreuzes betrachtet, so sieht man diese nicht in ihrer ursprünglichen Gestalt, sondern sie erscheinen, von der durch das Prisma gleichzeitig verursachten Dispersion abgesehen, gekrümmt. Jede dieser krummen Linien besitzt in der horizontalen Richtung eine Axe, da sie über und unter derselben gleichmässig sich ausdehnt und in dem Durchschnittspunkte mit dieser Axe eine verticale Tangente, von der sich die einzelnen Punkte, je weiter sie von der Axe entfernt sind, auch immer mehr in der Richtung gegen die Prismenkante entfernen [1]). Hat man das Prisma ursprünglich so gehalten, dass der in der horizontalen Ebene gegen das Auge austretende, von einer bestimmten Verticallinie kommende Strahl keinen sehr grossen Winkel gegen die Normale der dem Auge näher gelegenen Prismenfläche bildet, so kann man das Prisma um einen nicht unbedeutenden Winkel in dem einen oder dem andern Sinne drehen, ohne dass das Auge im Stande wäre, eine bedeutende Änderung in der Form der krummen Linie zu bemerken. Wird dieser Winkel grösser und hat man das Prisma so gedreht, dass die Prismenkante sich vom Auge entfernte, so wird die Krümmung eine immer bedeutendere, je mehr sich dieser Winkel jenem von 90 Graden nähert. Hat man aber das Prisma im entgegengesetzten Sinne gedreht, nähert man sich also dem senkrechten Austritte des genannten Strahles oder ist man, wie dies bei Substanzen mit kleinen Brechungsquotienten und bei kleinen brechenden Winkel noch möglich ist, über diesen hinausgegangen, so erreicht man bald die

---

[1]) v. Quintus Icilius. Experimentalphysik. S. 255.

Grenze der Totalreflexion, man ist also dann nicht mehr im Stande, die betreffende Linie zu beobachten. Da diese Drehung in den meisten Fällen nur wenige Grade betragen kann, so werden auch die während derselben eintretenden Änderungen in der Form der krummen Linie für das Auge nicht leicht merklich sein, nur so viel ist unmittelbar zu erkennen, dass die die Grenze der Totalreflexion bildende Linie mit der letzten noch sichtbaren Linie bezüglich der Form übereinstimmend ist. Da bei dieser Drehung alle Linien in demselben Sinne gekrümmt erscheinen, so wird auch keine derselben, wie das Prisma auch immer gestellt sein mag, gerade erscheinen können.

Betrachtet man durch ein solches Prisma einen verticalen Stab, so erscheint derselbe ebenfalls gekrümmt, aber man ist, wenn derselbe nur genügend biegsam ist, leicht im Stande demselben eine solche Form zu geben, dass er durch das Prisma angesehen, als gerade verticale Linie erscheint. Es besitzt dann in Wahrheit eine ähnliche Form, wie die durch das Prisma gesehenen geraden Linien, nur wird er im entgegengesetzten Sinne gekrümmt sein müssen, seine convexe Seite wird gegen die Prismenkante gerichtet sein.

Aber nicht nur bei Beobachtung des Spectrums mit freiem Auge, sondern auch bei jenen Spectralapparaten, welche mit Collimator und Beobachtungsfernrohr versehen sind, tritt die Erscheinung von gekrümmten Spectrallinien auf; nur sind diese Linien im entgegengesetzten Sinne gekrümmt als jene, die sich bei Beobachtung mit freiem Auge zeigen, da durch das astronomische Beobachtungsfernrohr die ganze Erscheinung umgekehrt wird. Es ist dies besonders dann der Fall, wenn wegen Erreichung grösserer Intensität, die Brennweite der Objectivlinse des Fernrohres und der Collimatorlinse keine sehr grosse ist und wenn das Fernrohr ein höheres Spectrum im Gesichtsfeld zeigen soll, was bei gleicher Intensität nur durch eine höhere Spalte zu erreichen ist.

Mit der Anzahl der Prismen steigt unter übrigens gleichen Umständen die Abweichung der Spectrallinien von der geraden Linie.

Es gibt kaum einen Spectralapparat, bei welchem man nicht die Krümmung dieser Linien bei genauerer Beobachtung bemerken kann, ein Übelstand, der sich jedoch glücklicherweise, wenn auch

auf Kosten der Intensität auf ein Minimum bringen lässt. Dort, wo man eine grössere Lichtintensität verlangt, wie etwa bei spectralanalytischen Untersuchungen, wo es sich auch nicht um eine genaue Messung handelt, ist die Krümmung der Linien von keinem schädlichen Einflusse und man kann sich dieselbe gefallen lassen. Bei schärferen Messungen aber kann diese Krümmung eine Ungenauigkeit verursachen, wenn nämlich das Prisma nicht sehr vollkommen aufgestellt ist, wenn also seine Kante nicht sehr genau parallel zur Spalte ist.

Der Grund dieser Erscheinung ist darin zu suchen, dass jene Strahlen, welche von Punkten unter oder über dem Durchschnittspunkte, der durch das Auge senkrecht auf die Prismenkante gelegten Ebene mit der betrachteten verticalen Linie, in das Auge gelangen, durch die Brechung im Prisma so abgelenkt werden, dass sie nach dem Austritte aus diesem nicht mehr in einer durch das Auge gehenden verticalen Ebene, sondern in einer Kegelfläche liegen. Es würde keinen Schwierigkeiten unterliegen, die Gleichung dieser Kegelfläche abzuleiten, man hätte nämlich durch einen das Auge repräsentirenden Punkt und durch irgend einen andern mit den unbestimmten Coordinaten x, y, z ausgezeichneten, eine Linie zu legen, den Durchschnitt dieser mit der einen Prismenfläche zu suchen, durch diesen Durchschnittspunkt den gebrochenen Strahl zu legen und endlich für dessen Durchschnittspunkt mit der zweiten Prismenfläche den abermals gebrochenen Strahl zu suchen. Durch die Bedingung, dass dieser letzte austretende Strahl durch einen Punkt der beobachteten Verticallinie gehen müsse, wird sich eine Relation für die gegenseitige Abhängigkeit der ursprünglich ganz beliebigen Coordination x, y, z gewinnen lassen, welche unmittelbar die gesuchte Gleichung der Kegelfläche liefert. Aber diese Gleichung ist eine so complicirte, dass ihre Discussion eine ungemein schwierige ist, wenn man sich nicht eine Bedingung stellt, welche wir schon im Voraus acceptiren wollen, die nämlich, dass die beobachtete Verticallinie in bedeutender oder unendlicher Entfernung von dem Prisma sich befinde, dass also die von einem Punkte dieser Verticallinie auf das Prisma fallenden Strahlen als parallel angesehen werden können.

Das Versetzen der Spalte, und als solche wollen wir in der Folge die beobachtete Verticallinie immer ansehen, geschieht aber

bei den Spectralapparaten durch die Anwendung einer Collimatorlinse, in deren Brennpunkt die Spalte sich befindet. Für diesen Fall nun werden wir die Gleichung der oben bezeichneten Kegelfläche, deren Spitze dann im Mittelpunkte der Objectivlinse des Beobachtungsfernrohres zu verlegen sein wird, aufsuchen; die erhaltenen Resultate werden also nur dann von Giltigkeit sein können, wenn die beobachtete Linie sehr weit von dem Prisma, also auch vom Auge entfernt ist.

Alle von irgend einem Punkte der Spalte ausgehenden Strahlen werden durch die Collimatorlinse bekanntlich in der Weise gebrochen, dass sie nach ihrem Austritte aus dieser, als zur Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Mittelpunkte der Linse parallel angesehen werden können vorausgesetzt, dass die Spalte keine sehr bedeutende Höhe gegen die Brennweite der Linse habe. Die von Punkten, über oder unter dem Durchschnittspunkte der optischen Axe des Collimators mit der Spalte, durch die Linse kommenden Strahlen werden also mit dieser Axe einen gewissen Winkel bilden und also auch bezüglich des Prismas eine Einfallsebene besitzen, die nicht mit der Ebene der beiden Prismenflächennormalen zusammenfällt. Nach dem Austritte aus dem Prisma, werden die in ihrem Parallelismus durch die Brechung nicht gestörten Linien durch ein Fernrohr betrachtet, in einer durch den Brennpunkt der Objectivlinse senkrecht auf der optischen Axe stehenden Ebene wird das Bild der Spalte entstehen und zwar für jeden Punkt dort, wo die durch den Mittelpunkt der Objectivlinse parallel zu den aus dem Prisma kommenden Strahlen gezogene Linie diese Verticalebene schneidet. Ist das Prisma nicht zwischen Collimator und Fernrohr, so erscheint das Bild der verticalen Spalte wieder als verticale Linie; die durch den Mittelpunkt der Objectivlinse und jeden Punkt des Spaltenbildes gelegten Linien bilden eine Ebene. Durch die Brechung im Prisma aber werden die Strahlen so abgelenkt, dass die durch das Spaltenbild und den Mittelpunkt der Objectivlinse gelegten Linien eine Kegelfläche bilden. Diese Linien aber müssen nach ihrer Brechung durch das Prisma, wenn wir ihren Weg rückwärts verfolgen, zu der durch die Spalte und den Mittelpunkt der Collimatorlinse gelegten Ebene parallel sein, denn nur in diesem Falle werden sie durch die Collimatorlinse wieder zur verticalen Spalte geführt werden können. Diese Bedingung kann uns nun

dazu dienen, die Gleichung der genannten Kegelfläche abzuleiten, mit ihrer Kenntniss kommen wir leicht zur Gleichung des Spaltenbildes, wir brauchen nur durch den Brennpunkt der Objectivlinse eine Verticalebene zu legen und den Durchschnitt derselben mit der Kegelfläche zu bestimmen.

Wir wählen ein rechtwinkliches Coordinatensystem $OXYZ$, so dass OY die Richtung der optischen Axe des Fernrohres ist und da es gleichgiltig, in welcher Entfernung vom Prisma die Objectivlinse desselben sich befindet, so wollen wir deren Mittelpunkt nach O verlegen, durch welchen Punkt gleichzeitig die Prismenkante, die also dann mit OZ zusammenfällt, geht. ON und ON' seien die Normalen der beiden Prismenflächen, ON jener der Fläche, in welcher der Eintritt der vom Spaltenbild kommenden, und $ON_{,}'$ jener, durch welche der Austritt der gegen die Collimatorlinse und Spalte gehenden Lichtstrahlen erfolgt. Den Winkel der optischen Axe des Fernrohres mit der ersten Normalen ON bezeichnen wir mit α, er ist gleichzeitig der Einfallswinkel jenes Strahles, der während der Brechung in der Ebene der beiden Normalen bleibt, der also vom Mittelpunkte der Spalte in das Fernrohr gelangt. Den Winkel NON' beider Normalen, d. i. den Prismenwinkel selbst bezeichnen wir mit A. Durch einen Punkt mit den unbestimmten Coordinaten x, y, z und durch O legen wir eine gerade Linie, welche eine um O als Mittelpunkt gelegte Kugel vom Radius $= 1$ etwa in A schneidet. Die Winkel, welche diese Linie mit den drei Coordinatenaxen bildet, nämlich AX, AY und AZ sind gegeben durch

$$\cos a = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \cos b = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \cos c = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Der Winkel, welchen dieser einfallende Strahl mit der ersten Normale ON bildet, nämlich $AM = m$ wird bestimmt durch

$$\cos m = \cos b \cos \alpha + \sin b \sin \alpha \cos AYM$$

und wegen $\cos AYM = \cos AYX = \frac{\cos a}{\sin b}$ wird

$$\cos m = \cos b \cos \alpha + \cos a \sin \alpha$$

$$= \frac{y \cos \alpha + x \sin \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

oder

$$\sin m = \sqrt{\frac{(y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Der in das Prisma eintretende gebrochene Strahl schneidet die Kugel in einem Punkte des grössten Kreises AN, und seine Lage ergibt sich, unter μ den Brechungsquotienten einer bestimmten Farbe des Prismas verstanden durch die Relation $\mu \sin BN = \sin AN$, woraus wir, wenn BN mit m' bezeichnet, und der Kürze halber $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gesetzt wird, finden:

$$\sin m' = \frac{1}{\mu R} \sqrt{(y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 + z^2}.$$

und

$$\cos m' = \frac{1}{\mu R} \sqrt{R^2 \mu^2 - (y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 - z^2}.$$

Den Einfallswinkel des Strahles OB gegen die zweite Prismenfläche, nämlich BN', bezeichnen wir mit n und erhalten

$$\cos n = \cos m' \cos A + \sin m' \sin A \cos w$$

und wegen

$$\cos w = \frac{\cos b - \cos m \cos \alpha}{\sin m \sin \alpha}$$

$$= \frac{y \sin \alpha - x \cos \alpha}{\sqrt{(y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 + z^2}}$$

wird, nach Einführung der Werthe für $\cos m'$ und $\sin m'$ und nach einigen Reductionen,

$$\cos n = \frac{1}{\mu R} \Big[\cos A \sqrt{\mu^2 R^2 - (y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 - z^2}$$

$$+ (y \sin \alpha - x \cos \alpha) \sin A\Big],$$

woraus

$$\sin^2 n = \frac{1}{\mu^2 R^2} \Big[\mu^2 R^2 \sin^2 A + z^2 \cos^2 A$$

$$- (y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 (\sin^2 A - \cos^2 A)$$

$$- 2(y \sin \alpha - x \cos \alpha) \sin A \cos A \sqrt{\mu^2 R^2 - (y \sin \alpha - x \cos \alpha)^2 - z^2}\Big].$$

Der schliesslich aus dem Prisma austretende Strahl OC wird die Kugelfläche in dem grössten Kreise $N'B$ schneiden, und wenn $N'C = n'$ gesetzt wird, ist wegen $\sin n' = \mu \sin n$

$$\sin^2 n' = \frac{1}{R^2}\Big[\mu^2 R^2 \sin^2 A + z^2 \cos^2 A$$

$$-(y \sin\alpha - x\cos\alpha)^2 (\sin^2 A - \cos^2 A)$$

$$-2(y\sin\alpha - x\cos\alpha)\sin A \cos A \sqrt{\mu^2 R^2 - (y\sin\alpha - x\cos\alpha)^2 - z^2}\Big]$$

Die von diesen austretenden Strahlen zu erfüllende Bedingung, dass sie alle in einer durch den Punkt O gehenden Verticalebene liegen, da sie alle durch den Punkt O gehend zu einer bestimmten verticalen Ebene parallel sein müssen, werden wir dadurch ausdrücken können, dass, welche Werthe x, y, z auch immer haben mögen, der Winkel $N'D$ constant sein muss, vorausgesetzt, dass der grösste Kreis CD durch Z geht. Um nun $N'D$ zu bestimmen, brauchen wir vorerst den Winkel $CN'D = w'$. Es wird aus dem sphärischen Dreiecke $BN'N$

$$\sin w' = \frac{\sin m'}{\sin n} \sin w = \frac{z}{\mu R \sin n}$$

$$= \frac{z}{R \sin n'}.$$

Aus dem rechtwinklichen sphärischen Dreiecke $N'CD$ erhalten wir sodann, wenn die Seite $N'D$ desselben mit v bezeichnet wird

$$\operatorname{cotg} v = \frac{\operatorname{cotg} n'}{\cos w'}$$

und quadrirt, ferner statt $\operatorname{cotg} n'$ und $\cos w'$ die entsprechenden Sinuse eingeführt wird nach einiger Reduction

$$\operatorname{cotg}^2 v = \frac{R^2(1 - \sin^2 n')}{R^2 \sin^2 n' - z^2}$$

woraus

$$\sin^2 v = \frac{R^2 \sin^2 n' - z^2}{R^2 - z^2}.$$

Führt man nun statt $\sin^2 n'$ seinen oben angeführten Werth ein und bedenkt man, dass $R^2 - z^2 = x^2 + y^2$ ist, so erhält man nach einer kleinen Reduction und nach Hinwegschaffung des Bruches

$$(x^2+y^2)\sin^2 v = (\mu^2 R^2 - z^2)\sin^2 A$$
$$-(y\sin\alpha - x\cos\alpha)^2(\sin^2 A - \cos^2 A)$$
$$-2(y\sin\alpha - x\cos\alpha)\sin A\cos A\sqrt{\mu^2 R^2 - (y\sin\alpha - x\cos\alpha)^2 - z^2}.$$

Um $\sin^2 v$ zu bestimmen, bedenken wir, dass diese Gleichung auch giltig sein muss für jenen Strahl, der mit der optischen Axe des Fernrohres zusammenfällt, für welchen aber $x = z = 0$ ist. Durch Substitution dieser Werthe erhält man da y^2 zu beiden Seiten ebenfalls wegfällt

$$\sin^2 v = \mu^2\sin^2 A - \sin^2\alpha(\sin^2 A - \cos^2 A)$$
$$-2\sin\alpha\sin A\cos A\sqrt{\mu^2 - \sin^2\alpha}$$
$$= \sin^2 A(\mu^2 - \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha\cos^2 A - 2\sin\alpha\sin A\cos A\sqrt{\mu^2 - \sin^2\alpha}$$
$$= (\sin\alpha\cos A - \sin A\sqrt{\mu^2 - \sin^2\alpha})^2.$$

Es wird somit die Gleichung für unsere Kegelfläche, wenn wir statt R^2 seinen Werth $x^2 + y^2 + z^2$ setzen, ferner die Glieder, welche $x^2 + y^2$ ebenso jene, welche z^2 allein enthalten, zusammen nehmen

$$(x^2+y^2)\left[\sin^2\alpha(\sin^2 A - \cos^2 A) + 2\sin\alpha\sin A\cos A\sqrt{\mu^2 - \sin^2\alpha}\right]$$
$$+ z^2(\mu^2 - 1)\sin^2 A - (y\sin\alpha - x\cos\alpha)^2(\sin^2 A - \cos^2 A)$$
$$-2(y\sin\alpha - x\cos\alpha)\sin A\cos A\sqrt{M} = 0,$$

wobei $M = (x^2+y^2)\mu^2 - (y\sin\alpha - x\cos\alpha)^2 + z^2(\mu^2 - 1)$.

Um nun die Gleichung des durch die Objectivlinse gebildeten Spaltenbildes zu erhalten, hätten wir in dieser Gleichung nur $y = p$, d. i. die Brennweite dieser Linse zu setzen; da wir es hier aber mit einer Kegelfläche zu thun haben, so genügt es $y = 1$ zu substituiren, wir haben dann nur in der so erhaltenen Gleichung um auf jene des eigentlichen Spaltenbildes zu kommen statt x und z, $\frac{x}{p}$ und $\frac{z}{p}$ zu setzen.

Um aber eine weitere Discussion dieser Gleichung zu ermöglichen, müssen wir uns noch einige Abkürzungen erlauben, die wir vorerst bei einem speciellen Falle anwenden wollen; wir meinen jenen, für welchen $\alpha = 0$ und $A = 45^\circ$ ist, für welchen also bei einem 45° Prisma, der horizontal in das Auge kommende Strahl senkrecht gegen

die Prismenfläche austritt. Wir erhalten unter dieser Bedingung, nachdem $y=1$ gesetzt worden ist, folgende Gleichung

$$z^2(\mu^2-1)+2x\sqrt{(x^2+1)\mu^2-x^2+z^2(\mu^2-1)}=0,$$

aus welcher man unmittelbar erkennt, dass x nur negativer Werthe fähig ist, da μ grösser als 1 und die Wurzelgrösse als von cos m' herrührend, nur einen positiven Werth haben kann. Wird diese Gleichung nach z aufgelöst, so erhält man

$$z=\pm\sqrt{\frac{2x}{\mu^2-1}(x\pm\mu\sqrt{1+x^2})}.$$

Da x negativ und $\mu\sqrt{1+x^2}$ stets grösser als x ist, so ist unter der Wurzel nur das negative Zeichen erlaubt, es kann also z nur zwei Werthe erhalten, die sich aber bezüglich des Zeichens unterscheiden; wesswegen auch die Curve um die xAxe symmetrisch ist.

Nehmen wir nun an, dass wir die krumme Linie, wie dies auch thatsächlich bei den Spectralapparaten der Fall ist, nicht sehr weit über die xAxe beobachten können, so wird es erlaubt sein, x^2 gegen die Einheit zu vernachlässigen, wodurch wir erhalten, wenn wir gleichzeitig die ganze Gleichung auf das Quadrat erheben

$$z^2=\frac{2x^2}{\mu^2-1}-\frac{2\mu x}{\mu^2-1}$$

eine Gleichung, die eine Hyperbel repräsentirt. Aber es ist in diesem Falle auch erlaubt, x^2 gegen x und z^2 zu vernachlässigen, indem die Erfahrung lehrt, dass x gegen z sehr klein ist, es wird also x^2 gegen z^2 noch viel kleiner sein. Wir kommen so auf

$$z^2=-\frac{2\mu}{\mu^2-1}x$$

eine Gleichung einer Parabel.

Ganz dasselbe, was wir der Einfachheit wegen, bei einem speciellen Falle gethan, kann man auch mit unserer obigen allgemeinen Gleichung vornehmen und sie so auf jene einer Parabel zurückführen.

Setzen wir in unserer allgemeinen Gleichung für die Kegelfläche $y=1$, erheben wir dieselbe auf das Quadrat, so können wir,

da auch z gegen die Einheit als sehr klein angenommen werden muss, alle Glieder, welche höhere als die zweiten Potenzen der Variablen, so wie jene, welche x^2 allein enthalten, weglassen und erhalten so nach einigen Reductionen

$$\begin{aligned}(\mu^2-1)\sin A\,(\cos A\sin\alpha-\sin A\sqrt{\mu^2-\sin^2\alpha})z^2\\ =2\cos\alpha[\sin A\cos A(\mu^2-2\sin^2\alpha)\\ +\sin\alpha(\sin^2 A-\cos^2 A)\sqrt{\mu^2-\sin^2\alpha}]\,x.\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist aber noch einer weiteren Vereinfachung fähig, wenn wir an den geeigneten Orten statt dem Einfallswinkel α, den ihm entsprechenden Brechungswinkel β einführen, nämlich statt $\sin\alpha$ und $\sqrt{\mu^2-\sin^2\alpha}$ setzen, $\mu\sin\beta$ und $\mu\cos\beta$. Man erhält so

$$\begin{aligned}(\mu^2-1)\sin A(\cos A\sin\beta-\sin A\cos\beta)z^2\\ =2\mu\cos\alpha[\sin A\cos A\,(\cos^2\beta-\sin^2\beta)\\ +\sin\beta\cos\beta\,(\sin^2 A-\cos^2 A)]\,x\end{aligned}$$

und wegen $2\sin a\cos a=\sin 2a$ und $\cos^2 a-\sin^2 a=\cos 2a$, wird

$$\begin{aligned}-(\mu^2-1)\sin A\sin(A-\beta)z^2\\ =\mu\cos\alpha\,(\sin 2A\cos 2\beta-\sin 2\beta\cos 2A)\,x.\end{aligned}$$

Hieraus

$$z^2=-\frac{\mu\cos\alpha\sin 2(A-\beta)}{(\mu^2-1)\sin A\sin(A-\beta)}x$$

und schliesslich

$$z^2=-\frac{2\mu\cos\alpha\cos(A-\beta)}{(\mu^2-1)\sin A}x$$

als die Gleichung unseres Spaltenbildes für eine Brennweite $=1$ der Objectivlinse des Beobachtungsfernrohres. Ist diese Brennweite aber $=p$, so wird

$$z^2=-\frac{2p\mu\cos\alpha\cos(A-\beta)}{(\mu^2-1)\sin A}x.$$

Wir haben diese Gleichung abgeleitet unter der Voraussetzung, dass der in der horizontalen Ebene von der Objectivlinse auf das Prisma fallende Strahl die Richtung gegen die Prismenkante habe, wie etwa bei der Minimumstellung. Bei Prismen aber von kleinem brechenden Winkel oder von hinreichend kleinen Brechungsquotienten kann dieser Strahl auch so gehen, dass er sich immer mehr

von der Prismenkante zu entfernen sucht. Die Ableitung für diesen Fall ist ganz dieselbe, wie die eben durchgeführte, nur haben die Normalen der Prismenflächen gegen den einfallenden Strahl, d. i. die y Axe die Lage wie etwa in Fig. 2. Wir können aber die entsprechende Gleichung aus unserer obigen einfach dadurch erhalten, dass wir statt α, $-\alpha$ also auch statt β, $-\beta$ setzen, wodurch

$$z^2 = \frac{2p\mu \cos\alpha \cos(A+\beta)}{(\mu^2-1)\sin A} x$$

wird. Es wird jedoch diese Formel nur sehr selten in Anwendung kommen, da sie nur bei kleinen Prismenwinkeln und kleinen Brechungsquotienten möglich wird, ein Fall, der bei Spectralapparaten geradezu vermieden wird.

Bei der ersteren Formel erkennen wir sofort, dass der Parameter, der uns als Mass für die Krümmung dienen kann, unter sonst gleichen Umständen desto grösser wird, je grösser die Brennweite der Objectivlinse des Fernrohres ist. Die Anwendung von Fernröhren mit grösserer Brennweite wird also auch weniger krumme Spectrallinien ergeben.

Je grösser der Brechungsquotient μ des Prismas ist, desto grösser wird auch die Krümmung der Linien sein, denn für ein grösseres μ wird sowohl der Bruch $\frac{\mu}{\mu^2-1}$ als auch $\cos(A-\beta)$ kleiner.

Endlich wird auch die Krümmung eine desto bedeutendere sein, je grösser der brechende Winkel A des Prismas ist; denn $\sin A$ im Nenner wird grösser, $\cos(A-\beta)$ im Zähler kleiner.

Was den Einfluss der Stellung des Prismas, die von α abhängig, anbelangt, so ist dieser nicht sogleich zu erkennen, da $\cos\alpha$ bei einem Wachsen von α kleiner wird, während $\cos(A-\beta)$ grösser wird. Es ist in diesem Falle ein Maximum des Parameters bei einer gewissen Stellung des Prismas zu erwarten. Bei unserer zweiten Gleichung ist dies jedoch nicht der Fall, da sowohl $\cos\alpha$ als auch $\cos(A+\beta)$ bei einem Wachsen von α immer kleiner werden. Um den Werth von α oder des ihm entsprechenden β zu finden, bei welchen der Parameter P ein Maximum wird, substituiren wir in dessen Gleichung statt $\cos\alpha$ den entsprechenden Werth $\sqrt{1-\mu^2\sin^2\beta}$

und setzen den ersten Differenzialquotienten $\frac{dP}{d\beta} = 0$, wodurch wir die Gleichung erhalten

$$\mu^2 \sin\beta \cos(A-2\beta) = \sin(A-\beta),$$

welche leicht auf die Form

$$\operatorname{tg}^3\beta - \frac{2\mu^2-1}{\mu^2-1}\operatorname{tg}A \operatorname{tg}^2\beta - \frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\operatorname{tg}\beta + \frac{1}{\mu^2-1}\operatorname{tg}A = 0$$

gebracht werden kann. Es liefert uns diese Gleichung jenen Werth von β, für welchen P ein Maximum.

Aus dieser Gleichung erhält man jederzeit drei reele Wurzeln, von welchen jedoch nur eine in unserem Falle angewendet werden kann, denn dieses β ist gewissen Bedingungen unterworfen. Einmal darf es nicht negativ sein, da unsere Gleichung für negative β kein Maximum besitzt, dann darf $\sin\beta$ nie grösser als $\frac{1}{\mu}$ sein, weil α nie grösser als 90° sein kann, endlich ist es wegen der möglichen Totalreflexion an der zweiten Prismenfläche an die Bedingung gebunden $\mu\sin(A-\beta) = 1$, β darf nämlich nie kleiner sein als der daraus resultirende Werth.

Eine Wurzel dieser Gleichung aber ist stets negativ und liegt zwischen

$$\operatorname{tg}\beta = -\sqrt{\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}} \text{ und } \operatorname{tg}\beta = 0,$$

die eine positive Wurzel liegt zwischen

$$\operatorname{tg}\beta = 0 \text{ und } \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}}, \text{ wobei } \sin\beta = \frac{1}{\mu}$$

die zweite positive endlich zwischen

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu^2-1}} \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(2\mu^2-1)\operatorname{tg}A + \sqrt{(2\mu^2-1)^2 + 4(\mu^4-1)}}{2(\mu^2-1)}.$$

Es ist sogleich ersichtlich, dass nur die erste positive Wurzel ein mögliches Maximum zu liefern im Stande, wenn überhaupt ein

solches erlaubt ist, denn es kann der Fall eintreten, dass das so erhaltene β zwischen 0 und jenen Werth liegt, den $\mu \sin(A-\beta) = 1$ gibt, ein Fall, für welchen das Maximum wegen bereits eingetretener Totalreflexion nicht mehr zu beobachten ist.

Ich habe für einen mittleren Brechungsquotienten $\mu = 1\cdot5$ und für verschiedene Prismenwinkel die Werthe für die drei Wurzeln gerechnet.

Für $A = 26^\circ\, 33'\, 55''$ $(\operatorname{tg} A = 0\cdot5)$ sind dieselben

$$-55^\circ\, 33'\, 38''; \; 8^\circ\, 11'\, 6''; \; 68^\circ\, 15'\, 6''$$

da β nicht grösser als $41^\circ\, 48'\, 38''$ und nicht kleiner als $-15^\circ 14' 43''$ sein kann, so ist nur $\beta = 8^\circ\, 11'\, 6''$ anzuwenden. Bei einem Einfallswinkel $\alpha = 12^\circ\, 19'\, 9''$ wird also das Maximum des Parameters eintreten, also auch die entsprechende Linie am wenigsten gekrümmt erscheinen.

Für $A = 45^\circ$ sind die Wurzeln

$$-44^\circ\, 54'\, 39''; \; 15^\circ\, 39'\, 9''; \; 70^\circ\, 38'\, 31''.$$

Da β nicht grösser als $41^\circ\, 48'\, 38''$ und nicht kleiner als $3^\circ\, 11'\, 22''$ sein kann, so ist nur $\beta = 15^\circ\, 39'\, 9''$ zu gebrauchen, für welches $\alpha = 23^\circ\, 52'\, 21''$ wird.

Für $A = 60^\circ$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$-64^\circ\, 5'\, 22''; \; 18^\circ\, 35'\, 47''; \; 75^\circ\, 59'\, 32''.$$

Da β wieder nicht grösser als $41^\circ\, 48'\, 38''$ und nicht kleiner als $18^\circ\, 11'\, 22''$ sein darf, so ist wieder nur die erste positive Wurzel anzuwenden erlaubt, aber der entsprechende Werth von β nähert sich schon sehr der Grenze, bei welcher die Totalreflexion beginnt; α wird in diesem Falle $= 28^\circ\, 34'\, 40''$. Der Strahl, für welchen $\alpha = 27^\circ\, 55'\, 13''$ ist, wird schon total reflectirt.

Endlich ist für $A = 80^\circ$ das Maximum nicht mehr zu beobachten, denn keine der drei Wurzeln

$$-80^\circ\, 23'\, 11''; \; 24^\circ\, 56'\, 1''; \; 84^\circ\, 40'\, 35''$$

gibt ein hier mögliches β, da β kleiner als $41^\circ\, 48'\, 38''$ und grösser als $38^\circ\, 11'\, 22''$ sein muss.

Um das Maximum des Parameters oder die Stellung des Prismas, bei welcher die Krümmung der Spectrallinien die geringste ist, beobachten zu können, wird man also Prismen mit kleinen brechenden Winkeln wählen müssen.

Für die Minimumstellung des Prismas, welche bei Spectralapparaten meistens oder wenigstens nahezu eingehalten werden muss, ist $\beta = \frac{A}{2}$, somit $\cos\alpha = \sqrt{1-\mu^2 \sin^2\frac{A}{2}}$, also auch die Gleichung einer Spectrallinie

$$z^2 = -\frac{2\mu p \sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{A}{2}}.\,\mathrm{Cos}\frac{A}{2}}{(\mu^2-1)\sin A}x$$

$$= -\frac{\mu p \sqrt{1-\mu^2\sin^2\frac{A}{2}}}{(\mu^2-1)\sin\frac{A}{2}}x.$$

Alle jene Strahlen, welche von einem Punkte ausgehend, an der zweiten Prismenfläche die Grenze der Totalreflexion bilden, liegen ebenfalls in einer Kegelfläche, deren Gleichung aus unseren bereits abgeleiteten sich ergibt. Für die Grenze der Totalreflexion ist nämlich die Bedingung gestellt, dass $\sin n' = 1$ sei. Wenn wir diese Bedingung in unsere Gleichung für $\sin n'$ einführen, so gibt diese unmittelbar die Gleichung der genannten Kegelfläche. Sie nimmt aber eine einfachere Form an, wenn wir das Coordinatensystem so wählen, dass die y Axe senkrecht auf der ersten Prismenfläche, dass also $\alpha = 0$ wird, wir bekommen dann nach einer kleinen Reduction

$$x^2(\mu^2-2)\sin^2 A + y^2(\mu^2\sin^2 A - 1) + z^2(\mu^2-1)\sin^2 A$$
$$= -2x\sin A\cos A\sqrt{(\mu^2-1)x^2+\mu^2y^2+(\mu^2-1)z^2}$$

oder auch

$$[x^2(\mu^2-2)\sin^2 A + y^2(\mu^2\sin^2 A-1) + z^2(\mu^2-1)\sin^2 A]^2$$
$$= 4x^2\sin^2 A\cos^2 A[(\mu^2-1)x^2+\mu^2y^2+(\mu^2-1)z^2].$$

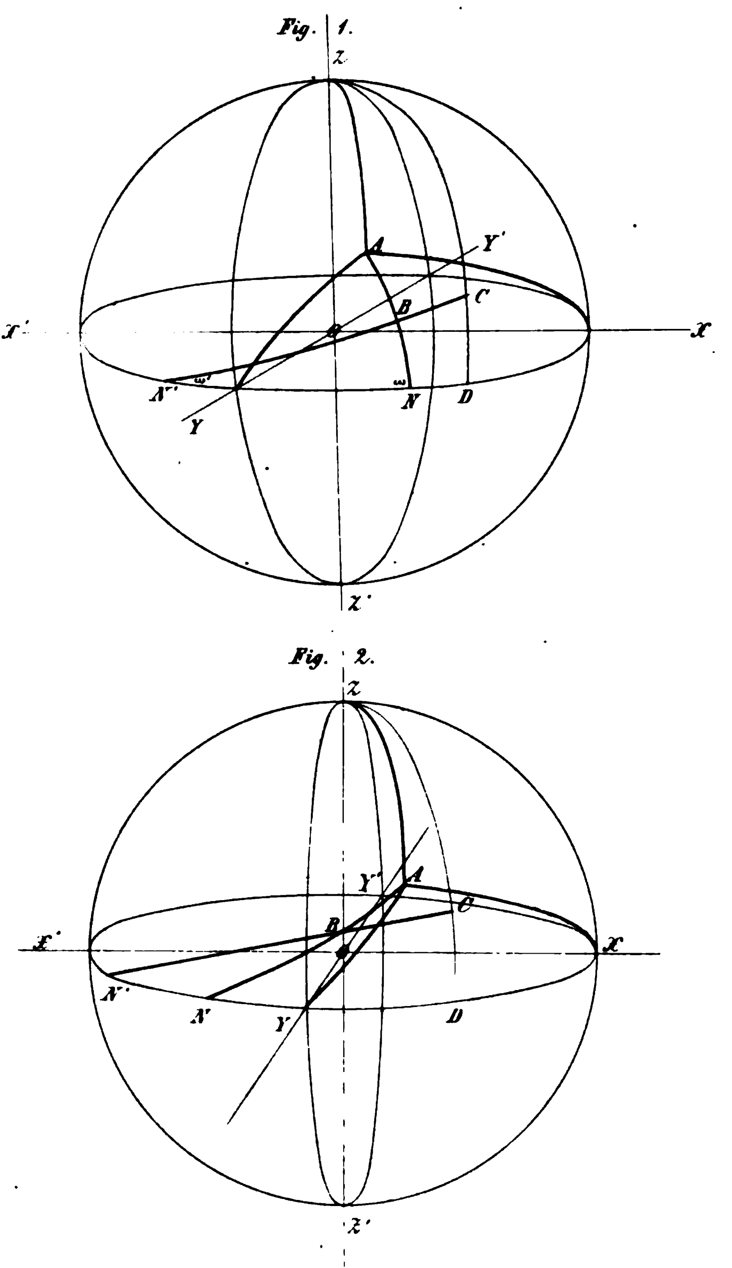
Setzt man statt y nun die Entfernung des leuchtenden Punktes von der Prismenfläche, so erhält man den Schnitt der Kegelfläche mit dieser Ebene.

Würde man nun diese Kegelfläche durch eine Ebene schneiden, die senkrecht auf jenem Strahl steht der in der horizontalen

Ebene auf das Prisma gelangend die Grenze der Totalreflexion bildet, also durch eine Ebene schneiden, die mit der y Axe einen Winkel $90 - \alpha$ bildet, wobei $\sin\alpha = \mu \sin\beta$ und $\mu \sin(A - \beta) = 1$, so würde man, wenn auch noch das Coordinatensystem so gewählt würde, dass die y Axe der genannte horizontale Strahl und die schneidende Ebene vom leuchtenden Punkte, dem Coordinatenmittelpunkte, um p entfernt ist, nach ähnlichen Abkürzungen, wie wir sie uns bei Ableitung der Gleichung des Spaltenbildes erlaubt haben, eine Gleichung erhalten, die mit jener identisch ist, die sich durch Substitution desselben Werthes von α, in die Gleichung unseres Spaltenbildes ergibt. Man kann hieraus ersehen, dass die Grenze der Totalreflexion dieselbe Form haben müsse, wie die letzte noch sichtbare Linie. Aber zu diesem Resultate kann man noch auf eine kürzere Weise gelangen, wenn man bedenkt, dass jene Strahlen, welche die genannte Grenze bilden, alle so gebrochen werden, dass sie nach ihrem Austritte in der zweiten Prismenfläche, also in einer verticalen Ebene liegen, eben so wie wenn sie von einer verticalen, unendlich weit entfernten Linie auf das Prisma fielen. Die Fläche, welche diese Strahlen nach ihrer ersten Brechung im Prisma selbst bilden, ist eine windschiefe, da sie nach dieser Brechung nicht mehr homocentrisch sind.

Die Frage also, wie man bei Spectralapparaten möglichst diese krummen Linien als gerade erhalten könne, wird ganz einfach in Anwendung von Fernröhren mit Objectivlinsen von grosser Brennweite ihre Beantwortung finden, da man jene Stellung des Prismas, bei welcher der Parameter ein Maximum wird, nicht leicht einzuhalten im Stande ist. Es sind nämlich aus anderen Gründen bei Spectralapparaten Prismen von grösseren brechenden Winkeln und einem grösseren Brechungsvermögen im Gebrauche, bei welchen das genannte Maximum in der Nähe der Grenze der Totalreflexion eintritt. Bei diesen Fernröhren ist auch noch die Ocularlinse in Betracht zu ziehen, da das Auge nicht unmittelbar das von der Objectivlinse erzeugte Bild beobachtet. In dieser Beziehung sind Oculare mit kurzer Brennweite, also starker Vergrösserung anzurathen. Ist nämlich die Gleichung des Spaltenbildes im Brennpunkte der Objectivlinse

$$z^2 = -mx$$



Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei

so ist dieses vom Mittelpunkte der Ocularlinse um die Grösse

$$\alpha = -\frac{p's}{p'-s}$$

entfernt, wobei p' die Brennweite des Oculars und s die deutliche Sehweite des Beobachters sind, welcher die krumme Linie in der Form

$$z^2 = -\frac{s-p'}{p'} \cdot mx$$

sieht, eine Parabel, die einen um so grösseren Parameter hat, je kleiner p' ist.

Es ist auch zweckmässig, der Collimatorlinse eine grössere Brennweite zu geben, da in diesem Falle selbst bei höherer Spalte, die von deren einzelnen Punkten ausgehenden Strahlen eine geringere Neigung mit der optischen Axe nach dem Austritte aus der Linse besitzen, also auch weniger schief auf das Prisma gelangen.

Beiträge zur Kenntniss der Krystallformen organischer Verbindungen (II).

Von J. Loschmidt.

(Mit 1 Tafel.)

1. Oxalsaures Glycin. $2\mathrm{C}_2\mathrm{NH}_5\Theta_2 + \mathrm{C}_2\mathrm{H}_2\Theta_4$.

Zwei- und eingliederig. (monoclin). $a : b : c = 1{\cdot}149 : 1 : 0{\cdot}501$; $0 = 71° \, 58'$.

Spröde glasglänzende vierseitige Prismen, luftbeständig, gebildet durch die Flächen des ersten Paares p. Bei grösseren Krystallen kommt noch untergeordnet hinzu die Hexaïdfläche a und ein erstes Paar $2p$, letzteres meist unvollzählig. An den Enden herrscht die Hexaïdfläche c vor, während das vordere Augitpaar o als schwache Abstumpfung der Kante $p\ c$ erscheint. Die Flächen des ersten Paares sind streifig parallel der Hauptaxe.

Spaltbarkeit: wenig vollkommen nach c (Fig. 1.)

Flächen:		
$a =$	$a : \infty b : \infty c$	$= 1,0,0$
$c =$	$\infty a : \infty b : c$	$= 0,0,1$
$p =$	$a : b : \infty c$	$= 1,1,0$
$2p =$	$2a : b : \infty c$	$= 1,2,0$
$o =$	$a : b : c$	$= 1,1,1$

	Berechnet	Beobachtet
p : p an a =		84°56' *
$p : c$ =		102° 4' *
$o : c$ =		150°55' *
$a : c$ =	108° 2'	108° 2'
$p : 2p$ =	162° 8'	162°10'
$a : o$ =	125° 2'	125° 4'
$p : o$ =	131° 9'	131°10'
$o : o$ =	136°58'	137°20'.

Die Formel $2\mathrm{C}_2\mathrm{NH}_5\Theta_2 + \mathrm{C}_2\mathrm{H}_2\Theta_4$ verlangt 30 Proc. Kohlenstoff und 5 Proc. Wasserstoff.

Die Analyse gab 30·26 Proc. Kohlenstoff und 5·04 Proc. Wasserstoff.

Horsford hatte 32·02 Kohlenstoff gefunden, woraus sich die unwahrscheinliche Formel $2\Theta_2NH_5\Theta + \Theta_2\Theta_3$ berechnete, welcher zu Folge bei der Bildung dieser Verbindung Wasser eliminirt würde, was bekanntlich in ähnlichen Fällen nicht geschieht.

2. Oxalsaures Trimethylamin, saures. $\Theta_5H_{11}N\Theta_4$.

Zweigliedrig (isoclin) $b : c = 1 : 0·3919$.

Dünne rectanguläre perlmutterglänzende, biegsame Blättchen, gebildet durch die drei Hexaïdflächen *a*, *b*, *c* mit vorwaltendem *a*.

Selten findet man die Ecken abgestumpft durch die Flächen des zweiten Paares *q*.

Spaltbarkeit: vollkommen nach *a*. (Fig. 2.)

Flächen: $a = a : \infty b : \infty c = 1,0,0$
$b = \infty a : b : \infty c = 0,1,0$
$c = \infty a : \infty b : c = 0,0,1$
$q = \infty a : b : c = 0,1,1.$

	Berechnet	Beobachtet
$q : q$ an $c =$		137°12' *
$b : q =$	111°24'	111°46'
$c : q =$	158°36'	158°16'.

3. Maleïnsäure. $\Theta_4H_4\Theta_4$.

Zweigliederig (isoclin). $a : b : c = 1·5089 : 1 : 0·51467$.

Vierseitige Prismen *p* von mattem Glasglanze, welche beim Aufbewahren oft trübe und porzellanartig werden. Das Ende wird gebildet durch das zweite Paar *q*.

Spaltbarkeit: vollkommen nach *q*.

Dargestellt ward die Säure durch Destillation von Äpfelsäure.

Flächen: $p = a : b : \infty c = 1,1,0$
$q = \infty a : b : c = 0,1,1$

	Berechnet	Beobachtet
$p : p$ an $a =$		67° 4' *
$q : q$ an $c =$		125°32' *
$p : q =$	112°25'	112°12'.

4. Salpetersaures Acetamid. $\Theta_2NH_5\Theta + NH\Theta_3$.

Zweigliederig (isoclin) Hemiëd. $a : b : c = 0·5758 : 1 : 0·6249$.

Vierseitige rectanguläre Tafeln, bestehend aus der vorherrschenden Hexaïdfläche *b*, der Hexaïdfläche *c* und einem einzelnen Flächenpaare *p*. An wenigen Individuen findet sich eine Ecke der Tafel durch eine einzelne Oktaëderfläche *o* abgestumpft, welche mit *p* und *c* in einer Zone liegt.

Spaltbarkeit: sehr vollkommen nach *c*. (Fig. 3).

Flächen: $b = \infty a : b : \infty c = 0,1,0$
$c = \infty a : \infty b : c = 0,0,1$
$p = a : b : \infty c = 1,1,0$
$o = a : b : c = 1,1,1$.

	Berechnet	Beobachtet
$b : p =$		119°56' *
$o : c =$		128°36' *
$o : p =$	141°24'	141°40'
$o : b =$	112°58'	113°20'.

5. Salpetersaures Glycin. $\Theta_2NH_5\Theta_2 + NH\Theta_3$.

Zweigliederig (isoclin) $a : b : c = 0·74992 : 1 : 0·68685$.

Rhombenoktaëder *o*, in Combination mit den Hexaïdflächen *a* und *b* und einem zweiten Paare $q\frac{1}{2}$. Sehr untergeordnet tritt meist ein einzelnes Flächenpaar *p* hinzu.

Die Krystalle bilden glasglänzende luftbeständige flache Säulen mit vorherrschender *b*-Fläche.

Spaltbarkeit: unvollkommen nach *a*. (Fig. 4.)

Flächen: $a = a : \infty b : \infty c = 1,0,0$
$b = \infty a : b : \infty c = 0,1,0$
$p = a : b : \infty c = 1,1,0$
$q\frac{1}{2} = \infty a : b : \frac{1}{2} c = 0,1,2$
$o = a : b : c = 1,1,1$.

	Berechnet	Beobachtet
$b : o =$		116°52' *
$o : o$ (Seitenk.) $=$		97°44' *
$a : o =$	127° 3'	127°28'
$b : p =$	126°52'	127°
$b : q\frac{1}{2} =$	108°57'	109° 8'
$q\frac{1}{2} : o =$	118°23'	118°30'.

6. Salpetersaures Alanin. $C_3NH_7O_2 + NHO_3$.

Zwei- und eingliederig (monoclin) $a : b : c = 1·3546 : 1 : 2·8475$; $0 = 85°52'$.

Die Krystalle bilden dicke vierseitige Säulen von Glasglanz, welche an der Luft bald feucht werden. Gebildet sind sie von den beiden Hexaïdflächen a und c. Die scharfe Säulenkante wird durch eine hintere Schiefendfläche $2r'$ schwach abgestumpft. Der Habitus ist demnach epidotisch. Das Ende wird gebildet durch die beiden Augitpaare $o\frac{1}{2}$ und o', von welchen das erstere sehr untergeordnet auftritt.

Spaltbarkeit: vollkommen nach a. (Fig. 5.)

Flächen:					
a =	a :	∞b :	∞c	=	1,0,0
c =	∞a :	∞b :	c	=	0,0,1
$2r'$ =	$2a$:	∞b :	c	=	$\bar{1}$,0,2
$o\frac{1}{2}$ =	a :	b :	$\frac{1}{2}c$	=	1,1,2
o' =	a' :	b :	c	=	$\bar{1}$,1,1.

	Berechnet	Beobachtet
$a : c$ =		94° 8'*
$a : o'$ =		124° *
$o' : o'$ an b =		102°56'*
$a : 2r'$ =	134°27'	134°36'
$c : 2r'$ =	131°25'	131°12'
$o\frac{1}{2} : o\frac{1}{2}$ an b =	86°47	87°12'
$o\frac{1}{2} : o'$ (Seitenk.) =	135° 7'	135°27'
$o\frac{1}{2} : o'$ (Endk.) =	111°32'	111°12'
$a : o\frac{1}{2}$ =	122°54'	123° 8'
$c : o'$ =	103°31'	103° 8'
$c : o\frac{1}{2}$ =	121°22'	121°20'
$2r' : o'$ =	126° 6'	126'36'

7. Salpetersaures Anilin. $C_6H_7N + NHO_3$.

Zweigliederig (isoclin) $a : b : c = 0·5781 : 1 : 0·6253$.

Vierseitige Tafeln, gebildet durch die vorherrschende Hexaïdfläche b, und die Oktaëderflächen o, welche die Seiten der Tafel zuschärfen.

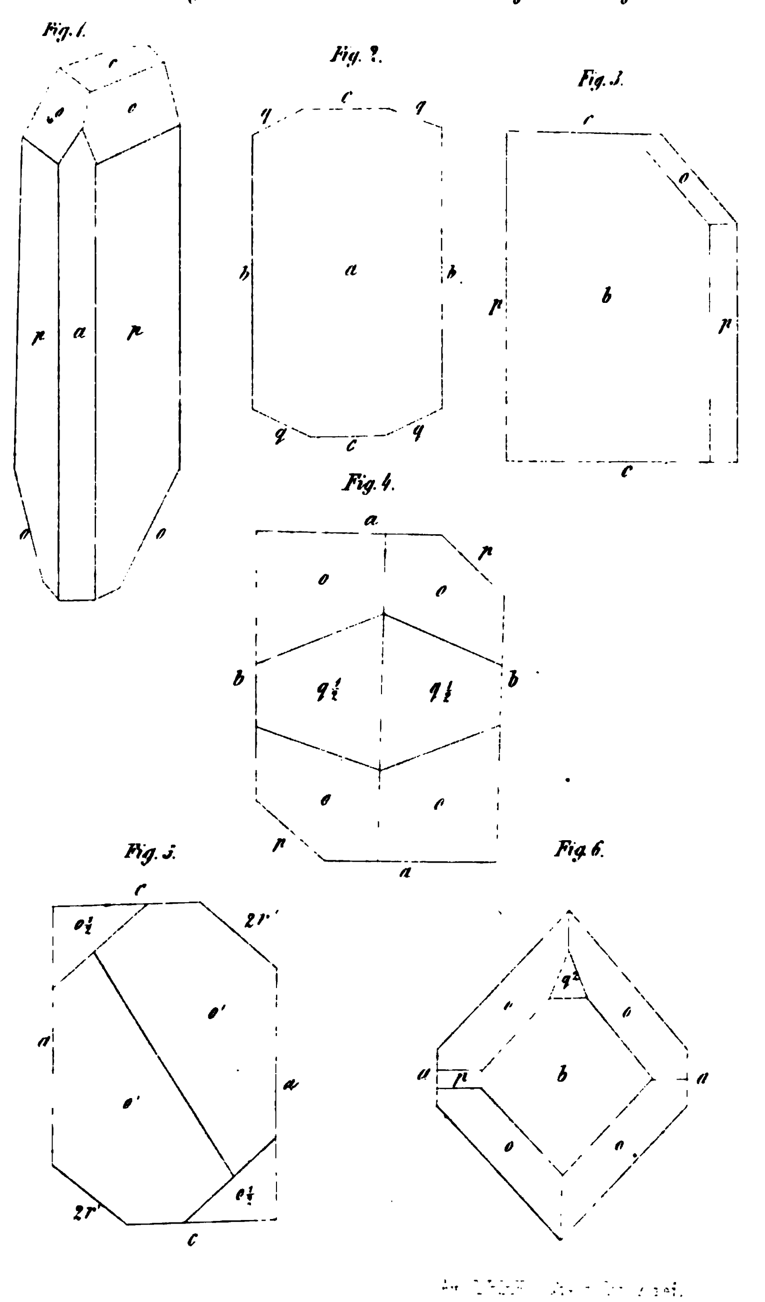
Zwei einander gegenüber liegende Ecken der Tafel werden durch die Hexaïdfläche a schwach abgestumpft. Neben a erscheint meisst ein einzelnes Flächenpaar p schwach angedeutet; ebenso ein Flächenpaar von q^2.

Die Krystall-Tafeln haben meist eine helle Diagonal-Linie nach der Hauptaxe und dann beiderseits Streifen parallel den Seitenflächen der Tafel, wohl eine zwillingsartige Zusammensetzung zweier Individuen andeutend. Die Krystalle zersetzen sich beim Aufbewahren unter dunkelgrüner Färbung. Aus absolutem Alkohol krystallisirt das Salz in Rhombenoktaëdern *o*, mit untergeordneter Hexaïdfläche *a*. Die durch Sublimation erhaltenen Kryställchen hingegen sind ganz vom Habitus der aus wässeriger Lösung krystallisirten.

Spaltbarkeit: parallel der Hexaïdfläche *b*. (Fig. 6.)

Flächen: $a = a : \infty b : \infty c = 1,0,0$
$b = \infty a : b : \infty c = 0,1,0$
$p = a : b : \infty c = 1,1,0$
$q^2 = \infty a : b : 2c = 0,2,1$
$o = a : b : c = 1,1,1.$

	Berechnet	Beobachtet
$o:o$ (Kante (ac)	=	134° *
$o:o$ (Kante bc)	=	94°56' *
$b:o$	= 113°	113° 8'
$a:o$	= 132°32'	132°52'
$b:p$	= 120° 2'	119°44'
$b:q^2$	= 141°24'	141°44'
$o:q^2$	= 134° 4'	134°


Fig. 1.
c
o
o
p
a
p
o
o
Fig. 2.
c
q
q
b
a
b
q
c
q
Fig. 3.
c
o
p
b
p
c
Fig. 4.
a
p
o
o
b
$q\frac{1}{2}$
$q\frac{1}{2}$
b
o
o
p
a
Fig. 5.
c
$o\frac{1}{2}$
2r'
o'
a
a
o'
$o\frac{1}{2}$
2r'
c
Fig. 6.
q^2
o
o
a
p
b
a
o
o

Kritische Bemerkungen über die bisherigen Tonlehren und Andeutungen zu Reformen.

Von A. J. Koch.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Jänner 1865.)

Die grossen Fortschritte, welche die technischen und gewerblichen Werkstätten in den letzten Decennien gemacht haben, sind vielfach dadurch erreicht worden, dass man die Ergebnisse der theoretischen Studien unmittelbar in das praktische Gebiet zu übertragen bestrebt war. An diesen theoretischen Grundlagen hat die Mathematik einen so ausgesprochenen Antheil, dass Jeder, welcher überhaupt mit Grössen, Verhältnissen oder Formen zu schaffen hat, die Nothwendigkeit erkennt, sich mit den Zahlen vertraut zu machen, in so weit sie überhaupt auf seine Berufsthätigkeit eine Anwendung finden.

Dieser Erkenntniss verschliesst sich nur eine Classe der Beschäftigten — merkwürdiger Weise eine solche, die dem Lehrstande angehört — nämlich die Classe der Tonlehrer! In dem Wahne: dass die mechanische Fertigkeit auf dem Instrumente, und die Eingebungen einer vagen Phantasie die einzigen und zugleich hinreichenden Mittel sind, die Tonkunst in allen Formen bis zur Vollendung auszubilden, behandeln sie mit Geringachtung die Andeutungen jener Männer der Wissenschaft, welche die herkömmlichen zum Theil ganz willkürlich aufgestellten Schulregeln nach den wahren Naturgesetzen beurtheilen, berichtigen und ergänzen wollen.

In Folge dieses exclusiven Standpunktes, auf dem die Tonlehre von den Musikern erhalten wird, entbehrt dieselbe auch noch immer einer wahren wissenschaftlichen Grundlage. —

Dieser Ausspruch, der voraussichtlich einen grossen Theil der Musiklehrer in grosse Aufregung bringen wird, erfordert natürlich eine strenge Rechtfertigung. Diese wird man in den folgenden begründeten Sätzen finden, womit die hervorragendsten Fehler und Mängel der gegenwärtigen Tonschule hervorgehoben werden.

A. Die Tonleiter

cde....c wird als allgemeiner Maassstab für die Grössen der Intervalle gebraucht. Die Töne dieser Leiter haben, mit den Tasten des Claviers gemessen, unter sich folgende Abstufung:

$$c_2 d_2 e_1 f_2 g_2 a_2 h_1 c.$$

Die Theile dieses Maassstabes haben zweierlei Längen, denn es folgt *f* und *c* unmittelbar auf *e* und *h*, während alle anderen Töne von den nächst voraus gehenden durch eine Zwischenstufe getrennt sind. Die Schule beachtet aber in der Stufenzählung diese zweifachen Grössen nicht, sondern zählt, vom Grundton aus, die Stufen nach der arithmetischen Zahlenreihe: $\overset{1}{c}\overset{2}{d}\overset{3}{e}\overset{4}{f}\overset{5}{g}\overset{6}{a}\overset{7}{h}\overset{8}{c}$ und misst auch die Intervalle in den Tonleitern auf allen anderen Grundtönen nach der Buchstabenfolge der vorliegenden Leiter.

Dass ein solcher Maassstab mit ungleichen Abtheilungen in jeder Werkstätte als unbrauchbar erklärt werden müsste, wird jeder Lehrjunge erkennen, der nur erst acht Tage lang seinen Zollstab oder sein Schneidermaass gebraucht; aber in den Werkstätten der Töne, an deren Arbeiten doch der Geist einen so wesentlichen Antheil hat, wird dieser musikalische Zollstab mit einer so gedankenlosen Beharrlichkeit festgehalten, dass man darüber alle Verwirrung, die damit in die Stufenzählung und die Benennung der Intervalle gebracht wird, ganz übersieht. Die ganze Masse dieser Verwirrung könnte nur mit einer tabellarischen Darstellung vorgeführt werden; es wird jedoch zur vorläufigen Beurtheilung derselben schon genügen, nur einige Beispiele davon einzusehen, die im Folgenden hervorgehoben werden:

Die Intervalle *f—h* und *c—f* werden ganz gleich „grosse Quarten" genannt, während man doch am Clavier deutlich vor Augen hat, dass *h* von *f* um 6 Stufen, dagegen *f* von *c* nur 5 Stufen entfernt ist. Eben so werden die Intervalle *h—g* und *c—a* ganz gleich als „grosse Sexten" benannt, obgleich die Claviatur zeigt, dass *g* von *h* um 8 Stufen, dagegen *a* von *c* 9 Stufen entfernt ist. Dessgleichen heissen *h—ges* und *c—as* ganz gleich die „kleinen Sexten", obgleich man am Clavier sieht, dass *ges* von *h* 7 Stufen, *as* von *c* aber 8 Stufen entfernt ist.

Anderseits werden Intervalle von gleicher Grösse mit verschiedenen Maassen bezeichnet: z. B. *c—fis*, *g—cis*, *d—gis* heissen

„übermässige Quarten", wogegen *f—h*, das mit den vorgenannten ganz gleich ist, nur als „grosse Quart" benannt wird. *As—f*, *a—fis*, *e—cis* heissen die „übermässigen Sexten", wogegen die ganz gleiche Sext *c—a* nur die grosse genannt wird.

Es könnte noch weiters dargelegt werden, dass grössere Intervalle mit kleineren Ordnungszahlen und kleinere mit grösseren Zahlen bezeichnet werden; allein es wird jeder Musiker, der nicht für seine Doctrin das Privilegium einer eigenen musikalischen Arithmetik geltend machen will, wohl schon durch die vorliegenden Beispiele zur Erkenntniss gekommen sein, dass sein bisheriger Maassstab für die Grössen der Intervalle völlig unbrauchbar ist. —

Diesem Schlusssatze gegenüber hört man aber nicht selten von den Tonlehrern die Entgegnung: Wir haben uns mit diesem Maassstab so lange schon unter uns verständigt, dies wird wohl auch in Zukunft geschehen können; auch haben wir keinen anderen Maassstab, nach welchem wir die Intervalle so ganz einfach messen könnten. Nun, in Bezug auf den Vordersatz dieses Ausspruches, weiss wohl jeder Musikschüler, der den Generalbass studieren muss, was es für eine Bewandtniss hat mit der behaupteten „Verständigung" nach diesem Maassstab; der Nachsatz dieses Ausspruches ist aber eben so sonderbar, als wenn etwa ein Arbeiter, der fortan auf einer Leiter auf- und absteigen muss, darüber in Verlegenheit käme, wie er seine Schritte auf dieser Leiter zählen und die Entfernung jeder Stufe von einer anderen messen soll. Die Clavierspieler trippeln ja fortan auf ihrer Leiter auf und ab, man darf ihnen daher doch wohl die Fähigkeit zumuthen, dass sie die Stufen dieser Leiter mit derselben Präcision zählen können, wie der Tagwerker, welcher einen Maurer auf der Leiter zu bedienen hat. — Dieser triviale Vergleich ist zwar nur für jene Musiker passend, die es in der Mathematik nicht über die „vier Species" hinaufgebracht haben; jene — freilich nur wenige — die in den mathematischen Studien bis zu den Reihen gekommen sind, werden aber wissen: dass die Töne nach dem Gesetze der geometrischen Reihe fortschreiten, deren erstes Glied durch 1, deren letztes Glied durch 2 repräsentirt wird

Die geometrische Reihe mit der gleichmässigen Abstufung ihrer Glieder ist also von der Natur als Maassstab für die Stufen und Intervalle jeder wie immer gearteten Tonleiter gegeben.

Die Zahl der Glieder, welche man zwischen 1 und 2 einschalten will, ist an sich ganz beliebig; allein man muss aus Gründen, die später dargelegt werden, für Claviere und alle sogenannten chromatischen Instrumente die Zahl der Töne innerhalb einer Octave auf 12 beschränken; es können somit innerhalb der äusseren Glieder 1—2 nur 11 Glieder eingeschaltet werden.

Da also eine nach der geometrischen Reihe angelegte 12stufige Leiter von Stufe zu Stufe gleichmässig fortschreitet: so kann man die Stufen einer solchen Leiter auch ganz einfach mit den Zahlen der arithmetischen Reihe 1 2 3...12 bezeichnen. Die Stelle des Grundtones ist mit 0 anzuzeigen, weil sie nur die Grundlage ist, über welche sich die Stufen erheben.

Die Benennung der Stufen kann nach der bisherigen Gepflogenheit der lateinischen Sprache nachgebildet werden, mit den Worten: prime, secunde, terz, quart, quint, sext, septime, octave, none, decime, undecime, duodez.

Die ganze Tonreihe vom Grundton bis zur Duodez, d. i. bis zum Grundton in der höheren Lage muss ein Register genannt werden, weil die Benennung der Reihe mit dem Namen der letzten Stufe, duodez, zu Missverständnissen führen würde, das Wort Octave aber für diese Anlage des Registers ganz unpassend ist.

Die Stufen der zu Anfang aufgestellten 7tönigen Leiter müssen nun nach dem neuen rationellen Maassstab so gezählt werden:

c d e f g a h c
0 2 4 5 7 9 11 12.

Wenn aber eine Verbindung von Tönen das Maass eines Registers überschreitet, und in das zweite oder dritte Register hinaufreicht, so müssen die Stufen dieser höheren Register in der Form einer zweiten oder dritten Potenz (n^2, n^3) angezeigt werden; beispielsweise werden daher die nachbenannten Accorde mit den darüber gesetzten Stufenzahlen zu bezeichnen sein:

$0\ 6\ 3^2\ 10^2 \qquad 0\ 7\ 2^2\ 10^2\ 4^3$
h f d a — *g d a f h.*

Diese Bezeichnung stellt die wahre Lage der Töne in den höheren Registerien unmittelbar vor Augen, während man bei der bisher üblichen Bezeichnung mit den fortlaufenden höheren Zahlen

die Lage der Töne erst durch Abziehen der Zahl 7 oder 14 von jenen höheren Zahlen herausfinden kann.

B. Das diatonische und das chromatische System.

Auf der oben verzeichneten siebenstufigen Leiter stehen die Schwingungen der Töne in den nachstehend angezeigten Verhältnissen zur Schwingung des Grundtones:

$$\begin{matrix} 1 & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{15}{8} & \frac{2}{1} \\ c & d & e & f & g & a & h & c. \end{matrix}$$

Diese Leiter hat man nach den mannigfachen Bedürfnissen der Composition und der Ausführung allmählig auch auf andere Grundtöne versetzen müssen, wobei man die Stufen genau nach den vorgezeichneten Schwingungsverhältnissen und Intervallen dieser Scala anlegen musste, weil eine Abweichung von denselben eine Missstimmung erzeugt hätte. Zur Durchführung dieser Scalenübertragung hat man begreiflich neue Töne gebraucht, welche aber leicht dadurch gewonnen wurden, dass man die Positionen der Töne obiger Scala um den Quotienten $\frac{25}{24}$ erhöhte oder erniedrigte.

Auf diese Weise bekamen die grösseren Secunden *c—d*, *f—g*, *a—h* folgende Abtheilung: $1\ \frac{25}{24}\ \frac{27}{25}\ \frac{9}{8}$; die kleineren *d—e* und *g—a* wurden so getheilt: $1\ \frac{25}{24}\ \frac{16}{15}\ \frac{10}{9}$. Zwischen den beiderseitigen „Halbtönen" *c—ds*, $f^{\sharp}$*—gs*, $a^{\sharp}$*—b* besteht nach dieser Anlage noch ein Raum von $\frac{27}{25} : \frac{25}{24} = \frac{648}{625}$; zwischen den Halbtönen $d^{\sharp}$*—es* und $g^{\sharp}$*—as* besteht noch ein Raum von $\frac{16}{15} : \frac{25}{24} = \frac{128}{125}$ [1]).

Verglichen mit einer Stufe des geometrischen zwölftheiligen Tonmaasses ist $\frac{25}{24} = 0{\cdot}71$, $\frac{648}{625} = 0{\cdot}62$, $\frac{128}{125} = 0{\cdot}42$. Die beiden letzteren Quotienten wurden von den alten Kanonikern die grosse und die kleine Diesis genannt.

Mit Inbegriff der 5 „erhöhten" und 5 „erniedrigten" Halbtöne enthält nun das diatonische System in der einfachsten Form 17 Töne.

Die Darstellung dieser Töne hat auf Streichinstrumenten und im Gesang keine Schwierigkeit, und geschieht von geübten Musikern dieser Organe mit vieler Genauigkeit; allein die meisten anderen Instrumente vermögen in ihrem Register nicht die ganze Zahl von

---

[1]) Die Halbtöne *des*, *ges*, *fes*, *ces* werden in dieser Schrift mit *ds*, *gs*, *fs* und *cs* abgekürzt geschrieben.

17 Tönen aufzunehmen; sie beschränken sich auf die Zahl 12, indem sie in den fünf Secunden der siebenstufigen Scala je einen Mittelton eingeschoben enthalten, welcher die beiderseitigen Halbtöne annähernd darzustellen hat. Diese Anlage hat bekanntlich auch das Register der Claviere. Genau genommen ist also die Clavierstufe zwischen *c* und *d* weder ein *c♯* noch ein *ds*, zwischen *f* und *g* weder ein *f♯* noch ein *gs* u. s. w. — Nach der Anlage dieser Mittelstufen hätte man daher die Clavierscala etwa eine Combinationsscala nennen können, da sie die Halbtöne der diatonischen Scala paarweise in Einen Ton vereinigt; allein man hat ihr einen mehr gelehrten Anstrich geben wollen, indem man ihr nach dem griechischen χρωμα den Namen „chromatisch" beigelegt und damit angedeutet hat, dass ihre Mittelstufen in ähnlicher Weise die beiderseitigen Halbtöne vereinigen, wie das chromatische Farbenbild in den gemeinen Fernröhren aus der Vermengung der Lichtstrahlen verschiedener Brechung hervorgeht.

Diese, nach der vorliegenden Erklärung so ziemlich gerechtfertigte Benennung „chromatisch" wird nun von den Musikern aber auf jede zwölfstufige Scala überhaupt, ohne Rücksicht auf die Anlage ihrer Stufen, angewendet; sie nennen nun auch eine Scala etwa von der folgenden Anlage: *c c♯ d es e f f♯ g as a b h c* eine chromatische, weil sie die wahre Bedeutung dieses Wortes nicht kennen, und merkwürdiger Weise sogar den Unterschied zwischen *f♯* und *gs*, *c♯* und *ds* u. s. w. nicht ermessen können. — Diesen letzten Satz wird wohl Mancher als eine Verläumdung erklären; er mag sich aber darüber in der vielverbreiteten allgemeinen Tonlehre des Herrn Musikdirectors Marx belehren, wo auf Seite 32 wörtlich zu lesen ist wie folgt: „*cis* und *des*, *dis* und *es*, *fis* und *ges*, *gis* und *as*, *ais* und *b* sind nur dem Namen nach verschieden, in der That aber gleich, denn jedes Paar dieser scheinbar verschiedenen Töne wird am Clavier auf derselben Taste angeschlagen; auch können sie enharmonisch nach Belieben umnannt werden; ihre Doppelbenennung ist nur zur Erleichterung der Schreibart und der Klarheit wegen eingeführt." — Also weil am Clavier die beiderseitigen Halbtöne auf derselben Taste angeschlagen werden, so kann überhaupt zwischen denselben kein Unterschied bestehen!

Aber Herr Marx vernichtet seinen auf Seite 32 aufgestellten Lehrsatz von der Gleichheit der Töne *c♯* und *ds*, *f♯* und *gs* u. s. w.

schon auf der Seite 39, denn es steht dort wörtlich: „Einen grossen Halbton bilden 2 neben einander liegende Stufen zugehörig n Töne, zwischen denen sich kein Ton in unserem System befindet, z. B. *h—c, c—des, fis—g.* Einen kleinen Halbton bilden zwei derselben Stufe angehörige Töne, z. B. *h—his, c—cis, ges—g.*" Er nennt al·o hier die Intervalle *c—ds* und *f♯—g* grosse Halbtöne, *c—c♯* und *gs—g* aber kleine Halbtöne. Wie soll sich aber der grosse Halbton vom kleinen unterscheiden, wenn *c♯ = ds* und *f♯ = gs* ist? — Wenn schon die Clavierscala die einzige ist, welche Herr Marx zum Fortschreiten in Halbtönen gebraucht, so sollte er hiebei doch schon entdeckt haben, dass diese Scala weder grosse noch kleine Halbtöne hat, sondern solche Mittelstufen, welche die Secunden *c—d—e* und *f—g—a—h* in zwei ganz gleiche Hälften theilen; und dass die Intervalle *e—f* und *h—c* genau dieselbe Grösse haben müssen, wie die vorgenannten Hälften; weil sie mit jeder nächstliegenden Stufe dieselbe Länge einer Secunde geben müssen, wie die obigen sogenannten Ganztöne.

Es ist somit ganz unerklärbar, dass Herr Marx auf Seite 39 auch ein Intervall *h—his* auf seinem Clavier gefunden haben will, und zwar im directen Widerspruch mit einem unmittelbar vorausgehenden Satze, worin *h—c* als ein solches Intervall genannt wurde, innerhalb welchem in unserem Tonsysteme kein Zwischenton besteht. — Solche Widersprüche in so naher Zusammenstellung sind ausserhalb der musikalischen Literatur beinahe unmöglich; und wenn sie schon ausnahmsweise etwa irgendwo vorkämen, so würden sie nach Gebühr bald kritisch beleuchtet werden. Aber, wie wir oben eine eigenthümliche musikalische Arithmetik entdeckt haben, so scheint auch die Logik den Musikern ganz eigenthümliche Concessionen zu machen.

Dass die sogenannte enharmonische Namensverwechslung der Halbtöne nur im chromatischen System zulässig ist, nicbt aber im diatonischen, bedarf nach dieser umständlichen Erklärung der beiden Systeme wohl keines weiteren Beweises.

Damit die chromatische Scala schon durch ihre Stufennamen sich von der diatonischen unterscheide, wäre es zweckmässig, die chromatischen Halbtöne besonders zu benennen; etwa so: *fi ci gi di ai.*

C. Bezeichnung der Accorde nach den Intervallen des zwölftheiligen geometrischen Tonmaasses, in der geraden und verkehrten Leseart.

Mit den Zahlen dieses neuen Tonmaasses wird der Dreiklang in seiner dreifachen Lage so dargestellt:

$$g\overset{5}{\underset{7}{\,}}c\overset{4}{\underset{8}{\,}}e—c\overset{4}{\underset{8}{\,}}e\overset{3}{\underset{9}{\,}}g—e\overset{3}{\underset{9}{\,}}g\overset{5}{\underset{7}{\,}}c.$$

Die oberen Zahlen bezeichnen die Intervalle der Töne in gerader Leseart, die unteren Zahlen gelten für die Intervalle in der Umkehrung der Accorde. Der Mol-Dreiklang wird durch dieselben Zahlen bezeichnet wie der Dur-Klang, aber in der entgegengesetzten Aufeinanderfolge:

$$e\overset{5}{\underset{7}{\,}}a\overset{3}{\underset{9}{\,}}c—a\overset{3}{\underset{9}{\,}}c\overset{4}{\underset{8}{\,}}e—c\overset{4}{\underset{8}{\,}}e\overset{5}{\underset{7}{\,}}a.$$

Nach dieser Bezeichnung erscheint jeder Accord mit den Grössen seiner Intervalle, und in der Ordnung ihrer Aufeinanderfolge dargestellt, und es ist damit zugleich der innere Bau jedes Accordes deutlich gezeichnet. Die Maassen der grossen Intervalle $g—e$, $e—c$, $c—g$; $a—e$, $c—a$, erkennt man ganz einfach aus den Summen der kleinen, denn es ist

$$g—e=gc+ce=5+4=9, \qquad c—g=ce+eg=4+3=7,$$
$$e—c=eg+gc=3+5=8 \text{ u. s. w.}$$

Jedes Intervall hat in der Umkehrung seiner Töne eine solche Grösse, welche mit jener der geraden Tonfolge die Summe 12 gibt, nämlich $g—c=5$, $c—g=7$ zusammen 12, und ebenso $c—e+e—c$ und $a—c+c—a=12$.

In der Umkehrung der Töne hat jeder dieser Accorde eine Ausdehnung, welche in das zweite Register übergeht; denn es ist

$$ec+cg=8+7=15=3^2 \quad g—e+e—c=9+8=17=5^2,$$
$$c—g+g—e=7+9=16=4^2.$$

In eben so einfachen arithmetischen Formen erscheinen nach dem geometrischen zwölftheiligen Tonmaass auch alle anderen Accorde, und es zeigt sich in diesen Formen zugleich die Zusammengehörigkeit der verschiedenen Lagen zum gemeinsamen Register. Mit Beisetzung der parallelen Töne in Mol kann man z. B. den Dreiklang in Dur und Mol in allen Lagen so verzeichnen:

$$\begin{array}{l} c\,{}^4\,e\,{}^3\,g\,{}^5\,c\,{}^4\,e \\ e\,{}_8\,c\,{}_9\,a\,{}_7\,e\,{}_8\,c \end{array}.$$

Die obere Reihe der Intervalzahlen stellt in der geraden Richtung die mathematischen Formen der 3 Accorde in Dur, in der umgekehrten Richtung aber die Formen der Accorde in Mol dar $= c^4e^5a$, e^5a^3c, a^3c^4e; die untere Zahlenreihe zeigt dagegen die mathematischen Formen der umgekehrten Tonfolge, und zwar in der Richtung von der rechten zur linken für die Dur-Accorde, in der Richtung von der linken zur rechten für die Mol-Accorde an. Zur Vereinfachung der Ausdrücke für die beiden entgegengesetzten Richtungen kann man die gerade Richtung mit „in *R*“ *(recto)*, die umgekehrte mit „in *V*“ *(verso)* bezeichnen.

Die Vortheile, welche die Bezeichnung der Accorde mit den Intervallzahlen gewährt, erscheinen aber bei den Accorden von 4 und 5 Tönen in noch höherem Grade als bei den dreitönigen. Zur Veranschaulichung dieser Vortheile mag hier der bekannte Dom. Sept.-Accord dienen, der in der ganzen Ausdehnung seines Registers in *R* und *V* in folgenden Ton- und Intervallreihen sich darstellt:

$$\begin{array}{l} g\,{}^4\,h\,{}^3\,d\,{}^3\,f\,{}^2\,g\,{}^4\,h\,{}^3\,d \\ a\,{}_8\,f\,{}_9\,d\,{}_9\,h\,{}_{10}\,a\,{}_8\,f\,{}_9\,d \end{array}.$$

Die einzelnen Accorde dieses Registers zeigen sich hier in den mathematischen Formen 433—332—324—243, welche in *R* (dur) mit den Tönen der oberen Tonreihe, in *V* (mol) mit den Tönen der unteren Reihe besetzt werden. Der äussere Umfang dieser Accorde ist in der geraden Tonfolge 10, 8, 9 Stufen, in der umgekehrten Tonfolge $26 = 2^3$, $28 = 4^3$, $27 = 3^3$.

Der Charakter der viertönigen Accorde ist aber nicht blos aus den einzelnen Intervallen und aus jenem der äusseren Töne zu ermessen; es müssen auch die Intervalle zwischen dem Grundton und dem dritten, dann zwischen dem zweiten und dem vierten (obersten) Ton beachtet werden; denn bei dem Zusammenklang aller 4 Töne hört man ja nicht blos die erstgenannten Intervalle, sondern in derselben Stärke auch die beiden letzten. Die Grösse dieser beiden summarischen

Intervalle entnimmt man aus den Ziffern der beiden einzelnen Intervalle: 4+3, 3+3, 3+2, 2+4.

Betrachten wir nun das obige Register und die darin enthaltenen Accorde nach der üblichen Bezeichnung! Nach dieser werden die obigen Accorde 433—332—324—243

in R mit den Ziffern 7 $\substack{6\\5}$ $\substack{4\\3}$ 2 oder $\substack{4\\2}$

„ V „ „ „ ♭7 2 $\substack{4\\3}$ $\substack{6\\5}$

angezeigt. In der Umkehrung der Töne werden diese Accorde auch nur mit den hier angesetzten Ziffern bezeichnet. Mit dieser Bezifferung ist aber der innere Bau der Accorde und die Intervallenfolge gar nicht angedeutet, und selbst der äussere Umfang der hier mit den Ziffern 6 und 7 angezeigt sein soll, ist sehr mangelhaft zu erkennen, denn die Accorde 332 und 342, welche ganz gleich mit $\substack{6\\5}$ bezeichnet werden, haben verschiedene Grössen; der erste enthält 8, der zweite 9 Stufen. Auch ist mit der Ziffer 5 bei dem Accord 332 das Intervall *h—f* nicht genau bezeichnet, da dieses nur die sogenannte falsche Quint ist. — Die Verbindung der einzelnen Accorde zum ganzen Register lässt sich mit dieser Bezeichnung offenbar in keiner Weise darstellen. Insbesondere werden mit der Ziffer 7 viele Accorde von ganz verschiedener innerer Structur bezeichnet; wie soll man nun aus dieser Ziffer die Natur des Accordes und den Charakter seines Klanges erkennen?

Die Mangelhaftigkeit und Unsicherheit dieser Bezeichnung wird aber noch dadurch erhöht, dass verschiedene Musiker auch die Bezeichnungsart nach ihrem besonderen Ermessen variiren. — Aber sie mögen diese Bezeichnung einrichten wie sie wollen, mit den Stufenzahlen, wie sie bisher ausschliesslich gebraucht werden, wird man nie eine klare Darstellung der Accorde geben können. Mit den Maassen der siebentönigen Scala insbesondere wird überdies noch die ganze Verwirrung, welche schon bei den einzelnen Intervallen im Absatz *A* nachgewiesen wurde, auch in die Bezeichnung der Accorde übertragen.

D. Die Temperatur.

Man temperirt die Stufen einer Leiter entweder zu dem Zweck, um dieselben den reinen Schwingungsverhältnissen zu nähern, oder um ein Intervall zwischen differenten Verhältnissen auszugleichen.

Die erste Art wird z. B. bei der Stimmung der Terzen angewendet, welche bei den chromatisch gestimmten Instrumenten von den reinen Schwingungsverhältnissen $\frac{5}{4}$ und $\frac{6}{5}$ weit abweichen; die Temperatur der zweiten Art wird beispielsweise bei Secunden angewendet, indem man diese zwischen den beiden Verhältnissen $\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$ auszugleichen sucht. Die Discussion über die Temperatur muss also mit der Abhandlung über die Stimmung der Instrumente verbunden werden; und da diese nach den beiden Tonsystemen sich unterscheiden: so muss auch die Temperatur nach den beiden Tonsystemen gesondert besprochen werden.

a) Die Temperatur der chromatischen Scala.

Wenn diese Scala genau nach den Gliedern der geometrischen Reihe angelegt wird — wie es geschehen soll — so ist eine Temperatur an derselben eigentlich gar nicht anwendbar; denn die Stufen dieser Scala müssen durchaus gleich mit den Gliedern der geometrischen Reihe: 1, 1·089, 1·122, 1·189, 1·26, 1·3348, 1·414, 1·498, 1·587, 1·86, 1·87, 1·8877, 2 fortlaufen. Eine genaue Stimmung nach diesen Stufengrössen kann aber nur mit Hilfe eines Monochordes geschehen, und auch dieses ist hiezu nur in der Art geeignet, wie es in dem praktischen Theil meiner Schriften unter dem Titel „Instrumentation" gelehrt ist. — Wenn man die Maassen des Monochordes so anlegt, dass der Grundton der Scala durch die leere Saite gegeben wird, so muss die Scala des Monochordes von den oben vorgeschriebenen Stufengrössen nothwendig abweichen. — Mit der sogenannten gleichschwebenden Temperatur, blos nach dem Gehör, wird man die oben angelegte chromatische Scala nur annähernd zu Stande bringen. Von einer Ausgleichung der Terzen kann bei dieser Anlage gar keine Rede sein, es muss die kleine Terz um 0·16 einer Stufe unter das reine Verhältniss $\frac{6}{5}$ herabgestimmt, die grosse Terz nahe um die gleiche Grösse, nämlich um 0·14 über ihr Verhältniss $\frac{5}{4}$ hinauf gestimmt werden. Die Sexten $\frac{5}{3}$ und $\frac{8}{5}$ folgen nothwendig dem Missverhältniss der Terzen. Jene Clavierstimmer, welche die Terzen nach einer ungleich schwebenden Temperatur für gewisse Tonarten zu verbessern suchen, bringen in die anderen Tonarten eine desto grössere Dissonanz.

Wenn man die Claviere in den Terzen und Sexten möglich rein stimmen will, so hat man gar kein anderes Mittel, als die chromati-

sche Scala derselben ganz aufzugeben und dafür die diatonische Scala mit 17 Tönen anzunehmen, diese aber auf 2 Claviere zu vertheilen, deren eines die erhöhten, das andere die erniedrigten Halbtöne darstellt. Doppelclaviaturen, welche die beiderseitigen Halbtöne auf Einem Instrumente enthalten sollen, sind aus mehrfachen Gründen nicht anzuwenden.

b) Die bisherige Temperatur der diatonischen Scala.

Für die Anlage dieser Scala sind schon sehr verschiedene Berechnungen gemacht worden, aber alle nur für die Stufen auf der *C*-Leiter. Nach diesen Rechnungen variirt die Grösse des kleinen Halbtones zwischen $\frac{128}{125} = 0·42$ und $\frac{25}{24} = 0·71$; der grosse Halbton variirt zwischen $\frac{135}{128} = 0·92$ und $\frac{27}{25} = 1·33$, die Secunde zwischen $\frac{10}{9}$ und $\frac{9}{8}$, die kleine Terz zwischen $\frac{75}{64} = 2·76$ und $\frac{6}{5} = 3·16$, die grosse Terz zwischen $\frac{100}{81} = 3·65$ und $\frac{81}{64} = 4·08$, die Quart zwischen $\frac{4}{3} = 4·98$ und $\frac{27}{20} = 5·20$ u. s. w. In demselben Maasse variiren auch die grösseren Intervalle, welche aus der Umkehrung der Töne der hier genannten kleinen Intervalle sich darstellen.

Eine Ausgleichung der verschiedenen Maassen, womit jedes Intervall in allen Lagen auf ein bestimmtes Maass fixirt sein sollte, hat noch keine mathematische Temperatur zu Stande gebracht.

Musiker auf Streichinstrumenten pflegen, wenn sie nicht im Orchester spielen, gar nicht zu temperiren, sondern greifen nach dem Gehör jedes Intervall möglich rein. Die Folge davon ist, dass kein Ton am Griffbrett eine fixe Stellung hat, sondern je nach dem melodischen oder harmonischen Zusammenhang der Töne bald höher, bald tiefer gegriffen wird. Die rationel gebildeten Musiker dieser Instrumente temperiren die Quinten mit der Stimmung der Saiten; sie gleichen die beiden Grössen der Secunde $\frac{10}{9}$ und $\frac{9}{8}$ schon mit der Scala auf der ersten Position zu einem Mittelmaass aus; sie bemühen sich auch jedem Ton eine fixe Stellung am Griffbrett zu geben. Dieses Ziel können sie aber nur dadurch ohne Beirrung der Intervalle erreichen, wenn sie nach Anleitung einer das ganze diatonische System umfassenden Temperatur vorerst erlernt haben, jede Tonreihe, deren Glieder in Quinten von einander abstehen, so darzustellen, dass die Griffe für je vier Töne in gerader Linie parallel mit dem Steg über das Griffbrett laufen. Eine solche umfassende

Temperatur würde man in der bisherigen musikalischen Literatur vergeblich suchen; sie wird in dem folgenden Absatze vorgetragen werden. Die mathematischen Vorarbeiten, welche hierzu erforderlich waren, können hier nicht vorgetragen werden; es genügt das Verfahren anzudeuten, mit welchem die Aufgabe gelöst wurde.

c) Meine Temperatur des diatonischen Systems.

Um für jedes Intervall das mittlere Maass zu finden, auf welches seine Grösse fixirt werden soll, wurden die Töne dieses Systems mit den einfachsten Schwingungsverhältnissen verzeichnet wie folgt:

c	*c*ǁ	*ds*	*d*	*d*ǁ	*es*	*e*	*f*	*f*ǁ	*gs*	*g*	*g*ǁ	*as*	*a*	*a*ǁ	*b*	*h*	*c*
1	$\frac{25}{24}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{2}{1}$.

Aus diesem Verzeichniss wurde erhoben: wie vielfach jedes Intervall und mit welchen Grössen es darin enthalten ist. Da zeigt sich nun die Secunde zwischen den Tönen *c—d*, *ds—es*, *f—g*, *f*ǁ*—g*ǁ, *as—b*, *a—h*, zusammen sechsfach, in der Grösse $\frac{9}{8}$; zwischen den Tönen *d—e*, *es—f*, *e—f*ǁ, *gs—as*, *g—a*, *b—c*, *h—c*ǁ, zusammen siebenfach erscheint sie in der Grösse $\frac{10}{9}$; in *g*ǁ*—a*ǁ und *c*ǁ*—d*ǁ ist sie = $\frac{28}{25}$.

Die Terz kommt zehnfach vor mit $\frac{6}{5}$; in *b—ds* und *d—f* aber ist sie = $\frac{32}{27}$, in *d*ǁ*—f*ǁ und *a*ǁ*—c*ǁ = $\frac{25}{21}$.

Die grosse Terz ist in *d — f*ǁ = $\frac{100}{81}$, in *h — d*ǁ = $\frac{56}{45}$, in *f*ǁ*—a*ǁ = $\frac{63}{50}$, in den übrigen 10 Intervallen mit $\frac{5}{4}$. Die Quart ist in *ds—gs*, *f—b*, *a—d* und *f*ǁ*—h* = $\frac{27}{20}$; in *d*ǁ*—g*ǁ = $\frac{75}{56}$; in den übrigen 11 Intervallen erscheint sie mit $\frac{4}{3}$.

Die grösseren Intervalle, welche die vorgenannten zur Octave ergänzen, differiren in ihren Grössen in demselben Maasse, wie diese; denn es ist z. B. *d—c* = $\frac{16}{9}$; *e—d* = $\frac{8}{5}$; *es—c* = $\frac{5}{3}$; *f—d* = $\frac{27}{16}$ u. s. w.

Nun wurden die Intervalle mit ihren relativen Werthen summirt und hieraus der mittlere Werth für die Grösse, welche dem Intervall nach einem Durchschnittsmaass zu geben ist, erhoben. So ergab sich der mittlere Werth einer Secunde = 1·11786; einer kleinen Terz = 1·19643; einer grossen Terz = 1·24915; einer Quart = 1·33787 u. s. w.

Aus diesen mittleren relativen Werthen wurden mit Hilfe der Tabelle, welche dem I. Bande meiner Schriften „die natürlichen

Gesetze der Musik" als Beilage 2 zuliegt, die Stufen des geometrischen zwölftheiligen Tonmaasses gemessen, und es fand sich, dass diese Stufenmaassen in den nachverzeichneten Grössen den darunter gesetzten temperirten Intervallen einer zwölfstufigen Leiter des diatonischen Systemes entsprechen:

Geometrisches Tonmaass	1·92	3·11	3·85	5·04	5·77
Intervalle	2	3	4	5	6

Das letzte Intervall ist die sogenannte übermässige Quart, welche in der Umkehrung der Töne die falsche Quint enthält. Diese muss zum Unterschied von der ersten mit ϭ bezeichnet werden.

Nachdem die geometrischen Tonmaassen 3·11, 3·85 und 5·77 auf 3·12, 3·84, 5·76 modificirt worden sind, waren mit 1·92, 3·12, 3·84, 5·04, 5·76 lauter Grössen gewonnen, welche durch den gemeinschaftlichen Theiler 0·24 ohne Rest theilbar sind. Durch Completirung dieser Grössen zu 12 wurden auch die Tonmaassen für die complementären Intervalle aufgestellt, nämlich:

Tonmaassen	10·08,	8·88,	8·16,	6·96,	6·24,
Intervalle	10	9	8	7	ϭ.

Alle diese Tonmaassen sind gleichfalls durch 0·24 ohne Rest theilbar. Dieser gemeinschaftliche Theiler ist in der 12ˢ fünfzigmal enthalten und wird ein Comma genannt, da er dem bisherigen Comma = 0·22 sehr nahe gleich ist.

Eine Stufe des genannten zwölftheiligen Tonmaasses enthält 4 1/6 Commata.

Mit diesem neuen Comma gemessen, wurde die zwölfstufige diatonische Leiter mit den unten beigesetzten Zahlen der Comata in folgender Weise verzeichnet:

Stufen	0	1	2	3	4	5	6	ϭ	7	8	9	10	11	12
Commata	0	5	8	13	16	21	24	26	29	34	37	42	45	50
Tonleiter	*c*	*ds*	*d*	*es*	*e*	*f*	*f♯*	*gs*	*g*	*as*	*a*	*b*	*h*	*c̄*

Die Differenz zwischen den Zahlen der Commata beträgt 3 Commata für den kleinen, und 5 Commata für den grossen Halbton. Die „kleine Diesis" *f♯*—*gs* enthält 2 Commata. Das *gs* gehört aber nicht in diese Tonleiter auf dem Grundton *C*, es wurde nur hieher gesetzt, weil seine Stufenzahl ϭ das Complement zu 6 ist, und weil

hier zugleich dargestellt werden sollte, wie die beiderseitigen Stufen, welche sich zu 12 summiren, auch in den Zahlen ihrer Commata paarweise die Summe 50 geben.

Auf dem Grundton *a* hat diese Leiter die folgende Tonreihe:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a & b & h & c & c^{\sharp} & d & d^{\sharp} & e & f & f^{\sharp} & g & g^{\sharp} & a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12. \end{array}$$

Die Intervalle des diatonischen, so wie des chromatischen Systems müssen nun durchaus mit den Zahlen der zwölfstufigen Leiter bezeichnet werden, und man wird von hier an die Intervallzahlen nicht mehr nach der siebenstufigen, sondern nach der zwölfstufigen Leiter zu verstehen haben.

Allein es kommen im diatonischen Systeme viele Intervalle vor, welche die oben verzeichneten Stufenmaassen entweder nicht ganz erreichen oder dieselben überschreiten. Z. B. $c - d^{\sharp}$ besteht aus $c - d$ und $d - d^{\sharp} = 8 + 3 = 11$ Commata; $gs - a^{\sharp}$ besteht aus $gs - as$ und $as - a^{\sharp}$; letzteres besteht aus $as - a$ und $a - a^{\sharp}$, enthält also $2 \times 3 = 6$ Commata, mit Zuzählung der 8 Commata für $gs - as$ enthält also das Intervall $gs - a^{\sharp}$ 14 Commata. Diese beiden Intervalle sind also um 2 Commata kleiner und um 1 Comma grösser als die 3^z mit 13 Commata. Es muss also $c - d^{\sharp}$ eine kleine 3^z, $gs - a^{\sharp}$ eine grosse 3^z genannt werden.

Ähnliche Abweichungen von den Maassen der einfachen Stufenzahlen kommen bei allen Stufen vor. Um die kleinen und grossen Maassen von den Normalen wie sie auf der obigen Leiter in Commaten verzeichnet wurden, in der einfachsten Weise zu unterscheiden, wird den Stufenzahlen ein Punkt beigesetzt, für die kleinen Maassen unten zur linken, für die grossen oben zur rechten. Nach diesem Gesetz wird das Intervall $c - d^{\sharp}$ mit .3, $gs - a^{\sharp}$ mit 3· bezeichnet. —

Es sollen hier der besseren Verständigung wegen noch einige Beispiele vorgeführt werden: es ist nämlich

$$g^{\sharp} - b = g^{\sharp} - a + a - b = 2 \times 5 = 10 \text{ Commata.}$$

Dieses Maass überschreitet die 2^d mit 8 Commata um 2 Commata, es muss daher mit 2· bezeichnet werden; weiters ist $d^{\sharp} - gs = d^{\sharp} - f^{\sharp} + f^{\sharp} - gs = 13 + 2 = 15$ Commata; es ist also um

1 Comma kleiner als die 4^t und muss mit .4 bezeichnet werden; dagegen ist $d—gs = d—f^{\parallel} + f^{\parallel}—gs = 16 + 2 = 18$ Commata; es überschreitet also die 4^t um 2 Commata, und ist mit 4· zu bezeichnen; ferner ist $c—g^{\parallel} = c—g + g—g^{\parallel} = 29 + 3 = 32$ Commata, also um 2 Commata kleiner als die normale Octave mit 34 Commata, es ist daher mit .8 zu bezeichnen.

Diese anomalen Intervallgrössen ergänzen sich gleichfalls paarweise zur 12^z; denn es ist z. B. $b—g^{\parallel} = 40$ Commata $= .10$, und gibt mit $g^{\parallel}—b = 2·$ die Summe $.10 + 2· = 12$; $g^{\parallel}—c = g^{\parallel}—h + h—c = 13 + 5 = 18$ Commata $= 4·$, gibt mit $c—g^{\parallel} = .8$ gleichfalls die 12^z; ebenso $d^{\parallel}—c = 39$ Commata $= 9·$ mit $c—d^{\parallel} = .3$; dessgleichen $ds—d^{\parallel} = 1·$ mit $d^{\parallel}—ds = .11$; $b—d^{\parallel} = .5$ mit $d^{\parallel}—b = 7·$ u. s. w.

Die Übersicht aller normalen und anomalen Intervalle des diatonischen Systemes mit ihren temperirten Tonmaassen — diese in den Stufen der geometrischen Abtheilung, in Commaten und im relativen Werth der Schwing: Zahlen angezeigt — enthalten die Tabellen 3 und 4 zum ersten Bande meines obencitirten Werkes.

Die vollständige Scala des diatonischen Systems, welche oben verzeichnet wurde, enthält in ihren 17 Tönen zwischen je 2 nächsten Gliedern Intervalle von 2—3 Commaten; hiervon machen nur *e—f* und *h—c* eine Ausnahme, indem sie 5 Commata enthalten. Die Kanoniker glauben auch in diese beiden Intervalle ebenso 2 Halbtöne einschalten zu müssen, wie dieselben in den Secunden *c—d—e* und *f—g—a—h* vorkommen. Die Folge dieser Überhäufung der Intervalle *e—f* und *h—c* ist, dass die eingeschalteten Halbtöne sich kreuzen $= e\ fs\ e^{\parallel}\ f — h\ cs\ h^{\parallel}\ c$ Da *fs* von $e^{\parallel}$, und *cs* von $h^{\parallel}$ nur 1 Comma entfernt ist, so können die beiderseitigen Töne wohl leicht durch einen chromatischen Mittelton vertreten werden, der das ganze Intervall in 2 gleiche Hälften mit $2\frac{1}{2}$ Commaten abtheilt. Ich habe es daher für nothwendig erachtet in das diatonische System auch diese beiden chromatischen Stufen, die ich e^i und h^i nenne, aufzunehmen, und hiemit die Zahl der Töne dieses Systems auf 19 zu vervollständigen. Die Abstufung $e—e^i—f$ und $h—h^i—c$ ist, wie die obgenannte Tabelle 4 zeigt, nahe gleich der grossen Diesis. —

Für die Intervalle von der 6 aufwärts sind die obigen Tabellen von der rechten zur linken zu lesen.

E. Die Tongattungen.

Bisher kennt man bekanntlich nur zwei Tongattungen, Dur und Mol, deren physische Charaktere zu einander im Gegensatz stehen, indem das Dur hell und kräftig, das Mol etwas dunkel und weich klingt. Die Ursache dieses Gegensatzes liegt darin, dass die Schwing-Zahlen der Dur-Accorde in einfacher ununterbrochener Reihe fortlaufen, in Mol dagegen für jedes Intervall abgesondert stehen, und nur durch eine höhere Zahlenreihe mit einander verbunden werden können; z. B.

$$\begin{array}{l}
3\quad 4\quad 5\quad 6\\
g\,_5\,c\,_4\,e\,_3\,g\\
a\quad e\quad c\quad a \leftarrow\\
4—3\ \ :\ \ :\\
\quad 5—4\ \ :\\
\qquad 6—5\\
20\ \ 15\ \ 11\ \ 10
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\\
es\,_4\,g\,_3\,b\,_{.3}\,c^{\|}\,_{2.}\,es\\
c^{\|}\quad a\quad f^{\|}\quad es\quad c^{\|} \leftarrow\\
5—4\qquad :\ \ :\\
\quad 6—5\ \ :\ \ :\\
\qquad 7—6\ \ :\\
\qquad\quad 8—7
\end{array}$$

Wenn man in Mol die letzte Zahlenreihe 10 12 15 20 mit dem gemeinschaftlich Vielfachen 60 vergleicht, so erscheinen ihre Glieder als Quotienten von 1 getheilt durch die Schwingungszahlen in Dur, nämlich $\frac{60}{20\ 15\ 12\ 10} = \frac{1}{3\ 4\ 5\ 6}$.

Der obige Vierklang auf *es* wird, wenn man ihn auf den Grundton *g* versetzt, heissen $g_4 h_3 d_{.3} e^{\|}_2 g$ und stellt die akustische Grundform des Dom. Sept.-Accordes zum tonischen Dreiklang *c e g* dar. Weil aber in der Leiter auf *c* das $e^{\|}$ nicht vorkommt, so wird es in *f* verändert und der Vierklang in der Form $g_4 h_3 d_3 f_2 g$ gegeben.

Das vollständige Register, welches diesen Accord in allen Lagen und in Mol und Dur zugleich darstellt, ist

$$\begin{array}{ccccccc}
g & h & d & f & g & h & d\\
4 & 3 & 3 & 2 & 4 & 3 & \\
a & f & d & h & a & f & d
\end{array}$$

Die mathematische Form dieses Registers gehört also beiden Tongattungen an, in *R* zu Dur, in *V* zu Mol; sie ist also g e n e r i s u t r i u s q u e, oder — wie man sie auch nennen kann — generis ambigui.

Es gibt aber noch mehrere Tongattungen, welche von den Musikern noch nicht in dieser Eigenschaft erkannt worden sind, obgleich sie die Combinationen der Töne dieser Gattungen mehr oder weniger in Anwendung bringen. Von diesen ist zunächst als dritte hervorzuheben die gemischte Tongattung *(genus mixtum)*, in welcher die Accorde in Dur mit jenen in Mol innig verschmolzen sind, z. B.

$$a_3 c_4 e_3 g \text{ — } \quad c_4 e_3 g_4 h \text{ — } \quad g_4 h_3 d_3 f_4 a$$

Der physische Charakter dieser Accorde zeigt auch deutlich eine Verbindung der Charaktere von Dur und Mol, so dass man den Klang der gemischten Accorde vielleicht am passendsten mit dem Worte „helldunkel" bezeichnen kann. Dieser Charakter tritt bei den Accorden dieser Tongattung auch in jenen Lagen hervor, in welchen die mathematischen Formen des Dreiklangs 43—35—54 nicht vorliegen, z. B.

$$e_3 g_2 a_3 c, \quad g_4 h_1 c_4 e. \quad h_3 d_3 f_2 g_2 a.$$

Eine vierte Tongattung stellt sich dar in der mehrfachen Wiederholung Eines Intervalles oder in der gleichmässigen Aufeinanderfolge zweier Intervalle, z. B.

$$h_3 d_3 f_3 as \text{ — } \quad b_4 d_4 f^{\sharp} \text{ — } \quad c_2 d_2 e_2 f^{\sharp} \text{ — }$$
$$h_1 c_4 e_1 f \text{ — } \quad c^{\sharp}_1 d_5 g_1 as \text{ — } \quad f_2 g_4 h_2 c^{\sharp}_4 f.$$

In dem physischen Charakter so wie in der mathematischen Form dieser Accorde ist eine auffallende Monotonie zu erkennen, wesshalb diese Gattung der Tonverbindungen die monotone genannt werden muss.

Endlich gibt es auch eine fünfte Tongattung, in welcher kein Merkmal der vorgenannten 4 Tongattungen enthalten ist, die demnach die unbestimmte *(genus indefinitum)* zu nennen ist. Z. B.

$$g_4 h_1 c, \quad e_1 f_3 as, \quad e_2 f^{\sharp}_3 a_1 b, \quad f^{\sharp}_1 g_3 b_3 c^{\sharp}, \quad f^{\sharp}_3 a_1 b_4 d.$$

und die Merkmale, durch welche sich jede von den anderen unterscheidet, völlig kennen zu lernen, ist es nothwendig, für jede Tongattung ein eigenes Tonstück zu componiren, und darin nur die Formen der Tonverbindungen zu gebrauchen, welche der betreffenden Tongattung eigen sind. Alle diese Formen sind auf der Tabelle 9 zum ersten Bande meines obencitirten Werkes verzeichnet.

F. Die Tonarten.

Die alten Kirchencomponisten haben ihre „Tonarten" dadurch erzeugt, dass sie in der siebenstufigen Scala allmählich einen Ton nach dem andern zum Grundton machten. Mit diesem Fortrücken des Anfangspunktes erhielt die Scala verschiedene Stufengrössen und mit diesen auch verschiedene Charaktere. — „Tonarten."

Von diesen sind in der Musik der neueren Zeit nur noch zwei im Gebrauch. die jonische Dur- auf *c*. und die äolische Mol-Scala auf *a*.

Diese beiden Scalen wurden aber nach den verschiedenen Bedürfnissen des Vortrages auf alle anderen Stufen des diatonischen und des chromatischen Systemes übertragen, wobei auch die Intervalle jeder der beiden Leitern genau in die neuen Leitern übertragen wurden.

Mit dieser Übertragung glauben die Chromatiker 11 neue Tonarten in Dur und eben so viele in Mol gewonnen zu haben, daher mit Inbegriff der 2 alten, im Besitz von 12 Dur- und 12 Mol-Tonarten zu sein. —

Dass mit diesen Übertragungen nicht eine einzige Tonart zu Stande gekommen ist, will kein Musiker begreifen, denn selbst jene seltenen Ausnahmen unter ihnen, welche einsehen, dass zwei Tonleitern, welche verschiedene Töne, aber diese durchaus in denselben Intervallen enthalten, nur nominel verschieden, in ihrer inneren Lage aber identisch sind — werden durch die scheinbar verschiedenen Eindrücke, die sie aus solchen Scalen erhalten haben wollen, in ihrer objectiven Überzeugung von der genannten Identität dieser Scalen wankend gemacht, und glauben: es müsse doch eine innere Verschiedenheit zwischen denselben bestehen, wenn sie auch den Grund davon einzusehen nicht



vermöchten. In diesem Glauben sind nicht blos die Geiger und Sänger, sondern auch die Clavierspieler befangen, welche letztere doch einsehen sollten: dass bei einer richtigen Stimmung ihres Instrumentes die Aufsteigung von Stufe zu Stufe — diese mag schwarz oder weiss sein — nach demselben geometrischen Differentialquotienten (nahe $\frac{18}{17}$) fortlauft; dass demnach jedes wie immer bezeichnete Intervall auf diesem Instrumente in allen Tonhöhen eine fixe Grösse hat, und in Folge dessen auch jeder Accord und jede Scala auf einem so regelrecht gestimmten Instrumente in allen möglichen Lagen im inneren Bau absolut unveränderlich bleibt; somit auch in den physisch-psychischen Charakteren unmöglich eine Abänderung erleiden kann. Wenn ein Clavier nach der fehlerhaften ungleichschwebenden Temperatur gestimmt wird — wie man es hie und da sogar bei renommirten Tonlehrern findet — dann freilich müssen Accorde und Scalen in verschiedenen Lagen des Instrumentes auch Veränderungen in den Intervallgrössen erleiden und darin in ihren Charakteren mehr oder weniger modificirt werden. Aus dieser Quelle der „Tonarten“ müssen aber im Bereich der Claviermusik nicht blos 12 Tonarten, sondern eben so viele entstehen als Abänderungen denkbar sind, die durch die mehrfachen Methoden der ungleich schwebenden Stimmung und durch die mehr oder minder genaue Ausführung dieser Methoden auf jeder Stufe der Clavierscala eintreten können. Es muss daher jeder Clavierspieler, der sein Instrument anders gestimmt hat als sein Nachbar, die Charaktere der Tonarten anders empfinden und bezeichnen, als dieser. — Unter diesen Umständen wird also der Begriff „Tonart“ ganz aufgelöst und eine physische Charakteristik der Tonarten, etwa nach Schubart's merkwürdigem Beispiel, hat nur eine ganz individuelle Geltung.

Die grösste Verschiedenheit in den Charakteren der Scalen kann man wohl dadurch erzeugen, dass man die reine diatonische Scala mit 17 oder 19 Tönen nach und nach von einer Stufe auf die andere verschiebt. Die Veränderungen, welche in den Stufengrössen durch diese Verschiebung des Grundtones entstehen, sind auf der Tabelle I zum ersten Bande meines Werkes genau dargestellt. Diese Veränderungen entstehen auch auf Streichinstrumenten, wenn der Spieler sein Instrument nur auf Einem Grundton und ohne Temperatur zu gebrauchen erlernt hat, dann aber Tonstücke auf anderen Grundtönen ausführt.

Die Orchesterstimmung hat durch fortgesetzte Steigerung zuletzt eine solche Höhe erreicht, dass eine Herabsetzung allgemein als nothwendig erkannt wurde. Zudem war die Stimmhöhe nicht nur an verschiedenen Orten, sondern auch in verschiedenen Orchestern desselben Ortes so different geworden, dass am Ende schon beinahe für jedes Kunstinstitut eigene Instrumente nöthig waren. Eine Normirung der Stimmung war daher in allen Ländern ein fühlbares Bedürfniss geworden. — Die französische Regierung hat diesem Bedürfnisse wenigstens für ihr Land zuerst entsprochen, indem sie mit der Verordnung vom 16. Februar 1859 allen öffentlichen Musikinstituten Frankreichs ein Stimmpfeifchen *(diapason)* mit 870 (halben) Schwingungen zugeschickt, und diese Stimmhöhe als normale für $\bar{a}$ vorgeschrieben hat. — Wenn man frägt: warum gerade diese Zahl der Schwingungen als normale vorgeschrieben wurde? so lässt sich hierauf mit Wahrscheinlichkeit antworten: dass man die Stimmung überhaupt auf die Höhe zurückführen wollte, welche die ersten Pariser Orchester in den Jahren 1823—1834, gemäss der von Fischer und Scheibler angestellten Untersuchungen, gehabt haben; denn es hatte in jenen Jahren das $\bar{a}$ auf den vorzüglicheren Pariser Theatern, mit Ausnahme des italienischen, 848—867, am Conservatorium 869 Schwingungen.

In §. 39 des ersten Bandes meiner Schriften, der 1856 vollendet war, ist die Nothwendigkeit einer Normalstimmung für alle europäischen Musikinstitute dargelegt worden; es ist dabei aber auch bemerkt worden, dass zur Durchführung einer solchen Normalstimmung ein Instrument erforderlich ist, welches gegen die physischen Einflüsse der Wärme, Feuchtigkeit etc. isolirt werden, und ohne Aufwand akustischer Apparate so eingerichtet sein soll, dass die Zahl seiner Schwingungen auch durch das Maass der Kraft, womit es in Schwingung versetzt wird, nicht modificirt werde. — Ob diesen nothwendigen Erfordernissen eines solchen Instrumentes mit dem „Diapason" entsprochen ist, mögen Physiker und Mechaniker entscheiden. Indessen aber halte ich diese Herren von der Aufgabe: ein Instrument von der obigen Eigenschaft zu erfinden und zum allgemeinen Gebrauch anzufertigen — durch das französische Pfeifchen noch nicht für abgerufen. —



Ich glaube aber, dass man die Normirung der Stimmhöhe mit der Normirung des Tonsystems im ganzen Umfange hätte in Verbindung bringen sollen. Nach den älteren akustischen Schriften hat eine offene Orgelpfeife von 32 Pariser Fuss Länge 16 ganze Schwingungen, eine Pfeife von 2 Fuss Länge für *c* hat 256 ganze oder 512 halbe Schwingungen; es muss daher eine Pfeife für *á* eine Länge von 1·19748 Fuss haben und nach der reinen Stimmung 853, nach meiner Temperatur 855 halbe Schwingungen machen. Die Stimmhöhe des „*Diapason normal*" wäre also nach dieser allgemein als Grundsatz gegoltenen Anlage der Stimmung noch immer viel zu hoch. — Man sollte aber überhaupt bei der Normirung der Maassen für Instrumente die einem allgemeinen Gebrauche dienen, alle localen Maassen, und damit auch den Pariser Fuss ganz beseitigen und sich anf ein allgemeines Maass verständigen, welches von der Natur dem Verständnisse aller Völker gleich nahe gelegt ist. Als ein solches Maass haben wir die geometrische Meile und ihre Abtheilungen in Klafter, Fuss, Zolle. Nach Bessel enthält die geometrische Meile als der fünfzehnte Theil eines Grades des Äquators 22842·55 Pariser Fuss. Diese Meile in 4000 Theile getheilt gibt das Maass einer geometrischen Klafter = 5·71 Pariser Fuss, deren sechster Theil = 0·95177 Par. Fuss = 0·309174 Mètre ein geometrischer Fuss ist. Die Abtheilungen dieses Fusses in Zehntel und Hundertel geben die Längen für den Zoll und die Linie des geometrischen Maasses.

Da dieser geometrische Fuss nahe das Mittel zwischen dem englischen, französischen, rheinländischen und österreichischen hält, somit vorzugsweise geeignet ist, diese verschiedenen Maasse zu vertreten; und da seine Grundlage, der Äquator des Erdballes, eine eben so feste ist wie jene des Meridians, wonach der Mètre gemessen ist: so ist er gewiss sehr geeignet in wissenschaftlichen Discussionen als ein gemeinsamer Maasstab gebraucht zu werden. Im gemeinen Verkehr aber hat er vor dem Mètre den grossen Vorzug, dass er sich an die bisherigen europäischen Maassen nahe anschliesst.

Auf der Grundlage dieses geometrischen Maasses habe ich nun im §. 43 des ersten Bandes meines Werkes einen Plan zu einem allgemeinen Tonsystem augelegt, nach welchem die Tiefe der Töne um eine 3ᵃ unter $\underline{C}$ hinabgehen soll. Dieser tiefste Ton $\underline{\underline{A}}$ hätte, im Verhältniss zu den bisher bekannten Schwingungen der Orgel-

eine offene Orgelpfeife von 20 geometrischen Fussen zu Stande gebracht werden. Die Verkürzungen dieser Pfeife auf $\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{32}$ gäben die Töne $\underline{A}\,A\,a\,\bar{a}\,\bar{\bar{a}}$. Der letztgenannte, welcher dem $\bar{a}$ der gegenwärtigen Registrirung entspricht, hätte 860·68 einfache Schwingungen.

Da die Pari er grosse Oper im Jahre 1811 für $\bar{a}$ nur 853 Schwingungen gezeigt hatte und diese in den folgenden Jahren bis 1834 nicht über 867 vorgerückt sind: so erscheint die Zahl von 860 Schwingungen nach der projectirten neuen Anlage des Tonsystems genau in der Mitte der obigen beiden Schwingungszahlen.

Nachdem ausserhalb Frankreich nur die Operntheater in Wien und Berlin die französische neue Stimmung angenommen haben, so kann mein Entwurf zu einem allgemeinen System der Stimmung noch beinahe in allen Ländern ausserhalb Frankreich zur Discussion benützt werden.

Den vorliegenden Bemerkungen gegen die bisherigen Tonlehren könnten noch viele andere angereiht werden; allein es werden wohl diese schon genügen, um auch den strengsten Anhänger am Herkömmlichen zu überzeugen, wie sehr eine Reform der bisherigen Tongelahrtheit nothwendig ist. Ich will Denjenigen, welche geneigt sind diese in Angriff zu nehmen, mich freundlich anschliessen; Jene aber, welche meine Bemerkungen etwa cum odio et ira zurückzuweisen vermeinen, werden durch meine Rechtfertigung belehrt werden, dass ich eine Polemik durchaus nicht zu scheuen habe.



Über die Abhängigkeit des Glykogengehaltes der Leber von der Ernährung.

Von **Michael Tscherinoff** aus Moskau.

Aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität.

Die Ungewissheit, in der man sich noch immer über den Ursprung des Leberglykogens befindet, veranlasste mich, eine Reihe von Fütterungsversuchen anzustellen, welche geeignet sein könnten, den Zustand unserer Kenntnisse hierüber zu verbessern. Es handelte sich darum, eine Reihe von Thieren durch eine gegebene Zeit in verschiedener und bestimmter Weise zu füttern, und dann die relative Menge des Leberglykogens zu bestimmen. Als Versuchsthiere wählte ich Hühner, weil frühere Versuche im physiologischen Institute gezeigt hatten, dass sie verschiedenartige und ungewöhnliche Regime besser ertragen als Säugethiere, und weil man in Rücksicht auf die Futtereinnahmen nicht auf ihren guten Willen angewiesen ist, sondern ihnen das, was sie nicht freiwillig nehmen, mit Leichtigkeit hineinstopfen kann.

Das Glykogen habe ich nicht direct bestimmt, wie Pavy dies in seinen bekannten Versuchen (*Researches on the nature and treatement of diabetes,* London 1862) gethan hat. Einige seiner Zahlen waren mir durch ihre Höhe verdächtig, und es gelang mir auch, bei darauf gerichteten Versuchen nicht die Menge des Glykogens auf directem Wege mit einiger Genauigkeit zu bestimmen. Ich zog somit, da es sich nicht um absolute, sondern um relative Werthe handelte, den indirecten Weg vor. Die Leber enthält an stickstofflosen Substanzen ausser dem Glykogen nur solche, die in Alkohol oder Äther löslich sind. Durch diese Lösungsmittel sind dieselben zu entfernen. Dann gibt der Stickstoffgehalt des Rückstandes einen Maassstab für die relative Menge des Glykogens, da man dem Lebergewebe mit

den darin zurückgebliebenen Eiweisskörpern einen näherungsweise constanten Stickstoffgehalt zuschreiben kann.

Die rechte Hälfte der Leber wurde also unmittelbar nach dem Tode des Thieres in Streifen zerschnitten und in Weingeist von 94 Volumprocent geworfen, später in der Reibschale zerrieben, dann mit Alkohol und Äther ausgezogen, so lange dieselben etwas aufnahmen, und 12 bis 16 Stunden über Schwefelsäure getrocknet. Die so behandelte Substanz wurde nun in der Achatschale so fein als möglich gepulvert und nochmals mit Alkohol und Äther ausgezogen. Hiervon wurden bei 110 Grad getrocknete und dann gewogene Quantitäten im Will- und Warrentrapp'schen Apparate verbrannt, das entwickelte Ammoniak in Schwefelsäure aufgefangen und durch Titriren mit Natronlösung bestimmt.

Bei einem Theile der Versuchsthiere habe ich noch einen zweiten Weg eingeschlagen, um das Glykogen zu bestimmen.

Ich theilte die linke Leberhälfte in zwei Theile, wog jeden derselben und warf den einen, in Stücke zerschnitten, in kochendes Wasser. In diesem bestimmte ich den Zucker, der fertig gebildet darin enthalten war. Den andern behandelte ich mit Speichel, um das darin enthaltene Glykogen in Zucker vollständig überzuführen, und bestimmte die dann vorhandene Gesammtmenge des Zuckers, um auf diese Weise Verhältnisszahlen für das Glykogen zu erhalten. Zur Bestimmung des Zuckers bediente ich mich des von Prof. Brücke angegebenen Verfahrens (Allgemeine Wiener medicinische Zeitung, Jahrgang 1860, Nr. 10 und 13), bei der jeder Verdacht einer Veränderung der Probeflüssigkeit durch die Zeit wegfällt, da dieselbe aus einer blossen Auflösung von Kupfervitriol in Wasser besteht.

Die Resultate dieser zwei Arten von Versuchen sind in der beiliegenden Tabelle zusammengestellt. Col. I gibt Art und Dauer des Regime an; II wie das Thier unter demselben zu oder abgenommen hat; III. zeigt den Stickstoffgehalt in Procenten der trockenen mit Alkohol und Äther erschöpften Leber; IV. die Glykogenmengen, welche man hiernach den trockenen, mit Alkohol und Äther erschöpften Lebern in Procenten zuschreiben muss, wenn man aus den Bibra'schen Analysen den Stickstoffgehalt der hypothetisch glykogenfreien Leber zu 15·47 Proc. berechnet; V. die Glykogenmengen, welche man nach derselben Grundlage den



I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Hungern, 2 Tage.	Fettreiches Huhn — 5 Loth.	15·05	2.72	0·55	—	—
Hungern, 2 Tage.	Fettreiches Huhn — 2 Loth.	15·02	2·91	0·59	—	—
Kohl mit Hirsekörnern, 14 Tage.	Mageres Huhn — 8 Loth.	15·47	0	0	—	—
Fibirin mit Fett und Salz, 2 Tage.	+ 1 Loth.	15·36	0·72	0·14	0·20	0·22
Fibrin mit Fett u. Salz, 2 Tage.	0	15·18	1·88	0·38	0·36	0·34
Fleisch, 2 Tage.	Fettreiches Huhn + 1 Loth.	14·68	5·11	1·06	—	—
Fleisch, 4 Tage.	+ 10 Loth.	14·23	8·02	1·71	—	—
Gerste, 2 Tage.	+ 6 Loth.	11·53	26·12	6·60	—	—
Gerste, 2 Tage.	+ 2 Loth.	13·02	15·84	3·62	0·21	3·98
Reiss, 2 Tage.	— 2 Loth.	12·01	22·37	5·42	0·28	6·07
Reiss, 2 Tage.	Fettreiches Huhn + 3 Loth.	10·79	30·26	7·98	0·46	7·94
Rohrzucker mit Fibrin, 3 Tage.	+ 3 Loth.	12·27	20·69	4·96	0·12	5·00
Rohrzucker mit Fibrin, 3 Tage.	+ 2 Loth.	10·00	35·36	9·86	0·35	10·87
Rohrzucker mit Fibrin, 3 Tage.	+ 1 Loth.	8·92	42·34	12·80	0·20	14·25
Traubenzucker mit Fibrin, 2 Tage.	+ 1 Loth.	10·23	33·88	9·26	—	—

feuchten Lebern zuschreiben muss, in Procenten; VI. gibt die Zuckermengen, welche als fertig gebildet in den Lebern gefunden wurden, in Procenten auf die feuchte Leber berechnet, und V. die Zuckermengen, welche nach der Behandlung mit Speichel gefunden wurden, gleichfalls in Procenten auf die feuchte Leber berechnet.

Um die Verhältnisszahlen für die Glykogenmengen aus der Zuckerbestimmung abzuleiten, sollte man also hiernach zunächst die Zahlen der Columne VI von den Zahlen der Columne VII abziehen. Ich glaube aber, dass man hierdurch beträchtliche Fehler begehen würde. Bereits Pavy gibt an, dass in der ganz frischen Leber kein Zucker oder nur Spuren davon enthalten sind und Ritter's (Zeitschrift für rationelle Medicin, dritte R., Bd. XXIV) leugnet das Vorkommen von Zucker in der frischen Leber ganz [1]).

Nach zwei Versuchen, welche ich in der Weise anstellte, dass ich im Moment des Tödtens selbst ein Leberstück ausschnitt und dies sogleich in siedendes Wasser warf, schätze ich die darin enthaltene Zuckermenge etwa auf 0·1 Proc. der frischen Lebersubstanz, und muss somit glauben, dass die in Columne VI enthaltenen Zahlen zum grossen Theile von nach dem Tode gebildeten Zucker herrühren, da mit dem Hineinwerfen der für die Stickstoffbestimmung bestimmten Stücke in Weingeist und dem Wägen drei bis vier Minuten vergingen. Man wird sich desshalb meiner Ansicht nach am meisten der Wahrheit nähern, wenn man die Zahlen der Columne VII sämmtlich um 0·1 verkleinert und sie dann als die Repräsentanten des aus dem Glykogen gebildeten Zuckers ansieht.

Zu den Versuchen im Allgemeinen habe ich noch zu bemerken, dass alle Versuchsthiere, ehe sie dem Regime unterworfen wurden, zwei Tage fasteten, natürlich mit Ausnahme der beiden, bei denen das Regime selbst in Fasten bestand. Als ich meine Arbeit anfing, führte ich das Regime für eine grössere Anzahl von Tagen durch, als in den hier mitgetheilten Versuchen; aber ich überzeugte mich bald, dass die Zusammensetzung der Leber rasch geändert wird, so dass die letzten zwei bis vier Tage massgebend sind. Eine längere Versuchsdauer ist sogar geeignet die Resultate unbrauchbar zu machen, indem das Thier als Ganzes durch dieselbe verändert wird und oft nicht unbeträchtlich leidet.

---

[1]) Von einem Hunde der 8 Tage nur Wasser erhalten hatte und dann durch Verblutung getödtet war, führt Bernard bereits in seinem Liquides de l'organisme, Paris 1859, Vol. II, pag. 127 an, dass keine deutlich nachweisbare Spuren von Zucker im Lebergewebe enthalten gewesen seien und leitet dies von dem Tode durch Verblutung ab.

In Rücksicht auf den Versuch, in dem Kohl und Hirsekörner gefüttert wurden, habe ich hinzuzufügen, dass beide als Abmagerungsfutter, das heisst, in unzureichender Menge gegeben wurden. Es zeigt sich dies auch in der Gewichtsabnahme um 8 Loth in 14 Tagen. Das Thier war schon im Beginne des Versuches mager und als es geschlachtet wurde, hatte die Abmagerung einen sehr hohen Grad erreicht.

Das Resultat des Versuches steht also durchaus nicht im Widerspruch mit den übrigen Versuchen mit vegetabilischem Futter, in denen die Kohlenhydrate in Überfluss gereicht wurden und demgemäss hohe Glykogenziffern erscheinen. Es war nur ein protrahirter Hungerversuch, der mit ganz oder nahezu vollständiger Aufzehrung des Leberglykogens endigte.

Wenn man unsere Versuchsresultate ansieht, so stellen sie eine Thatsache vollkommen ausser Zweifel, die Thatsache, dass die Kohlenhydrate im Futter, wenn sie reichlich zugeführt werden, bereits in wenig Tagen das Glykogen auffällig vermehren, während den Eiweisskörpern und den Fetten eine solche Wirkung nicht zukommt. Der erste Gedanke wird also der sein, dass sich das Glykogen aus den genossenen Kohlenhydraten gebildet habe. Nach den Erfahrungen, welche in neuerer Zeit über die Verbreitung des Dextrins im Körper der körnerfressenden Thiere und der Anhäufung desselben in der Leber eines Pferdes (Limpricht in Liebig's und Wöhler's Annalen Bd. CXXXIII, S. 293) gemacht sind, würde diese Ansicht, so weit sie die Stärke betrifft, auch keine besondere Schwierigkeiten bieten. Unsere Versuche weisen aber aus, dass der Zucker in demselben, ja in noch höherem Grade als die Stärke Anhäufung von Leberglykogen hervorrufe, und es ist doch in der That aus chemischen Gründen ziemlich unwahrscheinlich, dass sich der Zucker im Thierkörper in Leberglykogen ungewandelt habe. Indem ich die mit Zucker angestellten Versuche discutire, muss ich noch auf einen besonderen Punkt aufmerksam machen. Alle mit Zucker gestopften Hühner haben Fettlebern bekommen. Auch bei Reis kamen Fettlebern vor, aber nur zwei in vier Fällen, während sie nach Zucker schon in drei Tagen ausnahmlos eintraten. Um dies Factum zu constatiren, wurden im Ganzen 13 Hühner je drei Tage mit Zucker gestopft. Sie bekamen sämmtlich Fettlebern, gleichviel ob dem Zucker Fibrin oder Reis zugesetzt wurde. Sie hatten dabei vorher ent-

weder zwei Tage gehungert, oder sie waren durch längere Zeit, theils 8 theils 14 Tage auf Abmagerungsfutter, das aus Kohl und Hirse bestand, gesetzt worden. Die Thiere, die probeweise vom Abmagerungsfutter genommen und abgeschlachtet wurden, zeigten keine Spur von Fettansammlung in der Leber, die aber, die drei Tage mit Zucker gestopft waren, hatten ausgesprochene, weisse Fettlebern, selbst wenn der übrige Körper im höchsten Grade abgemagert war [1]).

Dieser Umstand kann auf den Gedanken bringen, dass vielleicht der hohe Glykogengehalt nur ein scheinbarer gewesen sei, indem der Gehalt an Eiweisskörpern in den Fettlebern vermindert war; aber dem ist nicht so. Erstens waren die Fettlebern nicht nur fettreicher, sondern auch grösser. Die Vergleichung des Lebergewichtes von zwei gleich grossen Hühnern, eines wie das andere ohne Fettleber, gab das Verhältniss von 3 zu 2. Zweitens würde auch die reichlichste Annahme für Verminderung der Eiweisskörper solche Ziffern, wie sie uns vorliegen, nicht erklären können. Hätte der Zucker das Glykogen nicht vermehrt, so müssten die durch dreitägiges Stopfen mit Fibrin und Zucker erzielten Lebern an Glykogengehalt noch unter denen stehen, welche nach zweitägigem Stopfen mit Fibrin und Fett gefunden wurden. Die ersteren liessen uns aber aus der Stickstoffbestimmung 20·69 bis 42·34 Proc. der trockenen mit Alkohol und Äther erschöpften Substanz als Glykogen berechnen, die letzteren 0·72 bis 1·88 Proc.

Endlich müsste, wenn das Glykogen in den Fettlebern nicht absolut vermehrt gewesen wäre, sich dies durch die niedrigeren aus der Zuckerbestimmung erhaltenen Ziffern erweisen. Diese Ziffern zeigen aber bei den Fettlebern nahezu dasselbe Verhältniss zu den aus den Stickstoffbestimmungen erhaltenen Ziffern, wie in anderen Lebern.

Das Glykogen wird also durch das Stopfen mit Zucker absolut vermehrt. Dies ist in Übereinstimmung mit den Angaben von Pavy,

---

[1]) Bei dieser Gelegenheit muss ich erwähnen, dass ich mich überzeugt habe, dass im Darmcanal und in den Chylusgefässen kein Fett war. Ich thue dies desshalb, weil Grouven in neuerer Zeit die Ansicht aufgestellt hat, dass sich die Kohlenhydrate (bei Wiederkäuern) im Darmcanale in Fett umwandeln. Bei Fütterung mit Rohrzucker fand ich immer viel Traubenzucker im Dünndarm.

wenn ich auch nicht so grosse Zahlen erhalten habe als er. Da es nun, wie gesagt, vom chemischen Standpunkte aus wesentliche Schwierigkeiten hat, anzunehmen, dass sich der Zucker im Thierkörper direct in Glykogen umwandele, so müssen wir noch die anderen Möglichkeiten zu erschöpfen suchen. Als solche bietet sich uns zunächst die dar, dass normaler Weise eine stete Bildung beziehungsweise Ablagerung, und ein steter Verbrauch von Fett und Glykogen in der Leber stattfinde, und dass der Verbrauch durch das reichliche Vorhandensein eines anderen leicht oxydirbaren Stoffes im Blute, also in unserem Falle des Zuckers, beziehungsweise seiner nächsten Umwandlungs- oder Zersetzungsproducte, gehemmt werde, und sich in Folge davon Fett und Glykogen in der Leber anhäufen; während umgekehrt, wenn im Futter wenig Kohlenhydrate sind, wie im Fleisch, oder gar keine, wie dies bei der Fütterung mit Fibrin, Fett und Salz der Fall war, das Blut an Umwandlungs- und Zersetzungsproducten der Kohlenhydrate verarmt und in Folge davon ein stärkerer Verbrauch von Leberglykogen als bei normaler Körnerfütterung stattfindet, auch dann, wenn das Thier sich übrigens wohl befindet und an Gewicht zunimmt.

Wenn man auch diese Deutung der Versuchsresultate nicht annehmbar findet, so bleibt nichts anders übrig, als dass der Zucker auf nicht näher zu bezeichnende Weise eine krankhafte Production von Glykogen und von Fett in der Leber hervorgerufen habe. Es ist aber wohl zu bemerken, dass diese Vorstellung, so unbestimmt wie sie ist, noch nicht einmal allen Versuchsresultaten genügt. Sie erklärt nicht warum bei Fütterung mit Gerste so sehr viel grössere Glykogenmengen erhalten wurden als bei Fleischfütterung. Denn einerseits kann man die hohen Glykogenziffern bei Gerste nicht als Folge einer Krankheit bezeichnen, da die Gerste das normale Futter auf allen Hühnerhöfen ist, anderseits ist dies aber ebenso wenig erlaubt in Rücksicht auf die niedrigen Ziffern, welche nach zwei- und viertägiger Fleischfütterung erhalten wurden; denn die Hühner ertragen Fleischfütterung sehr gut. Ich habe um dies zu constatiren, ein Huhn drei Monate lang ausschliesslich mit Fleisch (Pferdefleisch, wie auch in den übrigen Versuchen) gefüttert. Es war vollkommen gesund und als es geschlachtet wurde, erwies es sich als eines der fettesten Hühner, die ich je gesehen habe. Man müsste also die letzte Hypothese, damit sie auf alle Versuchsresultate

anwendbar sei, noch dahin erweitern, dass der Genuss von Kohlenhydraten im Allgemeinen eine Production von Leberglykogen hervorrufe, bei denen aber die Kohlenhydrate selbst nicht das Material für eben dieses Leberglykogen hergeben. Ich glaube nicht, dass diese Hypothese bis jetzt mit irgend welchen positiven Gründen gestützt werden kann.

Das Zottenparenchym und die ersten Chyluswege.

Von Dr. S. Basch,
Secundararzt im k. k. allgemeinen Krankenhause.

(Aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität.)

Es ist bekannt, dass der Chylus bei der Resorption zunächst in die Epithelialzellen eintritt, aus diesen in das Zottenparenchym und vom Zottenparenchym in den innern Zottenraum gelangt.

Die Wege, welche er im Zottenparenchym geht, sind aber bis jetzt nicht zur zusammenhängenden und allgemein anerkannten Anschauung gebracht worden.

Ich übergehe die letzten Angaben von His, Frey und von Recklinghausen, indem ich sie als allgemein bekannt voraussetze, und lege blos die Resultate vor, zu denen ich durch eine passende Präparationsmethode und eine glückliche Injection gelangt bin. Diese Resultate sind gewonnen durch Untersuchungen an den Dünndarmzotten der Katze und des Hundes und auf diese Thiere beziehen sich also meine Angaben.

Kocht man ein frisches Darmstück in sehr stark verdünnter Essigsäure, der man etwas Kreosot hinzugesetzt hat, und macht man hierauf von dem getrockneten Objecte Schnitte, die man mit Carmin infiltrirt und noch nachträglich mit Essigsäure behandelt, so erhält man Bilder, die durch genauere Wiedergabe des histologischen Details weitaus diejenigen übertreffen, die man nach der bis jetzt üblichen Methode des Kochens von Darmstücken in blossem Essig erhalten hatte.

Schon an solchen Schnitten überzeugt man sich deutlich davon, dass die Zotten ihrer grösseren Masse nach aus runden, zelligen Elementen bestehen, die in einer zarten, anscheinend structurlosen Zwischensubstanz eingebettet sind.

Über die Zwischensubstanz selbst, so wie über die Musculatur der Zotten erhält man aber keine klaren Aufschlüsse, leicht

begreiflich wegen der durch die Essigsäure und durch das Kochen bewirkten Quellung. Diese Quellung kann man einigermassen verhüten, wenn man das Darmstück vor dem Kochen durch 48 Stunden in verdünnter Chromsäure oder einer verdünnten Lösung von doppelchromsaurem Kali liegen lässt. Aber auch nach diesem Verfahren lassen sich nur die Muskeln der Zotten, allerdings viel besser als nach den gewöhnlichen Methoden an Längs- und Querschnitten darstellen.

Die Bilder, denen ich meine Aufklärung über den Bau des Zottenparenchyms verdanke, verschaffte ich mir durch folgendes Verfahren. Ich legte ganz frische, eben getödteten Thieren entnommene Stücke eines Darmrohres, ohne dieselben vorher aufzuschneiden in eine sehr verdünnte Chromsäurelösung. Nach ungefähr 24 Stunden schnitt ich sie mit der Scheere auf, reinigte durch Abspülen mittelst verdünnter Chromsäurelösung die Darmschleimhaut und liess nun die Darmstücke durch ungefähr 14 Tage wieder in verdünnter Chromsäure liegen.

Übrigens kann man, wenn man nur erst anfangs sehr stark verdünnte Chromsäurelösung nimmt, auch frisch aufgeschnittene Darmstücke verwenden.

Um ein solches Darmstück schnittfähig zu machen, liess ich kleinere Abschnitte desselben auf Korkplättchen in einem Tropfen einer concentrirten Gummilösung, die mit etwas Glycerin versetzt war, eintrocknen.

Die gemachten Schnitte liess ich mit Carmin imbibiren und behandelte sie nachträglich mit Holzessig oder ich legte sie, nachdem sie mit Wasser sorgfältig ausgewaschen waren, wieder in eine sehr verdünnte Lösung von Chromsäure. In beiden Fällen bediente ich mich des Glycerins zum Durchsichtigmachen und Einschliessen der Präparate.

Ich halte es für nothwendig hervorzuheben, dass nur lebende Darmstücke in verdünnter Chromsäure eingelegt gute Bilder vom Zottenparenchym liefern, denn ich habe mich zu wiederholten Malen überzeugt, dass ältere Darmstücke, und wenn sie auch nur einen Tag nach dem Tode des Thieres verwendet wurden, keine brauchbaren Untersuchungsobjecte mehr abgaben.

Diesem Umstande muss ich es auch zuschreiben, dass ich am menschlichen Darme, den man doch bekanntlich erst im halbver-

faulten Zustande zur Untersuchung bekommt, bis jetzt zu keinem direct bestätigenden Resultate gelangen konnte.

Als Ergebniss der letzten Untersuchungen steht fest, dass die Substanz der Zotte nicht aus einem structurlosen, hyalinen Bindegewebe bestehe, sondern dass sich in derselben ein zartes bindegewebiges Gerüste darstellen lasse, in dessen Räumen freie Zellen eingebettet liegen.

His, dem sich in neuester Zeit auch Frey anschliesst, stellt dieses Gerüste dem Reticulum in den grossen Lymphbahnen des Parenchyms der Lymphdrüsen an die Seite. Dabei nimmt er aber doch den durch von Recklinghausen vertretenen allgemeinen Standpunkt — des Systems der Saftcanälchen — ein, indem er sich dahin ausspricht, dass man sich die Darmschleimhaut als ein Doppelgerüst vorstellen müsse, in welchem das feste Substanzgerüst vertreten erscheint durch das Bindegewebe mit seinen Accessorien, das andere durch das System der Lymphräume.

Die Figur 1 gibt das Bild eines Längendurchschnittes aus dem centralen Theile einer Zotte aus dem Dünndarm einer Katze. Ich habe dasselbe bei 600facher Vergrösserung gezeichnet.

Diese Vergrösserung gebe ich nicht wie dies jetzt noch so häufig geschieht, nach dem vom Optiker beigegebenen Maasse an, sondern ich gewann dieselbe ganz genau durch directe Division der Grösse der Zeichnung durch die des Originals. Man erkennt leicht den centralen Zottenraum zu beiden Seiten von Muskelfaserzügen begrenzt und oberhalb desselben den Flächenschnitt eines Theiles des Zottenparenchyms.

An solchen Bildern gewinnt man in entschiedenster Weise die Überzeugung, dass man in der Substanz der Zotte ein aus breiten Balken gewebtes Fachwerk vor sich habe.

Die Räume dieses seiner Natur nach bindegewebigen Fachwerkes communiciren, wenn man von den Zellen, die dieselben ausfüllen und also auch theilweise gegeneinander abschliessen, absieht, direct mit einander, und dieses Verhältniss tritt namentlich an Schnitten, wo mindestens zwei Lagen solcher Räume getroffen wurden, in klarer Weise hervor.

Dort wo mehrere Räume zusammenstossen, also gleichsam an den Knotenpunkten derselben, sind die Bindegewebsbalken breiter und dicker. An diesen Stellen findet man auch nahezu regelmässig

Kerne mit Protoplasmazonen umgeben in die Bindegewebsbalken eingelagert.

Diese letzteren Gebilde möchte ich zum Unterschiede von den in den Räumen liegenden freien Zellen als Bindegewebskörperchen hinstellen.

An solchen Schnitten kann man auch durch Auspinseln die freien Zellen aus den Räumen, in denen sie fest eingebettet liegen, entfernen. Es gelingt dies aber sehr schwer und vollständig nur an freien Rissenden, desshalb nämlich, weil man eben nicht wie bei den Lymphbahnen im Parenchym der Lymphdrüsen ein Reticulum mit locker eingelagerten Zellen vor sich hat.

Das Isoliren des Zottengerüstes durch Auspinseln von feinen Schnitten ist übrigens von Vortheil, um die Kerne in den Balken mit Sicherheit darzustellen.

Die Breite der Bindegewebsbalken beträgt im Mittel 0·002 bis 0·003 Millim., die des Durchmessers der Räume ungefähr 0·004 bis 0·006 Millim. Die Maasse sind übrigens sehr verschieden, je nach der Richtung, in welcher der Schnitt geführt wurde.

Ganz gleiche Bilder bieten auch Querschnitte von Zotten.

So wie das Zottenparenchym der Katze verhält sich auch das des Hundes. Die Bilder, die man hier an guten Schnitten erhält, sind überraschend durch ihre Regelmässigkeit und Zierlichkeit.

Man hat auch hier ein bindegewebiges Fachwerk und freie in die Räume derselben eingelagerte Zellen. Die Balken des Fachwerkes sind aber hier schmäler und die Räume sind sämmtlich queroval, mit ihrem grössten Durchmesser senkrecht auf den Längsdurchmesser der Zotte gerichtet.

Sicher und leicht gewinnt man sehr instructive Bilder vom Parenchym an den grossen Zotten des Duodenums und ich muss Jedem, der sich von der Richtigkeit meiner Angaben überzeugen will, gerade dieses Object zur ersten Untersuchung anempfehlen.

Figur 2 stellt einen solchen Längendurchschnitt einer Zotte vom Dünndarme eines Hundes bei etwa 380facher Vergrösserung vor.

Der centrale Zottenraum ist durch Injection gefüllt und auch das Zottenparenchym ist theilweise von injicirten Gängen, deren Natur ich im Verlaufe ausführlicher behandeln werde, durchzogen. Die nicht injicirten Stellen geben ein getreues Bild von dem bindegewebigen Fachwerk des Zottenparenchyms.

Von den freien Zellen sind blos die Kerne gezeichnet. An Präparaten die etwas längere Zeit in verdünnter Chromsäure gelegen sind, findet man nämlich das Protoplasma dieser Zellen häufig zerstört. Ich kann aber mit Sicherheit aussprechen, dass auch in solchen Fällen das blosse Vorhandensein von Kernen die Existenz von vollkommenen Zellen nicht ausschliesst.

Bevor ich vom centralen Zottenraume, über welchen ich wie über das Zottenparenchym klare und sichere Aufschlüsse erlangt habe, spreche, will ich die bis jetzt nur in ihren Grundzügen erkannte Anordnung der Muskeln in den Zotten genauer auseinandersetzen.

An Längs- und Querschnitten überzeugt man sich nämlich sehr deutlich davon, dass in den Zotten parallel mit der Längenaxe derselben getrennte Faserbündel verlaufen. Diese sind mit Bezug auf den centralen Zottenraum in concentrischen Kreisen angeordnet; und zwar begrenzen die innersten Züge dieser Bündel die zugleich hier die stärksten sind, unmittelbar den centralen Zottenraum, während die äusseren, zugleich schwächere Muskelbündel enthaltenden, mitten durch das Zottenparenchym hindurch verlaufen und nahe der Spitze der Zotte frei endigen.

Netzförmige Verbindungen dieser Muskeln, die His vermittelst der Silberimprägnationsmethode gesehen haben will, muss ich entschieden in Abrede stellen; da diese, wenn sie vorhanden wären bei den Bildern, die ich zur Anschauung bekam und die nicht blosse Streifungen, sondern wirkliche Faserzellen zeigten, unmöglich mir entgangen sein könnten.

Macht man nach der von mir gleich anfangs angegebenen Methode an getrockneten Darmstücken in der Ebene der Schleimhautfläche Schnitte, welche die obersten Enden der Lieberkühn'schen Krypten treffen, so bekömmt man ein Bild gleich dem, wie ich es in Figur 3 gezeichnet habe.

Man sieht hieraus, wie ein Kreis von querdurchschnittenen Muskelbündeln den centralen Zottenraum direct begrenzt, und wie vom diesem aus radienförmig Muskelbündel in die Räume zwischen den Lieberkühn'schen Krypten ausstrahlen. Auf diese Weise bekommt man zugleich eine klare Ansicht davon, wie die Muskeln der Zotte sich aus denen der Schleimhaut zusammensetzen.

An Zotten mit zwei Centralcanälen umschliesst jeden derselben ebenfalls ein Kreis von Muskelbündeln, die äusseren im übrigen Zottenparenchym aufsteigenden Muskelbündel dagegen sind, wie man dies sehr gut an Querschnitten sieht, im Wesentlichen in berührende Kreise gestellt, zu denen man sich die Querschnitte der Zottencanäle als Centra vorstellen muss.

In Bezug auf das Zottenparenchym erscheinen die Muskelbündel wie durchgesteckt.

Die Zahl derselben ist variabel zugleich mit der Dicke der Zotten. Bei Katzen, wo man blos einen centralen Zottenraum findet, zählte ich 12—16, bei Hunden, wo ich sehr häufig zwei Zottencanäle beobachtete und wo die Zotten zugleich auch breiter und länger sind, 18—30 Bündel. Die einzelnen Muskelbündel enthielten im Querschnitte 4 — 12 Faserzellen. Die Dicke der einzelnen Muskelbündel ist bei den Zotten des Hundes und der Katze ziemlich gleich und der Durchmesser im Querschnitte beträgt im Mittel 0·01 Millim.

Bezüglich der früheren Beobachter kann ich nur hervorheben, dass Dönitz jedenfalls am genauesten die Musculatur der Darmschleimhaut erkannt und beschrieben hat.

Was nun den Centralcanal der Zotten betrifft, so erscheint dieser in der That als eine grosse regelmässige Lücke im Zottenparenchym. Seine Begrenzung bildet durchaus nicht eine selbstständige Membran, sondern blos das umgebende Zottenparenchym.

Die Figur 1 ist nach einem Präparate gezeichnet, wo der centrale Zottenraum nahezu seiner ganzen Länge nach durch den Schnitt getroffen wurde. Man sieht in das Lumen desselben Zacken hineinragen, die nichts Anderes sind als Stücke von durchschnittenen Balken des Zottenparenchyms. An demselben Bilde sieht man zu gleicher Zeit, dass die Höhlung des centralen Zottenraums von einer einfachen Lage von Zellen ausgekleidet ist. Man kann aber keinen histologischen Unterschied machen zwischen diesen Zellen und den im übrigen Zottenparenchym befindlichen, und nur insofern die ersteren eine Höhlung direct begrenzen, kann man sie auch beziehungsweise als Epithelzellen auffassen. Man bekommt häufig Durchschnitte zur Anschauung, wo über einen Theil der Lichtung des Zottencanals die Wandung desselben als Brücke hinwegzieht.

An solchen Bildern überzeugt man sich, dass diese nur Theile des Zottenparenchyms sind und namentlich die freien Ränder solcher Brücken geben sehr gute Aufschlüsse über die Natur des Epithels des Zottencanals.

Ein Vergleich mit den von Recklinghausen'schen Angaben und den betreffenden Zeichnungen von His muss ergeben, dass jene Figuren, die durch die Silberimprägnationsmethode zu Tage treten, nichts mit dem von mir dargestellten Epithel des Zottencanals gemein haben.

Was die Gestalt des Zottencanals betrifft, so ist wie Querschnitte dies zeigen, sein oberes Ende deutlich cylindrisch. Gegen die Krypten und am häufigsten zwischen denselben sieht man ihn an Querschnitten als ziemlich breite oblonge Spalte, die stellenweise sich zwischen den Muskelbündeln eine kurze Strecke weit in's Zottenparenchym fortsetzt.

Bei Hunden verlaufen grösstentheils in einer Zotte zwei Centralcanäle, und ich habe mich auch einmal mit Sicherheit davon überzeugt, dass dieselben nahe der Spitze der Zotte direct in einander übergingen.

Die Durchmesser der Querschnitte derselben in dem Zustande, wie sie mir vorlagen, betrugen sowohl bei Hunden als bei Katzen im Mittel 0·04 Millim.

Es ist mir, wie ich schon eingangs angedeutet habe, auch gelungen, durch Einstich in die *Serosa* an dem Dünndarme eines Hundes feine Gänge im Zottenparenchym vom centralen Zottenraume aus zu injiciren.

Diese mit dem Zottencanal in directer Verbindung stehenden Gänge sind es, die von nun an als die eigentlichen ersten Chyluswege angesehen werden müssen.

Ich muss hier bemerken, dass ich den mit löslichem Berlinerblau injicirten Darm nicht wie man dies bis jetzt that, in Alkohol, sondern in eine verdünnte Lösung von Chromsäure, die zugleich mit etwas Kochsalz versetzt war, eingelegt habe. Die Alkoholbehandlung ist überhaupt für eine genauere Untersuchung der Zotten ganz und gar untauglich, da im Alkohol die Zotten zu stark schrumpfen und das Parenchym nie zur deutlichen Anschauung gelangt. Schnitte von injicirten Zotten verschaffte ich mir in der angegebenen Weise.

Zur Injection bediente ich mich des Ludwig'schen Apparates, bei dem aber nicht wie gewöhnlich Quecksilberdruck, sondern durch Compression einer gefüllten Blase erzeugter Luftdruck zur Anwendung kam.

Diese Gänge sind genau von derselben Beschaffenheit wie jene, welche Kowalewsky in den Balken (Drüsenschläuche His) der Lymphdrüsen nachgewiesen hat.

Sie liegen auch hier zwischen den Zellen des Zottenparenchyms wie die Lücken eines Kugelhaufens zwischen den Kugeln, sie berühren sie aber nicht, sondern sind von ihnen durch eine dünne Wand getrennt.

Diese Gänge münden, wie schon erwähnt, unmittelbar in den centralen Zottenraum, und man bekommt sehr häufig an Schnitten eine directe Anschauung davon, wie zwischen den Zellen des Zottencanalepithels feine injicirte Gänge aus dem centralen Zottenraume austreten und unmittelbar in die feinen intercellularen Gänge im Zottenparenchym übergehen.

Die Breite derselben beträgt im Mittel 0·0014 Millim.

Figur 4 gibt ein genaues und anschauliches Bild von diesen Gängen und zeigt zugleich in klarer Weise ihr Verhältniss zu den Zellen des Zottenparenchyms.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. I. Durchschnitt durch den centralen Theil einer Zotte (Katze).
a Centraler Zottenraum.
b Längsschnitt eines Stückes vom Zottenparenchym.
c Muskelbündel zu beiden Seiten der Zotte.
Die einzelnen Faserzellen sind hie und da schräg getroffen und erscheinen daher zum Theile kürzer.

„ II. Längsschnitte einer Zotte (Hund). Das mittlere Stück derselben vollständig, Spitze und Basis fehlen theilweise.
a Injicirter Zottencanal.
b Zottenparenchym.
c Muskelbündel.
d Injicirte Stellen des Zottenparenchyms.

„ III. Flächenschnitt in der Ebene der Darmschleimhaut (Hund).
a Durchschnitt von Krypten.
b Durchschnitt von Muskelbündeln.
c Durchschnitt eines centralen Zottenraumes.

„ IV. Intercellulare Gänge aus dem Zottenparenchym.

S. Basch. Über das Zottenparenchym und die ersten Chyluswege.



gez. v. Dr. S. Basch, lith. v. Dr. C. Heitzmann.

Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdr.

Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. LI. Bd. I. Abth. 1865.



Über die Eigenschaften derjenigen Gattung von Functionen, welche in der Entwicklung von

$$(1-2qx+q^2)^{-\frac{m}{2}}$$

nach aufsteigenden Potenzen von q *auftreten, und über die Entwicklung des Ausdruckes*

$$\{1-2q[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')] + q^2\}^{-\frac{m}{2}}.$$

Von Dr. Moriz Allé,

Adjuncten der k. k. Sternwarte zu Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. April 1865.)

Die bemerkenswerthen Eigenschaften der Kugelfunctionen machten dieselben bis in die neueste Zeit zu einem dankbaren Gegenstande mathematischer Untersuchung, und es ist bekannt, dass man unter Kugelfunctionen einer Veränderlichen die Coëfficienten in der nach aufsteigenden Potenzen von q geordneten Reihe versteht, welche aus der Entwicklung von $(1-2qx+q^2)^{-\frac{1}{2}}$ gewonnen wird. Eine zweite allgemeinere Definition wird durch eine lineare Differentialgleichung gegeben, und es war namentlich Jacobi, welcher zeigte, dass es eine ganze ausgedehnte Classe von Functionen gebe, die sich gewisser Grundeigenschaften erfreuen, deren gemeinsame Quelle eine Differentialgleichung, nämlich die bekannte Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe ist, so dass der eigentliche Ursprung der mannigfaltigen Eigenschaften der Kugelfunctionen in eben dieser Gleichung liegt, von der die Differentialgleichung der Kugelfunctionen als ein besonderer Fall erscheint.

Aus der grossen Anzahl der durch die hypergeometrische Reihe darstellbaren Functionen lässt sich eine kleinere genau abgegrenzte Gruppe von Functionen herausheben, welche der Gleichartigkeit ihrer Entstehungsweise zufolge, untereinander und mit den Kugelfunctionen in den innigsten Beziehungen stehen, wesshalb ihre Untersuchung von nicht geringem Interesse ist. Ich meine damit diejenigen Functionen, welche als Entwicklungscoëfficienten einer



beliebigen Potenz des reciproken Werthes der Entfernung zweier Punkte im Raume auftreten, wenn dieser Werth durch die beiden Punkten zukommenden Fahrstrahlen rr' und durch x, d. h. den Cosinus des zwischen beiden letzteren eingeschlossenen Winkels ausgedrückt, in eine nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{r'}{r}$ geordnete Reihe entwickelt wird. In Jacobi's Arbeit über die hypergeometrische Reihe treten die eben erwähnten Functionen als besondere Fälle solcher durch hypergeometrische Reihen darstellbarer Functionen auf, für welche eines der beiden ersten Elemente $\alpha\beta$ eine ganze negative Zahl ist, d. h. sie gehören in die Classe der endlichen hypergeometrischen Reihen. Da jedoch die Arbeit Jacobi's einen anderen Zweck verfolgt, so wird darin auf die Beziehungen dieser Functionen untereinander nicht näher eingegangen und es ist mir auch nicht bekannt, dass irgend an einem anderen Orte ein Versuch in diesem Sinne gemacht worden wäre.

Indem ich nun in den folgenden Blättern dies zu thun mir erlaube, werde ich jede ausserhalb meines Zweckes liegende Allgemeinheit vermeiden, wodurch die Resultate in ihrer einfachsten Form erscheinen, und die folgenden Entwicklungen in zwei Theile trennen.

Im ersten Theile entwickle ich die Differentialgleichung der in Rede stehenden Functionen blos einer Veränderlichen x, die ich der Kürze wegen nach ihrer Bezeichnung immer X-Functionen nennen werde, und ziehe daraus vorzüglich diejenigen Haupteigenschaften derselben, welche am geeignetsten erscheinen, um ihre gegenseitigen Beziehungen zu erläutern, und zu gleicher Zeit die Vorbereitung für die Entwicklungen der zweiten Abtheilung bilden, wobei auch einige andere Eigenschaften, wiewohl sie hier keine Anwendung finden werden, doch nicht leicht übergangen werden konnten, weil sie sich hier auf die einfachste Art ableiten liessen.

Am Schlusse der ersten Abtheilung führe ich, ähnlich wie es bereits bei den Kugelfunctionen geschehen ist, eine den X-Functionen zugeordnete Function ein, um den Gang der Untersuchung in der zweiten Abtheilung nicht mit Nebenbetrachtungen zu unterbrechen. Dort wird die Einführung einer neuen Function gerechtfertiget; denn wie man sehen wird, gibt die in der zweiten Abtheilung ausgeführte Entwicklung der X-Functionen zweier veränder-

Laplace'schen Entwicklung der Kugelfunctionen zweier Veränderlichen ist, selbst den Fingerzeig zu dieser Einführung.

I.

1.

Es ist bekannt, dass die Kugelfunctionen einer Veränderlichen x aus der Entwicklung des Ausdruckes

$$u = (1-2qx+q^2)^{-\frac{1}{2}}$$

entstehen, wenn man denselben in eine nach aufsteigenden Potenzen von q fortschreitende Reihe verwandelt. Setzt man auf ähnliche Weise

$$U = u^m = (1-2qx+q^2)^{-\frac{m}{2}}$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so kann man der Entwicklung dieses Ausdruckes die folgende Form geben:

$$U = X_0^m(x) + qX_1^m(x) + q^2X_2^m(x) + \ldots + q^n X_n^m(x) + \ldots \quad (1)$$

wo also der Zeiger oben die Potenz angibt, aus deren Entwicklung die X-Functionen entstanden sind, während der untere Zeiger ihre Stellung in der Reihe angibt. Der Einfachheit wegen werde ich im Folgenden überall, wo keine Zweideutigkeit entstehen kann, die Argumente weglassen.

Die wirklich ausgeführte Entwicklung (1) ertheilt dem allgemeinen Coëfficienten folgende Form:

$$X_n^m = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(n)}$$

$$\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(m+2n-2)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(m+2n-2)(m+2n-4)}x^{n-4} - \ldots\right\} \quad (2)$$

welcher Ausdruck für $m = 1$ selbstverständlich in den Ausdruck der Kugelfunctionen übergeht.

Ausser dieser Definition, durch welche die X-Functionen als Entwicklungscoëfficienten einer Wurzelgrösse dargestellt werden,



folgt noch eine zweite allgemeinere aus den Beziehungen zwischen den partiellen Ableitungen der Function U.

Es wird nämlich

$$\frac{dU}{dx} = mq \cdot u^{m+2} \qquad \frac{dU}{dq} = m(x-q)\,u^{m+2}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = m(m+2)\,q^2 \cdot u^{m+4} \quad \frac{d^2U}{dq^2} = m(m+2)\,(x-q)^2 u^{m+4} - m u^{m+2}$$

und durch Verbindung dieser Ausdrücke

$$(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2} + q^2\,\frac{d^2U}{dq^2} = m(m+1)\,q^2 \cdot u^{m+2}$$

$$(m+1)\,x\frac{dU}{dx} - (m+1)\,q\frac{dU}{dq} = m(m+1)\,q^2 \cdot u^{m+2}$$

so dass U der partiellen Differentialgleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2} - (m+1)\,x \cdot \frac{dU}{dx} + q^2\frac{d^2U}{dq^2} + (m+1)\,q\frac{dU}{dq} = 0$$

genügt. Nimmt man jetzt noch Rücksicht auf die Form der Gleichung (1), so folgt daraus die zweite Definition der X-Functionen in Gestalt einer linearen Differentialgleichung, nämlich der folgenden

$$(3) \qquad (1-x^2)\frac{d^2X_n^m}{dx^2} - (m+1)\,x \cdot \frac{dX_n^m}{dx} + n(n+m)\,X_n^m = 0,$$

die wie es sein muss, für $m=1$ in die bekannte Differentialgleichung der Kugelfunctionen übergeht.

2.

Zunächst werde ich mich mit der Integration dieser Gleichung beschäftigen, die ich einfacher so schreibe

$$(4) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - (m+1)\,x \cdot \frac{dy}{dx} + n(n+m)\,y = 0.$$

Um sie zu integriren, mache ich von einem von Liouville herrührenden Verfahren Gebrauch, welches darin besteht, dass eine neue Veränderliche z durch die Gleichung

$$y = \frac{d^{-\lambda} z}{dx^{-\lambda}} \tag{5}$$

eingeführt wird. Eine λmalige Differentiation mit Hilfe der allgemeinen Formel

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}[PQ] = Q\frac{d^\lambda P}{dx^\lambda} + \binom{\lambda}{1}\frac{dQ}{dx}\frac{d^{\lambda-1}P}{dx^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{d^\lambda Q}{dx^\lambda}P$$

verwandelt dann die Gleichung (4) sogleich in

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - (m+1+2\lambda)\,x\,.\frac{dz}{dx} - [\lambda(\lambda+m) - n(n+m)]\,z = 0.$$

Das letzte Glied verschwindet für 2 Werthe von λ, nämlich für

$$\lambda_1 = -(n+m) \quad \text{und} \quad \lambda_2 = n.$$

Nimmt man daher in (5) für den Differentiationsindex nach einander diese beiden Werthe, so wird das zugehörige z durch die Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - (m+1+2\lambda)\,x\,.\frac{dz}{dx} = 0$$

bestimmt, wo für λ den beiden Fällen entsprechend entweder λ_1 oder λ_2 zu setzen ist. Die letzte Gleichung gibt aber

$$\frac{dz}{dx} = k\,.(x^2-1)^{-\frac{m+1+2\lambda}{2}},$$

somit den beiden Werthen von λ entsprechend zwei particuläre Integrale von (4) nämlich

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{d^{n+m-1}}{dx^{n+m-1}}\left\{(x^2-1)^{\frac{2n+m-1}{2}}\right\} \\ y_2 &= \frac{d^{-n-1}}{dx^{-n-1}}\left\{(x^2-1)^{\frac{2n+m+1}{2}}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Es ist gut zu bemerken, dass diese beiden particulären Integrale sich wesentlich von einander unterscheiden, wovon man sich überzeugt, indem man die in (6) angezeigten Operationen ausführend, beide in Reihenform darstellt. Man erhält so die beiden Reihen

$$x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n+m-2)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n+m-2)(2n+m-4)}x^{n-4} - \ldots,$$

$$\frac{1}{x^{m+n}}\left\{1 + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2(2n+m+2)}\frac{1}{x^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(m+n)(m+n+1)(m+n+2)(m+n+3)}{2.4.(2n+m+2)(2n+m+4)}\frac{1}{x^4} + \ldots\right\}$$

von denen die erste bei einem bestimmten Gliede abbricht, während die zweite sich in's Unendliche fortsetzt. Die erste bleibt für alle endlichen Werthe von x selbst endlich, und wird nur für unendliche Werthe von x unendlich. Die zweite convergirt überhaupt nur für Werthe von $x > 1$, wird für $x = 0$ unendlich und verschwindet für unendliche Werthe von x. Bildet man nun das vollständige Integral von (4), so ist

$$(7)\qquad y = k_1 \cdot \frac{d^{n+m-1}}{dx^{n+m-1}}\left\{(x^2-1)^{\frac{2n+m-1}{2}}\right\} + k_2 \cdot \frac{d^{-n-1}}{dx^{-n-1}}\left\{(x^2-1)^{-\frac{2n+m+1}{2}}\right\}$$

die Lösung der Differentialgleichung, welche die X_n^m definirt. Daraus und aus den früheren Bemerkungen folgt, dass, wenn X_n^m als Lösung der Differentialgleichung (3) dargestellt werden soll, dies vollständig geschehen müsse durch die Gleichung

$$X_n^m = k_1 \cdot \frac{d^{n+m-1}}{dx^{n+m-1}}\left\{(x^2-1)^{n+\frac{m-1}{2}}\right\}$$

wenn nur die Constante k_1 gehörig bestimmt wird. Dies geschieht aber sehr leicht durch Vergleichung der höchsten Potenzen des entwickelten Ausdruckes rechts und des bereits bekannten Ausdruckes (2) der X-Functionen. Man findet auf diese Art

$$k_1 = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(m+2n-1)}$$

also schliesslich

$$X_n^m(x) = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(m+2n-1)} \frac{d^{n+m-1}}{dx^{n+m-1}} \left\{(x^2-1)^{n+\frac{m-1}{2}}\right\}. \quad (8$$

Für das zweite particuläre Integral von (3) werde ich im Folgenden die Bezeichnung $Y_n^m(x)$ wählen und die Constante k_2, welche keiner Beschränkung unterliegt, so annehmen, dass die Beziehungen dieser letzten Functionen zu den entsprechenden X-Functionen in ihrer einfachsten Form erscheinen. Um dies zu erreichen setze ich

$$Y_n^m(x) = \frac{(-1)^{n+1}\Pi(m+2n-1)}{m(m+2)\ldots(m+2n-2)} \cdot \frac{d^{-n-1}}{dx^{-n-1}} \left\{(x^2-1)^{-\frac{2n+m+1}{2}}\right\} \quad (9$$

oder was dasselbe ist

$$(2n+m)\,Y_n^m(x) = \frac{\Pi(m+n-1)}{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}$$

$$\left\{\frac{1}{x^{n+m}} + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2(2n+m+2)} \cdot x\,\frac{1}{n+m+2} + \ldots\right\}.$$

3.

Macht man in den Ausdrücken (8) und (9) $m=1$, so gehen diese beiden Functionen in die gewöhnlichen Kugelfunctionen der ersten und zweiten Art über; es wird nämlich

$$\left.\begin{aligned} X_n^1(x) &= \frac{1.3\ldots(2n-1)}{\Pi(2n)} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{1}{2^n\Pi(n)} \cdot \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \\ Y_n^1(x) &= \frac{(-1)^{n+1}\Pi(2n)}{1.3\ldots(2n-1)} \frac{d^{-n-1}(x^2-1)^{-n-1}}{dx^{-n-1}} \\ &= (-1)^{n+1}2^n\Pi(n)\frac{d^{-n-1}(x^2-1)^{-n-1}}{dx^{-n-1}}, \end{aligned}\right\} \quad (10$$

wo also X_n^1 und Y_n^1 die Stelle der sonst üblichen $P^{(n)}$ und $Q^{(n)}$ vertreten.

Macht man aber

$$\frac{m-1}{2} = \nu \quad n+\nu = \mu$$

und führt μ und ν statt m und n in den Ausdrücken (8) und (9) rechter Hand mit Benützung von (10) ein, so erhält man

$$(11)\quad \begin{cases} X_n^m = \dfrac{2^\nu \Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)} \cdot \dfrac{d^\nu X_\mu^1}{dx^\nu} \\[2ex] Y_n^m = \dfrac{\Pi(2\nu)}{(-1)^\nu 2^\nu \Pi(\nu)} \cdot \dfrac{d^\nu Y_\mu^1}{dx^\nu}. \end{cases}$$

Ist m eine ungerade Zahl, d. h. beschäftigt man sich blos mit denjenigen Formen unserer Wurzelgrösse, welche in der Mechanik des Himmels eine Rolle spielen, so sind die Entwicklungscoëfficienten derselben einfache Differentialquotienten der Entwicklungscoëfficienten von $(1-2qx+q^2)^{-\frac{1}{2}}$, deren Stellenzeiger gegen die der ersteren blos um eine constante Grösse verschoben sind, wenn man von dem allen gemeinschaftlichen constanten Factor absieht. Ist aber m eine gerade Zahl, so sind ν und μ gebrochene Zahlen und man muss zur Differentialgleichung der Kugelfunctionen zurückgehen. Allein diese ist nicht auf ganze Zeiger beschränkt und gibt immer denselben analytischen Ausdruck für X_μ^1 und Y_μ^1. Nimmt man also den Ausdruck der Kugelfunctionen in seiner allgemeinsten Bedeutung für ganze und gebrochene Stellenzeiger, so kann man ohne Rücksicht auf die Beschaffenheit des m immer die X-Functionen als Differentialquotienten von Kugelfunctionen darstellen.

4.

Aus (11) folgt nun zunächst für beliebige r und s

$$(12)\quad \begin{aligned} \frac{d^r X_s^1}{dx^r} &= \frac{\Pi(2r)}{2^r \Pi(2r)} X_{s-r}^{1+2r} \\ \frac{d^r Y_s^1}{dx^r} &= \frac{(-1)^r 2^r \Pi(r)}{\Pi(2r)} Y_{s-r}^{1+2r} \end{aligned}$$

und durch $p$malige Differentiation von (11)

$$\frac{d^p X_n^m}{dx^p} = \frac{2^\nu \Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)} \cdot \frac{d^{p+\nu} X_\mu^1}{dx^{p+\nu}}$$

$$\frac{d^p Y_n^m}{dx^p} = \frac{\Pi(2\nu)}{(-1)^\nu 2^\nu \Pi(\nu)} \cdot \frac{d^{p+\nu} Y_p^1}{dx^{p+\nu}}.$$

Schafft man in diesen beiden Gleichungen die Differentialquotienten mit Hilfe der Gleichungen (12) fort und führt wieder die m und n ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d^p X_n^m}{dx^p} &= m(m+2)\ldots(m+2p-2)\, X_{n-p}^{m+2p} \\ \frac{d^p Y_n^m}{dx^p} &= \frac{(-1)^p}{m(m+2)\ldots(m+2p-2)}\, Y_{n-p}^{m+2p} \end{aligned} \tag{13}$$

Die Formeln (13) gestatten also auf eine höchst einfache Art die X-Functionen beliebig oft nach einander zu differentiiren, und ich werde im Folgenden von ihnen beständigen Gebrauch machen.

Ist namentlich $p=1$, so wird

$$\frac{dX_n^m}{dx} = mX_{n-1}^{m+2} \tag{14}$$

woraus unmittelbar

$$\int X_n^m dx = \frac{1}{m-2} X_{n+1}^{m-2}$$

folgt. Eben so kann man noch mehrmals nach einander integriren.

5.

Um von den eben entwickelten Formeln eine Anwendung zu zeigen, erinnere ich an die merkwürdige von Heine gefundene Gleichung, welche den innigen Zusammenhang der Kugelfunctionen der ersten und der zweiten Art charakterisirt, und wie bekannt folgende Gestalt hat:

$$\frac{1}{y-x} = \sum_0^\infty (2n+1)\, X_n^1(x)\,.\, Y_n^1(y).$$

Durch $r$maliges Differentiiren nach x und $s$maliges Differentiiren nach y erhält man

$$(-1)^s \frac{\Pi(r+s)}{(y-x)^{r+s+1}} = \sum_0^\infty (2n+1) \frac{d^r X_n^1(x)}{dx^r} \cdot \frac{d^s Y_n^1(y)}{dy^s}$$

und durch Benützung der Gleichung (12)

$$\frac{\Pi(r+s)}{(y-x)^{r+s+1}} = 2^{s-r} \cdot \frac{\Pi(2r)\Pi(s)}{\Pi(r)\Pi(2s)} \sum_0^\infty (2n+1)\, X_{n-r}^{2r+1}(x)\,.\, Y_{n-s}^{2s+1}(y).$$

Es ist aber allgemein

$$X^{n}_{-\lambda} = 0,$$

daher die letzte Gleichung unter der Voraussetzung $r \geq s$ auch so geschrieben werden kann:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Pi(r+s)}{(y-x)^{r+s+1}} = \\ &= 2^{s-r} \frac{\Pi(2r)\Pi(s)}{\Pi(r)\Pi(2s)} \sum_{0}^{\infty} \rho [2(r+\rho)+1] X^{2r+1}_{\rho}(x) \cdot Y^{2s+1}_{\rho+r-s}(y) \end{aligned} \right.$$

und als eine Erweiterung des benützten Heine'schen Satzes sich erweiset, indem die Entwicklung (15) sich auf alle X^{m}_{n}-Functionen bezieht, für welche m eine ungerade Zahl ist, d. h. gerade auf denjenigen Fall unserer Wurzelgrösse, der wegen seines beständigen Vorkommens der interessantere ist.

Die Entwicklung (15) schliesst sich übrigens der Form nach der Heine'schen noch näher an, wenn man $r = s$ macht, wodurch man erhält

$$(16) \quad \frac{\Pi(2r)}{(y-x)^{2r+1}} = \sum_{0}^{\infty} \rho [2(r+\rho)+1] X^{2r+1}_{\rho}(x) \,.\, Y^{2r+1}_{\rho}(y).$$

Die Gleichung (16) kann benützt werden, um auf eine sehr einfache Weise eine Entwicklung der ungeraden Potenzen von $\frac{1}{y}$ nach den mit Y bezeichneten Functionen zu erhalten. Setzt man nämlich darin $x = 0$, so wird

$$\frac{\Pi(2r)}{y^{2r+1}} = \sum_{0}^{\infty} \rho [2(r+\rho)+1] X^{2r+1}_{\rho}(0) \,.\, Y^{2r+1}_{\rho}(y)$$

und daraus wegen

$$(17) \quad \begin{aligned} &X^{2r+1}_{2\rho+1}(0) = 0 \qquad X^{2r+1}_{2\rho}(0) = (-1)^{\rho} \binom{\frac{2r+2\rho-1}{2}}{\rho} \\ &\frac{\Pi(2r)}{y^{2r+1}} = \sum_{0}^{\infty} \rho (-1)^{\rho} [2(r+2\rho)+1] \binom{\frac{2r+2\rho-1}{2}}{\rho} Y^{2r+1}_{2\rho}(y). \end{aligned}$$



Allein man kann auch eine beliebige gerade oder ungerade Potenz von $\frac{1}{y}$ nach den Y-Functionen entwickeln, wenn man auf die allgemeinere Formel (15) zurückgeht. Setzt man nämlich dort

$$r+s=n \text{ und } r-s=m,$$

so folgt daraus

$$r=\frac{n+m}{2} \qquad s=\frac{n-m}{2}$$

und zunächst, weil die Ableitung der Gleichung (15) r und s als ganze positive Zahlen voraussetzt, dass n und m zugleich gerade oder ungerade sein müssen, und wenn man den Fall $r-s=0$, der schon in (17) enthalten ist, ausschliesst wegen $r+s=n$, $r-s<n+1$, d. h. die zulässigen Werthe für $m=r-s$ sind

für n gerade $2\ 4\ 6 \ldots\ldots n$ und
„ n ungerade $1\ 3\ 5 \ldots\ldots n$.

Führt man nun die n und m in (15) ein, während zu gleicher Zeit $x=0$ gesetzt wird, so hat man unter den eben gestellten Bedingungen

$$\frac{\Pi(n)}{y^{n+1}}=$$
$$\frac{\Pi(n+m)\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}{2^m\Pi(n-m)\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}\sum_0^\infty{}_\rho(-1)^\rho(n+m+1+4\rho)\binom{\frac{n+m+2\rho-1}{2}}{\rho}Y_{2\rho+m}^{n-m+1}(y) \quad (18)$$

und wenn man, um hieraus einen bekannten Ausdruck abzuleiten, den oberen Grenzwerth von m nämlich n einsetzt

$$\frac{\Pi(n)}{y^{n+1}}=\frac{\Pi(2n)}{2^n\Pi(n)}\sum_0^\infty{}_\rho(-1)^\rho[2(n+2\rho)+1]\binom{\frac{2n+2\rho-1}{2}}{\rho}Y_{2\rho+n}^1(y),$$

welches die bekannte Entwicklung der links stehenden Potenz von $\frac{1}{y}$ nach den Kugelfunctionen der zweiten Art $Y_\mu^1(y)$ ist. Es versteht sich, dass der besonders abgeleitete Fall (17) auch in (18) enthalten ist, wovon man sich überzeugt, indem man den für n gerade noch zulässigen Werth $m=0$ hineinsetzt. Ebenso wenig braucht erinnert zu werden, dass alle diese Entwicklungen an die Bedingung der Convergenz gebunden sind.

Der Vollständigkeit wegen möge mir an dieser Stelle noch gestattet sein, die Entwicklung einer beliebigen positiven Potenz von x nach den X_n^m genannten Functionen zu zeigen. Es geschieht dies auf die einfachste Weise, indem man von der bekannten Entwicklung von x^n nach Kugelfunctionen ausgeht. Dieser lässt sich folgende Form geben

$$x^n = \frac{\Pi(n)}{1.3\ldots(2n+1)} \sum_0^\rho [2(n-2\rho)+1] \binom{\frac{2n+1}{2}}{\rho} X^1_{n-2\rho}$$

oder $n+r$ statt n setzend

$$x^{n+r} = \frac{\Pi(n+r)}{1.3\ldots(2n+2r+1)} \sum_0^\rho [2(n-2\rho)+2r+1] \binom{\frac{2n+2r+1}{2}}{\rho} X^1_{n+r-2\rho}$$

wo überall wie bekannt, die Summen endliche sind und mit X_0^1 oder X_1^1 abbrechen, je nachdem die entwickelte Potenz gerade oder ungerade ist. Wenn man jetzt diese letzte Gleichung $r$mal hintereinander differentiirt und das so erhaltene Resultat ein wenig reducirt, so folgt daraus unmittelbar die Entwicklung der $n$ten Potenz von x nach den X_n^m-Functionen mit ungeradem m, in folgender Form

$$(19) \quad x^n = \frac{\Pi(n)}{1.3\ldots(2n+2r+1)} \frac{\Pi(2r)}{2^r\Pi(r)} \sum_0^\rho [2(n-2\rho)+2r+1] \binom{\frac{2n+2r+1}{2}}{\rho} X^{2r+1}_{n-2\rho}$$

6.

Man hat in der Theorie der Kugelfunctionen eine gewisse Gattung von Functionen eingeführt, die zu den ersteren in eben so einfachen als merkwürdigen Beziehungen stehen, und dieselben Zugeordnete der Kugelfunctionen genannt. Ihre Definition ist bekanntlich in der Gleichung

$$X_n^{1,\rho} = \frac{\Pi(n-\rho)}{\Pi(2n)} . (x^2-1)^{\frac{\rho}{2}} \frac{d^{n+\rho}(x^2-1)^n}{dx^{n+\rho}}$$

enthalten, wo in der etwas von der gewöhnlichen abweichenden Bezeichnung $X_n^{1,\rho}$ der Zeiger ρ die Zugeordnete näher charakterisirt, während der Zeiger 1 sich auf die ursprüngliche (hier Kugelfunction

ähnliche Weise zu einer beliebigen X_n^m-Function gehörige Zugeordnete bilden werde, für die dann die Bezeichnung $X_n^{m,\rho}$ gelten soll. Die letzte Gleichung lässt sich, wenn auf der rechten Seite die entsprechende Kugelfunction eingeführt wird, auch so schreiben:

$$X_n^{1,\rho} = \frac{2^n \Pi(n)\,\Pi(n-\rho)}{\Pi(2n)} (x^2-1)^{\frac{\rho}{2}} \frac{d^\rho X_n^1}{dx^\rho}$$

oder wenn von den Gleichungen (12) Gebrauch gemacht wird

$$X_n^{1,\rho} = 2^{n-\rho} \frac{\Pi(n)\,\Pi(2\rho)}{\Pi(2n)\,\Pi(\rho)} \Pi(n-\rho)\,(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}} X_{n-\rho}^{2\rho+1} \qquad (20)$$

d. h. die Gleichung (2) zu Hilfe nehmend

$$X_n^{1,\rho} = (x^2-1)^{\frac{\rho}{2}} \left\{ x^{n-\rho} - \frac{(n-\rho)(n-\rho-1)}{2(2n-1)} x^{n-\rho-2} + \ldots . \right\}.$$

Macht man in (20) $n=\mu$, $\rho=\nu$, wo μ und ν die in (3) festgesetzte Bedeutung haben, so wird

$$(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} X_n^m = \frac{1}{2^{\mu-\nu}\,\Pi(\mu-\nu)} \cdot \frac{\Pi(2\mu)\,\Pi(\nu)}{\Pi(\mu)\,\Pi(2\nu)} X_\mu^{1,\nu} \qquad (21)$$

also die in $(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}}$ multiplicirte X_n^m-Function lässt sich bis auf einen constanten Factor durch eine Zugeordnete ausdrücken. Von dieser Formel kann man in der bekannten Entwicklung

$$2^n \left(x+\cos\varphi \sqrt{x^2-1}\right)^n = 2^n X_n^1 + 2\sum_1^n{}_\rho \frac{\Pi(2n)}{\Pi(n+\rho)\,\Pi(n-\rho)} X_n^{1,\rho} . \cos\rho\varphi$$

Gebrauch machen, wodurch letztere die Form annimmt

$$\left(x+\cos\varphi \sqrt{x^2-1}\right)^n = \Pi(n) \sum_0^n{}_\rho \frac{\Pi(2\rho)}{\Pi(\rho)\,\Pi(n+\rho)} \frac{(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}}{2^{\rho-1}} X_{n-\rho}^{2\rho+1} . \cos\rho\varphi$$

wo statt des ersten Gliedes der Summe die Hälfte zu nehmen ist.

Verbindet man aber die beiden Gleichungen (20) und (21), nachdem man in (20) n und ρ in μ und ν verwandelt hat, so wird

$$X_n^m = \frac{\Pi(\nu)}{2^{\mu-\nu}\Pi(\mu)\,\Pi(2\nu)} \; \frac{d^{\mu+\nu}(x^2-1)^\mu}{dx^{\mu+\nu}}$$

und wegen der von Jacobi gegebenen Formel

$$\frac{(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}}}{\Pi(\mu+\nu)} \; \frac{d^{\mu+\nu}(x^2-1)^\mu}{dx^{\mu+\nu}} = \frac{(x^2-1)^{-\frac{\nu}{2}}}{\Pi(\mu-\nu)} \; \frac{d^{\mu-\nu}(x^2-1)^\mu}{dx^{\mu-\nu}}$$

auch

$$(x^2-1)^\nu . X_n^m = \frac{\Pi(\nu)}{2^{\mu-\nu}\Pi(\mu)\,\Pi(2\nu)} \; \frac{\Pi(\mu+\nu)}{\Pi(\mu-\nu)} \; \frac{d^{\mu-\nu}(x^2-1)^\mu}{dx^{\mu-\nu}}$$

d. h. wenn wieder statt $\mu\nu$ die mn eingeführt werden

$$(x^2-1)^{\frac{m-1}{2}} . X_n^m = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{(m+n)(m+n+1)\ldots(m+2n-1)} \; \frac{1}{\Pi(n)} \; \frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^{n+\frac{m-1}{2}}\right\},$$

welches die Form ist, unter welcher Jacobi in seiner Arbeit über die hypergeometrische Reihe die X_n^m-Functionen aufstellt.

7.

Unter den merkwürdigen Eigenschaften der X-Functionen ist wohl eine von ganz besonderer Wichtigkeit, dass nämlich, wenn irgend eine gegebene Function als Entwicklung nach X-Functionen dargestellt werden kann, jede in dieser Entwicklung vorkommende X-Function ein Isolirungsfactor ihres Coëfficienten wird. Die Differentialgleichung, welcher X_n^m genügt, erhält nämlich durch Multiplication mit $(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}$ folgende Gestalt

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}\frac{dX_n^m}{dx}\right] + n(n+m)\,(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}\,X_n^m = 0$$

während $X_{n'}^m$ der ähnlichen

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}\frac{dX_{n'}^m}{dx}\right] + n'(n'+m)\,(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}\,X_{n'}^m = 0$$

Genüge leistet. Aus den beiden folgt

$$n(n+m)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} X_n^m X_{n'}^m\, dx = -\int_{-1}^{+1} X_{n'}^m \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} \frac{dX_n^m}{dx}\right]$$

$$n'(n'+m)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} X_n^m X_{n'}^m\, dx = -\int_{-1}^{+1} X_n^m \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} \frac{dX_{n'}^m}{dx}\right]$$

und die Ausdrücke rechts theilweise integrirend

$$n(n+m)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} X_n^m X_{n'}^m dx = n'(n'+m)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} X_n^m X_{n'}^m dx$$
$$= \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} \frac{dX_n^m}{dx}\frac{dX_{n'}^m}{dx}\, dx. \tag{22}$$

Diese Gleichung kann aber so lange die Stellenzeiger n und n' verschieden sind, nur bestehen wenn

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} X_n^m X_{n'}^m\, dx = 0. \tag{23}$$

Um den Werth dieses Integrales aber für $n = n'$ zu erhalten, benütze ich die Gleichung (22), aus welcher für diesen Fall

$$n(n+m)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} (X_n^m)^2\, dx = \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{dX_n^m}{dx}\right)^2 dx$$

folgt. Erinnert man sich nun der Formel (14), so wird letzte Gleichung

$$n(n+m)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} (X_n^m)^2\, dx = m^2\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} (X_{n-1}^{m+2})^2\, dx,$$

folglich

$$(n-1)(n+m+1)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}(X_{n-1}^{m+2})^2\,dx=$$

$$(m+2)^2\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m+3}{2}}(X_{n-2}^{m+4})^2\,dx$$

u. s. w. . . . .

$$1.(2n+m-1)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2n+m-3}{2}}(X_1^{m+2n-2})^2\,dx=$$

$$(2n+m-2)^2\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2n+m-1}{2}}(X_0^{m+2n})^2\,dx$$

es ist daher, weil allgemein $X_0^z=1$

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}(X_n^m)^2\,dx=\frac{[m(m+2)\ldots(m+2n-2)]^2}{\Pi(2n+m-1)}\frac{\Pi(n+m-1)}{\Pi(n)}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2n+m-1}{2}}.dx.$$

Führt man in dem bestimmten Integrale rechts behufs seiner Werthermittlung eine neue Veränderliche ξ ein, welche mit x durch die Gleichung $1-x=2\xi$ zusammenhängt, so erhält man

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}(X_n^m)^2\,dx=\frac{[m(m+2)\ldots(m+2n-2)]^2}{\Pi(m+2n-1)}\frac{\Pi(n+m-1)}{\Pi(n)}.2^{2n+m}\int_0^1\xi^{\frac{2n+m-1}{2}}.(1-\xi)^{\frac{2n+m-1}{2}}.d\xi$$

und das Euler'sche Integral rechts durch die Gauss'sche Function ausdrückend, wenn wieder die $\mu\nu$ eingeführt werden.

$$(24)\quad\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}(X_n^m)^2dx=\left[\frac{2^\nu\,\Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)}\right]^2.\frac{\Pi(\mu+\nu)}{\Pi(\mu-\nu)}\frac{2}{2\mu+1}.$$

Mit Hilfe der beiden Sätze (23) und (24) ist es also möglich, die einzelnen Coëfficienten einer nach X-Functionen entwickelt gedachten Functionen durch Isolirung zu bestimmen, und folgt zugleich daraus, dass eine bestimmte Function nach X-Functionen einer Classe nur auf eine einzige Art entwickelbar sei.



8.

Ehe ich zur Untersuchung der X-Functionen zweier veränderlicher Winkel übergehe, werde ich, um hier alle für die Entwicklungen der zweiten Abtheilung nöthigen Formeln beisammen zu haben, eine den X_n^m-Functionen zugeordnete Function bilden, die, wie man sehen wird, im Verlaufe der folgenden Untersuchung sich so zu sagen von selbst einführt.

Indem ich an die bekannte Form der Zugeordneten der Kugelfunctionen

$$X_n^{1,\rho}=\frac{2^n\Pi(n)\Pi(n-\rho)}{\Pi(2n)}(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}\frac{d^\rho X_n'}{dx^\rho}=\frac{\Pi(n-\rho)}{1.3\ldots(2n-1)}(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}\frac{d^\rho X_n^1}{dx^\rho}$$
$$=(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}\left\{x^{n-\rho}-\frac{(n-\rho)(n-\rho-1)}{2(2n-1)}x^{n-\rho-2}+\ldots\right\}$$

erinnere, bilde ich auf ganz ähnliche Weise eine Function, die sich zu den X_n^m-Functionen ebenso verhält wie $X_n^{1,\rho}$ zu X_n^1 und bezeichne sie mit $X_n^{m,\rho}$; das heisst ich setze

$$\left.\begin{aligned}X_n^{m,\rho}&=\frac{\Pi(n-\rho)}{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}\frac{d^\rho X_n^m}{dx^\rho}\\&=(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}\left\{x^{n-\rho}-\frac{(n-\rho)(n-\rho-1)}{2(m+2n-2)}x^{n-\rho-2}+\ldots\right\}\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

welche Function in der That für $m=1$ in die Zugeordnete der Kugelfunctionen $X_n^{1,\rho}$ übergeht, und deren Differentialgleichung zu construiren nicht schwer fällt. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$\frac{m(m+2)\ldots(m+2\rho-2)}{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}\Pi(n-\rho)=h,$$

so kann die Gleichung (25) auch so geschrieben werden

$$X_n^{m,\rho}=h\cdot(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}X_{n-\rho}^{m+2\rho}$$

oder wenn

$$(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}X_{n-\rho}^{m+2\rho}=z$$

gesetzt wird.



$$X_n^{m,\rho} = hz$$

und es ist die Differentialgleichung zu bilden, welcher z Genüge leistet. Ein Bestandtheil von z ist aber

$$X_{n-\rho}^{m+2\rho} = y,$$

dessen Differentialgleichung bereits bekannt ist. Es ist nämlich keine andere als (3), wenn die dort erscheinenden m und n mit $m+2\rho$ und $n-\rho$ vertauscht werden, mit anderen Worten, es genügt y der Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - (m+2\rho+1)x \cdot \frac{dy}{dx} + (n-\rho)(n+\rho+m)y = 0$$

und weil $z = (x^2-1)^{\frac{\rho}{2}} y$, so findet man leicht die Differentialgleichung von z aus letzterer in folgender Form

$$(26)\quad (1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2} - (m+1)x \cdot \frac{dz}{dx} + \left[n(n+m) - \frac{\rho(\rho+m-1)}{1-x^2}\right] z = 0.$$

Es genügt also $X_n^{m,\rho}$ der (26), und wie man sieht, geht letztere in der That für $m = 1$ wie es sein muss, in die Differentialgleichung der Zugeordneten der Kugelfunctionen über. Ich bemerke hier, dass $X_n^{m,\rho}$ nur ein particuläres Integral von (26) ist. Das zweite particuläre Integral von (26) werde ich analog dem früheren mit $Y_n^{m,\rho}$ bezeichnen, und begnüge mich damit zu erwähnen, dass es für endliche Werthe von x, namentlich für $x \gtreqless 1$ unendlich wird, während $X_n^{m,\rho}$ für alle endlichen Werthe von x selbst endlich bleibt, eine Eigenschaft der $Y_n^{m,\rho}$, die ich später benöthigen werde, und von der man sich leicht überzeugen kann.

Eine weitere Eigenschaft der $X_n^{m,\rho}$, die sich ebenfalls in der Folge als brauchbar erweisen wird, werde ich sogleich entwickeln. Aus (25) folgt nämlich

$$(X_n^{m,\rho})^2 =$$

$$\left[\frac{\Pi(n-\rho)}{(m+2\rho)(m+2\rho+2)\dots(m+2n-2)}\right]^2 \cdot (-1)^\rho (1-x^2)^\rho (X_{n-\rho}^{m+2\rho})^2$$

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}(X_n^{m,\rho})^2\,dx =$$

$$= (-1)^\rho \left[\frac{\Pi(n-\rho)}{(m+2\rho)(m+2\rho+2)\ldots(m+2n-2)}\right]^2$$

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\rho+\frac{m-1}{2}}(X_{n-\rho}^{m+2\rho})^2\,dx.$$

Der Werth des Integrales rechts lässt sich aber vermöge (24) bestimmen. Thut man dies (24) benützend und führt schliesslich wieder die durch

$$\frac{m-1}{2} = \nu \qquad n+\nu=\mu$$

definirten Grössen ν und μ ein, welche die Endausdrücke wesentlich vereinfachen und die späteren Reductionen erleichtern, so findet man

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}(X_n^{m,\rho})^2\,dx =$$

$$= (-1)^\rho \left[\frac{2^\mu \Pi(\mu)}{\Pi(2\mu)}\right]^2 \Pi(\mu-\nu-\rho)\,\Pi(\mu+\nu+\rho)\cdot\frac{2}{2\mu+1} \tag{27}$$

Wollte man diese Formel prüfen, so brauchte man blos $m=1$ zu setzen, wodurch man den analogen Satz für die Zugeordneten der Kugelfunctionen erhält.

II.

Es ist bekannt, dass die Entwicklung der Kugelfunctionen zweier veränderlicher Winkel von Laplace herrührt, und seither, nachdem sie auf verschiedene Arten abgeleitet worden ist, vielfältige Anwendung gefunden hat. Ist

$$z = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi-\psi')$$

und setzt man

$$\cos\theta = x, \quad \cos\theta' = x', \quad \psi-\psi' = \varphi$$



wodurch

$$z = xx' - \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{x'^2-1} \cos\varphi$$

wird, so ist diese Entwicklung nach den im Vorhergehenden gebrauchten Bezeichnungen in der Gleichung

$$X_n^1(z) = \sum_0^n b^{(\rho)} \cdot X_n^{1,\rho}(x) \cdot X_n^{1,\rho}(x') \cos\rho\varphi$$

enthalten, wo wie man weiss

$$b^{(\rho)} = (-1)^\rho 2 \frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2}{\Pi(n+\rho)\Pi(n-\rho)}$$

die allgemeine Form der constanten Coëfficienten ist.

Diese schöne Eigenschaft der Kugelfunctionen ist jedoch nicht dieser Classe von Functionen allein eigenthümlich, sie ist vielmehr blos die letzte Spur einer ganz allgemeinen Eigenschaft, die sämmtlichen X_n^m-Functionen zukommt, und mit deren Entwicklung ich mich im Folgenden beschäftigen werde.

1.

Setzt man in (I. 3) $\cos\theta = x$, so erhält man die Differentialgleichung, welcher $u = X_n^m(\cos\theta)$ Genüge leistet, in folgender Gestalt

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} + m \operatorname{cotg}\theta \cdot \frac{du}{d\theta} + n(n+m)u = 0,$$

von welcher ich später Gebrauch mache, während ich mir jetzt vornehme die Differentialgleichung zu suchen, welcher die Function

$$U = X_n^m(z)$$

genügt, wenn

$$z = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi$$

gesetzt wird.

Man überzeugt sich aber leicht, dass die gesuchte Differentialgleichung folgende ist

$$(2) \quad \frac{d^2U}{d\theta^2} + m\operatorname{cotg}\theta \cdot \frac{dU}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{d^2U}{d\varphi^2} + (m-1)\frac{\cot\varphi}{\sin\theta^2}\frac{dU}{d\varphi} + n(n+m)U = 0.$$

Betrachtet man nämlich U als Function von θ und φ, insoferne dieselben in z enthalten sind, und entwickelt unter dieser Voraussetzung die linke Seite der Gleichung (2), so kommt man auf die Differentialgleichung

$$(1-z^2)\frac{d^2U}{dz^2}-(m+1)z\,.\frac{dU}{dz}+n(n+m)\,U=0,$$

welcher $U=X_n^m(z)$ Genüge leistet.

Die Gleichung (2) transformire ich nun insoferne, als ich statt $\cos\theta$ die Veränderliche x einführe, wodurch (2) übergeht in

$$(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2}-(m+1)x\,.\frac{dU}{dx}+n(n+m)\,U$$
$$+\frac{1}{1-x^2}\left\{\frac{d^2U}{d\varphi^2}+(m-1)\operatorname{cotg}\varphi\,.\frac{dU}{d\varphi}\right\}=0.$$

Zugleich bemerke ich hier, dass (2) wegen der Symmetrie von z ebenso gilt, wenn θ mit θ' vertauscht wird; es gilt daher auch die zuletzt geschriebene Gleichung, wenn x mit x' vertauscht wird. Ehe ich nun weiter gehe, will ich der letzten Gleichung eine etwas andere Form geben, wodurch an ihrer Bedeutung nichts geändert wird. Ich schreibe sie nämlich so

$$\left.\begin{aligned}&(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2}-(m+1)\,x\,.\frac{dU}{dx}+\left[n(n+m)-\frac{\rho(\rho+m-1)}{1-x^2}\right]U\\&+\frac{1}{1-x^2}\left\{\frac{d^2U}{d\varphi^2}+(m-1)\cot\varphi\,.\frac{dU}{d\varphi}+\rho(\rho+m-1)\,U\right\}=0\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

und in dieser Form werde ich sie der Integration unterwerfen.

2.

Die Methode, deren ich mich bei der Integration dieser Differentialgleichung bedienen werde, ist die bekannte und oft gebrauchte Methode, die mit Vortheil in der mathematischen Physik angewendet wird, um ähnliche partielle Differentialgleichungen zu integriren, indem man nämlich das Integral aus einer Summe von Producten zusammensetzt, wo jeder Factor Function blos einer Veränderlichen

ist, und deren jeder Bestandtheil für sich der Differentialgleichung Genüge leistet.

Ich setze also $U = X\Phi$, wo X als Function von x allein, und Φ als Function von φ allein gedacht wird. Die Einführung dieser Form von U in (3) gibt

$$(4) \quad \begin{aligned} &(1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2} - (m+1)x.\frac{dX}{dx} + \left[n(n+m) - \frac{\rho(\rho+m-1)}{1-x^2}\right]X \\ &+ \frac{1}{\Phi}\frac{X}{1-x^2}\left\{\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + (m-1)\cot\varphi\frac{d\Phi}{d\varphi} + \rho(\rho+m-1)\Phi\right\} = 0 \end{aligned}$$

und dieser Gleichung wird durch X und Φ genügt, wenn die beiden Grössen so beschaffen sind, dass

$$(5) \quad (1-x^2)\frac{d^2X}{dx^2} - (m+1)x.\frac{dX}{dx} + \left[n(n+m) - \frac{\rho(\rho+m-1)}{1-x^2}\right]X = 0$$

$$(6) \quad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + (m-1)\operatorname{cotg}\varphi.\frac{d\Phi}{d\varphi} + \rho(\rho+m-1)\Phi = 0$$

in welchen Gleichungen ρ ein willkürliches noch unbestimmtes Element ist. Allein solche Functionen, welche den Gleichungen (5), (6) genügen, kennen wir schon, und zwar sind ihre vollständigen Integrale

$$h^{(\rho)}.X_n^{m,\rho}(x) + h_1^{(\rho)}.Y_n^{m,\rho}(x)$$

und

$$k_\rho . X_\rho^{(m-1)}(\cos\varphi) + k'_\rho . Y_\rho^{(m-1)}(\cos\varphi)$$

wo die mit h und k bezeichneten Integrationsconstanten ausser mn nur noch ρ und x' enthalten können.

Das allgemeine Integral von (4) hat demnach die Form

$$(7) \quad U = \sum_0^\infty \rho \left[h^{(\rho)}.X_n^{m,\rho}(x) + h_1^{(\rho)}.Y_n^{m,\rho}(x)\right]. \left[k_\rho.X_\rho^{(m-1)}(\cos\varphi) + k'_\rho.Y_\rho^{(m-1)}(\cos\varphi)\right]$$

und die Function $U = X_n^m(z)$ muss folglich darin enthalten sein.

selbst endlich, während die Y genannten Functionen diese Eigenschaft nicht theilen, vielmehr für endliche Werthe von x und φ namentlich für x, beziehuugsweise $\cos\varphi \gtreqless 1$ unstetig werden. Soll daher durch (7) die Function $X_n^m(z)$ dargestellt werden, so müssen vor Allem anderen die $h_1^{(\rho)}$ und k'_ρ genannten Constanten sämmtlich der Nulle gleich gesetzt werden. Bezeichnet man hierauf das Product je zweier der übrig bleibenden Constanten, nämlich $h^{(\rho)}.k_\rho$ mit $G^{(\rho)}$, so ist die Form von $X_n^m(z)$ als Integral der Gleichung (4) dargestellt, schon näher bestimmt, nämlich

$$U = \sum_0^\infty {}_\rho\, G^{(\rho)} . X_n^{m,\rho}(x) . X_\rho^{(m-1)}(\cos\varphi).$$

Aber auch die Anzahl der Glieder dieser Reihe ist zufolge der Natur der Function $X_n^m(z)$ eine beschränkte, und zwar kann die Summirung nur von o bis n geschehen, weil sonst $X_n^m(z)$ Cosinusse von grösseren Vielfachen als n enthalten würde. Alle diese Bemerkungen zusammengefasst, ist also $X_n^m(z)$ vollständig dargestellt durch die Gleichung

$$X_n^m(z) = \sum_0^n {}_\rho\, G^{(\rho)} . X_n^{m,\rho}(x) . X_\rho^{(m-1)}(\cos\varphi) \tag{8}$$

wo $G^{(\rho)}$ ausser Constanten nur noch x' enthalten kann. Aber $X_n^m(z)$ bleibt unverändert ebenso wie die Gleichung (4), wenn x mit x vertauscht wird, so dass man für $X_n^m(z)$ noch einen zweiten Ausdruck erhält, nämlich den folgenden

$$X_n^m(z) = \sum_0^n {}_\rho\, H^{(\rho)} . X_n^{m,\rho}(x') . X_\rho^{(m-1)}(\cos\varphi) \tag{9}$$

wo $H^{(\rho)}$ blos von x abhängt. Es müssen demnach die beiden in (8) und (9) enthaltenen Ausdrücke für $X_n^m(z)$ identisch sein, und weil eine bestimmte Function nur auf eine einzige Art nach X-Functionen einer Classe entwickelt werden kann, so folgt unmittelbar, dass

$$G^{(\rho)} . X_n^{m,\rho}(x) = H^{(\rho)} . X_n^{m,\rho}(x')$$

eine identische Gleichung sein muss, was nur sein kann, wenn

$$G^{(\rho)} = B^{(\rho)} . X_n^{m,\rho}(x')$$

und

$$H^{(\rho)} = B^{(\rho)} \,.\, X_n^{m,\rho}(x)$$

ist.

Mit dieser Bemerkung nimmt also die Gleichung (8) oder (9) die Form an

$$(10) \quad X_n^m(z) = \sum_0^n {}_\rho B^{(\rho)} \,.\, X_n^{m,\rho}(x) \,.\, X_n^{m,\rho}(x') \,.\, X_\rho^{(m-1)}(\cos\varphi)$$

und dieses ist, wie man sieht, die Ausdehnung der von Laplace gegebenen Gleichung für Kugelfunctionen auf die ganze Classe der X-Functionen.

3.

Setzt man abkürzend $\cos\varphi = y$ also

$$(11) \qquad z = xx' - \sqrt{x^2-1} \,.\, \sqrt{x'^2-1} \,.\, y,$$

so kann man das eben gewonnene Resultat auch in folgender Gestalt schreiben

$$(12) \qquad X_n^m(z) = \sum_0^n {}_\rho B_n^{m,\rho} \,.\, X_n^{m,\rho}(x) \,.\, X_n^{m,\rho}(x') \,.\, X_\rho^{m-1}(y),$$

wo ich $B_n^{m,\rho}$ statt einfach $B^{(\rho)}$ geschrieben habe, um deutlicher anzuzeigen, dass diese Constanten blos zur Entwicklung von X_n^m gehören und ausser ρ noch von n und m abhängen.

Damit die Entwicklung (12) vollständig bekannt sei, ist noch die Bestimmung eben dieser Constanten erforderlich. Dies kann nun auf folgende Weise geschehen: Vor Allem ist klar, dass die Gleichung (12) eine identische ist, wenn man für z seinen Werth (11) einsetzt und $X_n^m(z)$ in der Form (I, 2) sich entwickelt denkt. Sie muss also auch für sehr grosse $x\,x'$ gelten. Setzt man also $x = x' = \infty$, so wird in (12)

$$z_\infty = x^2(1-y)$$

und

$$X_n^{m,\rho}(x) \,.\, X_n^{m,\rho}(x') = x^{2n}$$

gesetzt werden können, so dass für sehr grosse Werthe von x die Gleichung besteht

$$\frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(n)} x^{2n} \cdot (1-y)^n = x^{2n} \sum_0^n {}_\rho B_n^{m,\rho} \cdot X_\rho^{(m-1)}(y)$$

oder

$$\frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(n)} \cdot (1-y)^n = \sum_0^n B_n^{m,\rho} \cdot X_\rho^{(m-1)}(y), \qquad (13)$$

d. h. für sehr grosse x, x' verwandelt sich die Gleichung (12) in die Entwicklung von $(1-y)^n$ nach X-Functionen, daher man zur Bestimmung der Coëfficienten von der Formel (I, 24) Gebrauch machen kann. Geschieht dies, so erhält man den allgemeinen Coëfficienten $B_n^{m,\rho}$ durch die Gleichung

$$\frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(n)} \int_{-1}^{+1} (1-y)^{n+\frac{m-2}{2}} (1+y)^{\frac{m-2}{2}} \left[X_\rho^{m-1}(y)\right] dy$$

$$= B_n^{m,\rho} \cdot \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{\frac{m-2}{2}} \left[X_\rho^{m-1}(y)\right]^2 dy.$$

Der Werth des Integrales rechts ist bekannt, es handelt sich daher nur noch um die Bestimmung des Integrales auf der linken Seite. In dieser Beziehung bemerke ich aber zunächst, dass sich $X_\rho^{m-1}(y)$ in eine endliche nach Potenzen von $(1-y)$ aufsteigende Reihe entwickeln lässt. Es ist nämlich

$$X_\rho^{m-1}(y) = X_\rho^{m-1}(1) - (1-y)\frac{dX_\rho^{m-1}(1)}{dy} + \frac{(1-y)^2}{1.2}\frac{d^2 X_\rho^{m-1}(1)}{dy^2} -$$

$$- \ldots (-1)^\rho \frac{(1-y)^\rho}{1.2\ldots\rho} \frac{d^\rho X_\rho^{m-1}(1)}{dy^\rho}$$

$$= X_\rho^{m-1}(1) - (1-y) \cdot (m-1) X_{\rho-1}^{m+1}(1) +$$

$$+ (1-y)^2 \cdot \frac{(m-1)(m+1)}{1.2} X_{\rho-2}^{m+3}(1) - \ldots$$

$$- \ldots (-1)^\rho (1-y)^\rho \frac{(m-1)(m+1)\ldots(m+2\rho-3)}{1.2\ldots\rho} X_0^{m+2\rho-1}(1).$$

Aber wenn man bemerkt, dass allgemein

$$X_\sigma^\mu(1) = \frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+\sigma-1)}{1.2\dots\sigma} \qquad X_0^\mu(1)=1,$$

so kann man auch schreiben

$$X_\rho^{m-1}(y) = \binom{m+\rho-2}{\rho} - (m-1)\binom{m+\rho-1}{\rho-1}.(1-y) +$$

$$+ \frac{(m-1)(m+1)}{1.2}\binom{m+\rho}{\rho-2}.(1-y)^2 - \dots.$$

$$\dots.(-1)^\rho \frac{(m-1)(m+1)\dots(m+2\rho-3)}{1.2\dots\rho}.(1-y)^\rho$$

oder abkürzend

$$X_\rho^{m-1}(y) = A_0 + A_1(1-y) + A_2(1-y)^2 + \dots + A_\rho(1-y)^\rho. \tag{14}$$

Macht man jetzt

$$\frac{m-2}{2} = p \qquad n+p=q$$

und setzt in

$$J = \int_{-1}^{+1} (1-y)^q.(1+y)^p X_\rho^{m-1}(y)\,dy$$

den Ausdruck (14), so erhält man

$$J = A_0 \int_{-1}^{+1} (1-y)^q (1+y)^p dy + A_1 \int_{-1}^{+1} (1-y)^{q+1}(1+y)^p dy$$

$$+ A_2 \int_{-1}^{+1} (1-y)^{q+2}(1+y)^p dy + \dots + A_\rho \int_{-1}^{+1} (1-y)^{q+\rho}(1+y)^p\,dy.$$

Führt man hier eine neue Veränderliche η durch die Gleichung

$$1-y=2\eta$$

ein und setzt

$$\int_0^1 \eta^{q+\rho}(1-\eta)^p d\eta = \frac{\Pi(q+\rho)\,\Pi(p)}{\Pi(q+p+\rho+1)} = G(\rho)$$

so wird

$$J = 2^{p+q+1}\{A_0 G(0) + 2A_1 G(1) + 2^2.A_2 G(2) + \dots + 2^\rho.A_\rho G(\rho)\}$$

angedeutet werden

$$J = 2^{p+q+1}\,\frac{\Pi(p)\,\Pi(q)}{\Pi(p+q+1)}\,.$$
$$.\,(-1)^{\rho}\,\frac{(m-1)\,m\ldots(m+\rho-2)\,.\,n\,(n-1)\ldots(n-\rho+1)}{1\,.\,2\ldots\rho\,.\,(n+m)(n+m+1)\ldots(n+m+\rho-1)}\,. \tag{15}$$

Benützt man nun diesen Ausdruck so wie die Formel (I. 24) in der Gleichung (13. a), so findet man nach einigen Reductionen

$$B_n^{m,\rho} = (-1)^{\rho}(2\rho+m-1)$$
$$[m(m+2)\ldots(m+2n-2)]^2\,.\,\frac{\Pi(m-2)}{\Pi(n-\rho)\,\Pi(n+m+\rho-1)} \tag{16}$$

als Ausdruck des allgemeinen Coëfficienten in der Entwicklung (12) dem man durch Einführung der Grössen ν und μ in ihrer bisher beständig gebrauchten Bedeutung nämlich

$$\nu = \frac{m-1}{2} \qquad \mu = n + \nu$$

auch die für manche Fälle bequemere Form geben kann

$$B_n^{m,\rho} = \Pi(2\nu-1)\left[\frac{2^{\nu}\,\Pi(\nu)\,\Pi(2\mu)}{2^{\mu}\,\Pi(\mu)\,\Pi(2\nu)}\right]^2 .\,\frac{(-1)^{\rho}(2\rho+2\nu)}{\Pi(\mu-\nu-\rho)\,\Pi(\mu+\nu+\rho)}\,. \tag{17}$$

4.

Zum Schlusse werde ich noch von den Folgerungen, die man aus der Entwicklung (12) ziehen kann, einige der unmittelbarsten, die wegen ihrer Analogie mit bekannten Sätzen für Kugelfunctionen nicht ohne Interesse sind, ableiten.

Vor Allem schreibe ich die Entwicklung (12) in anderer Form, indem ich statt $xx'y$ die ursprünglich gebrauchten Bezeichnungen $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\cos\varphi$ wieder einführe. Schreibt man überdies für z, um die Bedeutung dieser Grösse besser zu veranschaulichen $\cos\Theta$, so wird

$$\cos\Theta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi$$

und

$$(18)\; X_n^m(\cos\Theta) = \sum_0^n B_n^{m,\rho} \,.\, X_n^{m,\rho}\cos(\theta) \,.\, X_n^{m,\rho}\cos(\theta') \,.\, X_\rho^{m-1}(\cos\varphi).$$

Die Formeln (I), (24), (27) verwandeln sich durch Einführung von $\cos\theta$ und $\cos\varphi$ in

$$(19)\quad \int_0^\pi [X_n^m(\cos\varphi)]^2 \sin\varphi^m \, d\varphi = \frac{\Pi(\mu+\nu)}{\Pi(\mu-\nu)} \left[\frac{2^\nu \Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)}\right]^2 \cdot \frac{2}{2\mu+1} = H_n^m$$

$$(20)\quad \int_0^\pi [X_n^{m,\rho}(\cos\theta)]^2 \sin\theta^m \, d\theta$$

$$= (-1)^\rho \left[\frac{2^\mu \Pi(\mu)}{\Pi(2\mu)}\right]^2 \Pi(\mu-\nu-\rho)\,\Pi(\mu+\nu+\rho) \cdot \frac{2}{2\mu+1} = G_n^{m,\rho}.$$

welche beiden Integralwerthe ich der Kürze wegen mit den rechts stehenden Buchstaben H und G bezeichne, deren angehängte Zeiger die in ihnen enthaltenen Elemente angeben, mit denen sich ihr Werth ändert. Aus der ersten dieser Formeln folgt

$$(21)\quad \int_0^\pi [X_\rho^{m-1}(\cos\varphi)]^2 \sin\varphi^{m-1} \, d\varphi$$

$$= \left[\frac{\Pi(2\nu)}{2^\nu \Pi(\nu)\,\Pi(2\nu-1)}\right]^2 \frac{\Pi(2\nu-1+\rho)}{\Pi(\rho)} \cdot \frac{\pi}{2\nu+2\rho} = H_\rho^{m-1},$$

welcher Gleichung ich noch den bekannten Ausdruck der B-Coëfficienten in der Form

$$(22)\quad \left[\frac{2^\nu \Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)}\right]^2 \cdot \frac{(2\rho+2\nu)\,\Pi(2\nu-1)}{G_n^{m,\rho}} \cdot \frac{2}{2\mu+1}$$

$$= \frac{1}{H_\rho^{m-1} \,.\, G_n^{m,\rho}} \cdot \frac{\Pi(2\nu-1+\rho)}{\Pi(\rho)\,\Pi(2\nu-1)} \cdot \frac{2\pi}{2\mu+1} = B_n^{m,\rho}$$

beifüge.

Bemerkt man nun, dass, so lange ρ und σ von einander verschieden sind, die Gleichung gilt

$$\int_0^\pi X_\rho^{m-1}(\cos\varphi) \,.\, X_\sigma^{m-1}(\cos\varphi) \,.\, \sin\varphi^{m-1}\, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^\pi X_n^m(\cos\Theta)\,.\,X_\rho^{m-1}(\cos\varphi)\sin\varphi^{m-1}\,d\varphi$$
$$= B_n^{m,\rho}\,.\,H_\rho^{m-1}\,.\,X_n^{m,\rho}(\cos\theta)\,.\,X_n^{m,\rho}(\cos\theta')$$

und wegen (22)

$$G_n^{m,\rho}\int_0^\pi X_n^m(\cos\Theta)\,.\,X_\rho^{m-1}(\cos\varphi)\,.\,\sin\varphi^{m-1}d\varphi$$
$$= \frac{\Pi(2\nu-1+\rho)}{\Pi(\rho)\Pi(2\nu-1)}\cdot\frac{2\pi}{2\mu+1}X_n^{m,\rho}(\cos\theta)\,.\,X_n^{m,\rho}(\cos\theta'). \tag{23}$$

Macht man hier $\rho=0$ und berücksichtiget, dass

$$X_n^{m,0}=2^{\mu-\nu}\Pi(\mu-\nu)\,.\,\frac{\Pi(\mu)\,\Pi(2\nu)}{\Pi(2\mu)\,\Pi(\nu)}\,.\,X_n^m,$$

so erhält man

$$H_n^m\int_0^\pi X_n^m(\cos\Theta)\,.\,\sin\varphi^{m-1}\,d\varphi=\frac{2\pi}{2n+m}\,.\,X_n^m(\cos\theta)\,.\,X_n^m(\cos\theta') \tag{24}$$

und in letzter Gleichung $m=1$ setzend den bekannten Legendre'-schen Satz

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi X_n^1(\cos\Theta)\,d\varphi=X_n^1(\cos\theta)\,.\,X_n^1(\cos\theta').$$

Macht man hingegen in dem Ausdrucke

$$J_n^{m,\rho}=\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}\left[X_n^{m,\rho}(x)\right]^2dx\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{\frac{m-2}{2}}\left[X_\rho^{m-1}(y)\right]^2dy$$

die Substitution $x=\cos\theta$, $y=\cos\varphi$, so wird

$$J_n^{m,\rho}=\int_0^\pi\int_0^\pi\left[X_n^{m,\rho}(\cos\theta)\,.\,X_\rho^{m-1}(\cos\varphi)\right]^2\sin\theta^m\sin\varphi^{m-1}d\theta\,d\varphi$$
$$=H_\rho^{m-1}\,.\,G_n^{m,\rho} \tag{25}$$

somit wegen (22)

$$J_n^{m,\rho}\,.\,B_n^{m,\rho}=\frac{1}{\Pi(\rho)}\cdot\frac{\Pi(2\nu-1+\rho)}{\Pi(2\nu-1)}\cdot\frac{2\pi}{2\mu+1} \tag{26}$$

während für verschiedene ρ und σ der Integralausdruck

$$(27)\quad \int_0^\pi\int_0^\pi X_n^{m,\rho}(\cos\theta).X_n^{m,\sigma}(\cos\theta).X_\rho^{m-1}(\cos\varphi) \\ .X_\sigma^{m-1}(\cos\varphi)\sin\theta^m\sin\varphi^{m-1}d\theta\, d\varphi=0$$

wird, weil das einfache Integral nach φ verschwindet.

Wendet man jetzt die Gleichung (26), (27) auf die Entwicklung (18) an, so erhält man

$$(28)\quad \int_0^\pi\int_0^\pi X_n^m(\cos\Theta).X_n^{m,\rho}(\cos\theta).X_\rho^{m-1}(\cos\varphi)\sin\theta^m\sin\varphi^{m-1}d\theta\, d\varphi \\ =\frac{1}{\Pi(\rho)}\cdot\frac{\Pi(2\nu-1+\rho)}{\Pi(2\nu-1)}\cdot\frac{2\pi}{2\mu+1}X_n^{m,\rho}(\cos\theta')$$

und es ist einleuchtend, dass man die Zugeordnete $X_n^{m,\rho}(\cos\theta)$ ganz auf ähnliche Weise ausgedrückt erhält, wenn man nur in (28) überall θ' mit θ und umgekehrt vertauscht.

Überhaupt wenn

$$X_n^{m,\rho}(\cos\theta).X_\rho^{m-1}(\cos\varphi)=U_n^{m,\rho}$$

gesetzt wird und es möglich ist eine Function von φ und θ nach solchen U-Functionen zu entwickeln, etwa in der Form

$$f(\theta,\varphi)=\mathfrak{A}_0^{m,\rho}+\mathfrak{A}_1^{m,\rho}U_1^{m,\rho}+\mathfrak{A}_2^{m,\rho}U_2^{m,\rho}+\ldots+\mathfrak{A}_n^{m,\rho}U_n^{m,\rho}+\ldots$$

so bestimmen sich die Coëfficienten der Entwicklung durch die Gleichung

$$J_n^{m,\rho}\,.\,\mathfrak{A}_n^{m,\rho}=\int_0^\pi\int_0^\pi U_n^{m,\rho}.f(\theta,\varphi)\sin\theta^m\sin\varphi^{m-1}d\theta\, d\varphi.$$



Christiania, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1863—64. 4° & 8°.

Cosmos. 2e Série, XIVe Année, 1er Volume. 16e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LX. Nr. 15. Paris, 1865; 4°.

Gesellschaft, deutsche geologische: Zeitschrift. XVI. Bd., 4. Hft. Berlin, 1864; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg., Nr. 17. Wien, 1865; 8°.

Grunert, Joh. Aug., Archiv der Mathematik und Physik. XLIII. Theil, 2. Heft. Greifswald, 1865; 8°.

Jahrbuch; Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer von F. Vorwerk. Band XXIII, Heft 3. Speyer, 1865; 8°.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 12. Wien, 1865; 4°.

Marenzi, Franz Graf v., Zwölf Fragmente über Geologie. 3. Aufl. Triest, 1865; 8°.

Mittheilungen des k. k. Génie-Comité. Besondere Beilage zum Jahrgang 1865. Wien; 8°.

Moniteur scientifique. 200e Livraison. Tome VIIe, Année 1865. Paris, 1865; 8°.

Reader. Nr. 121, Vol. V. London, 1865; Folio.

Reise der österr. Fregatte „Novara" um die Erde. Geologischer Theil. I. Band, II. Abtheilung: Paläontologie von Neu-Seeland. Wien, 1865; 4°.

Reichsforstverein, österr.: Monatschrift. XV. Bd. Jahrg. 1865, April-Heft. Wien; 8°.

Schmidt, C. F. Eduard, Die Erdöl-Reichthümer Galiziens. Wien, 1865; 8°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 32—33. Wien, 1865; 4°.

Zeitschrift für Chemie etc. von H. Hübner. VIII. Jahrg. N. F. Band I, Heft 5—6. Göttingen, 1865; 8°.

Über Ergänzungsfarben und Contrastfarben.

Von dem w. M. Prof. Ernst Brücke.

(Mit 4 Tafeln und einem Holzschnitt im Text.)

Vor einer Reihe von Jahren glaubte ich zu bemerken, dass die subjectiven Farben, welche wir als Farben durch Contrast bezeichnen, und die sogenannten complementären Nachbilder nicht immer genau die zur erzeugenden Farbe complementäre zeigen, dass sie innerhalb gewisser Grenzen davon abweichen. Um mich hierüber weiter zu belehren, verband ich an meinem Polarisationsmikroskope mit dem unteren Nicol'schen Prisma einen gestielten Ring, durch den dasselbe gedreht werden konnte. In diesem Ringe lag drehbar ein zweiter, auf dem ich ein Gypsblättchen so befestigte, dass es mit der von ihm erzeugten Farbe das halbe Sehfeld einnahm. Dieser Ring wurde nun, nachdem die Nicol'schen Prismen gekreuzt und dadurch das halbe Sehfeld dunkel gemacht war, mittelst einer kleinen Handhabe so gedreht, dass die Farbe des Plättchens ihr Maximum von Sättigung erreichte; ich blickte sie eine Weile an und drehte dann mittelst des Stieles des zuerst erwähnten Ringes das untere Nicol und mit ihm das Gypsblättchen um 90°. Hierdurch wurde natürlich das halbe Sehfeld hell, und das Blättchen erschien in der Complementärfarbe. Zugleich war aber auch die Grenze von farbigem und farblosem Sehfelde um 90° gedreht, so dass also das Nachbild mit seiner einen Hälfte auf den nunmehr weissen Grund fiel und mit der Complementärfarbe verglichen werden konnte.

Ich fand indessen diese Versuche zu angreifend für meine Augen, die sich damals von den Folgen anderweitiger Versuche über subjective Farben noch nicht völlig erholt hatten. Ich liess desshalb den Gegenstand vorläufig ruhen.

Auch von anderer Seite sind inzwischen keine näheren Untersuchungen über die Contrastfarben angestellt worden; man scheint allgemein ohne Beweis angenommen zu haben, dass sie stets die

Ergänzungsfarbe zu der erzeugenden zeigen müssen, obgleich auch die Abbildungen von Contrasten, die wir in verschiedenen Schriften über Farbenlehre finden, von den durch die Untersuchungen von Helmholtz und von Maxwell festgestellten Complementen theilweise beträchtlich abweichen.

In neuerer Zeit nun trat die Nothwendigkeit an mich heran, mir die Gewissheit zu verschaffen, ob die durch den sogenannten simultanen Contrast erzeugten Farben stets den Complementen der erzeugenden Farben entsprechen oder nicht.

Es konnte sich hier natürlich nicht um gleiche Sättigung und gleiche Helligkeit, sondern nur um gleiche Tinte handeln, d. h. darum, ob die durch ein bestimmtes Roth erzeugte Contrastfarbe mehr grün oder mehr blau sei als das Complement eben dieses Roth, ob die durch ein bestimmtes Gelb erzeugte Contrastfarbe mehr blau oder mehr violet sei als das Complement eben dieses Gelb u. s. w.

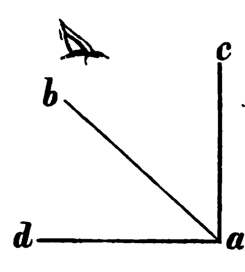
Um meinen Zweck zu erreichen, kehrte ich nicht zu meinem früheren Verfahren zurück, theils weil ich schon damals die Schwierigkeiten desselben kennén gelernt hatte, theils auch weil es sich hier wesentlich um den simultanen Contrast handelte, und ich es nicht für gerechtfertigt hielt, aus dem Verhalten der Nachbilder auf diesen zu schliessen.

Überdies musste ich suchen, nicht nur die Contraste eines einzelnen Individuums, sondern die Constraste einer Anzahl von Individuen kennen zu lernen.

Ich schlug desshalb einen anderen Weg ein, der sich mir durch Chevreul's inzwischen erschienenes Werk: „Exposé d'un moyen de définir et de nommer les couleurs d'après une méthode précise et experimentale (Paris, 1861)," darbot. Dieses Werk enthält bekanntlich eine Reihe von farbigen Kreisscheiben, die, jede in 72 Sectoren getheilt, den Farbenkreis in verschiedenen Stufen der Sättigung darbieten. Unter diesen diente mir diejenige (die fünfte Tafel des ganzen Atlas), welche die gesättigten Farben (couleurs franches) in getrennten Tinten darbietet, als Farbenscala, nach der alle in diesen Versuchen beobachteten Farben ausnahmslos bestimmt wurden. Ich erwähne dies ausdrücklich, weil manche der beobachteten Contrastfarben viel leichter nach einer der Tafeln, welche die verdunkelten Farben (couleurs rabattues) enthalten, hätte bestimmt

werden können. Ich habe es aber vorgezogen, den Beobachtern die Bestimmung etwas zu erschweren um nicht zu den unvermeidlichen Fehlerquellen noch eine vermeidliche hinzuzufügen, die möglicher Weise ungleichmässige Ausführung der verschiedenen Tafeln im Farbendrucke. Auch würde das Herumblättern und Wählen zwischen verschiedenen Tafeln den Beobachter verwirrt haben.

Die Farben, deren Contraste hervorgerufen und bestimmt werden sollten, lagen theils in Gestalt von farbigen Papieren vor, theils wurden sie durch Auftragen von Zinnober, Mennige, Chromgelb und Gummigut auf vorher mit Papier überzogene rechteckige Pappstücke hergestellt. Das Mittel den Contrast hervorzurufen, bestand in einer Modification des Versuches von Ragona-Scinà. Rogona-Scinà hat bekanntlich die schon früher von Fechner und von Dove angestellten Spiegelversuche so abgeändert, dass er dem Auge, welches wie in beistehendem Holzschnitte gegen die farbige Glastafel *ab* blickt, das Bild zweier weisser Papierflächen, *ac* und *ad*, so darbietet, dass *ac* katoptrisch, *ad* dioptrisch gesehen wird. Auf beiden befindet sich in der Mitte je ein schwarzer Ring. Der eine, der katoptrisch gesehene erscheint in der Farbe des Glases, indem hier der Eindruck von reflectirtem weissem Lichte ausfällt; der andere, der dioptrisch gesehene, erscheint durch den Contrast complementär gefärbt, da hier der Eindruck von Licht vermisst wird, das die Farbe des Glases mitbringt. Wo beide Ringe sich durchkreuzen, erscheinen sie schwarz.



An die Stelle der farbigen Glastafel *ab* nun habe ich eine weisse gesetzt, so weiss wie ich sie in den grossen Glasniederlagen Wiens nur finden konnte. An die Stelle des weissen Papiers *ad* bringe ich das farbige, welches den Contrast erzeugen soll und einen schwarzen Ring von 5 Centimeter Durchmesser und 7 Millim. Breite trägt. An die Stelle von *ac* setze ich ein Rechteck aus Pappe, 42 Centimeter lang und 27 Centimeter hoch. Dasselbe ist mit weissem Papier beklebt und dann mit kohlensaurem Baryt überzogen, der mit Wasser angemacht und mit so viel weissem arabischem Gummi versetzt wurde, dass er im Anstrich eine weisse, matte

Fläche gab. Dies weisse Rechteck trug in der Mitte einen schwarzen Ring von gleichen Dimensionen, wie der vorerwähnte.

Bei dieser Anordnung wurden unter guter Beleuchtung sehr deutliche subjective Farben durch den simultanen Contrast erzeugt.

Durch Veränderung der Winkel, welche die Glastafel und das weisse Rechteck mit der farbigen Fläche und mit der Sehaxe machen, kann man ihre Helligkeit und ihre Intensität verändern und sie so zur Vergleichung mit der Farbenscala geeignet machen.

Der Beobachter musste nun zuerst die erzeugende Farbe, d. h. die Farbe von *ad* in der Farbenscala bestimmen; dann wurde der Versuch angestellt und, indem man ihm die Farbenscala in guter Beleuchtung neben seine Glastafel hielt, bestimmte er die Contrastfarbe. Fand er darin bei einer oder der anderen Farbe eine besondere Schwierigkeit, so wurde sie weggelassen.

Imgleichen wurden solche erzeugende Farben ausgeschlossen, bei denen es sich zeigte, dass sie wegen zu grossen Helligkeitsunterschiedes nicht gut in der Farbenscala ausgewerthet werden konnten.

Die Versuche wurden in einem Hörsaale mit hellgrauer Decke und hellgrauen Amphitheater angestellt, in den das Licht frei von Norden her einfiel. Die Zeit war theils Vormittags zwischen 9 und 11, theils Nachmittags zwischen 2 und 3 Uhr. Auf diese Weise entstanden die mit *B* bezeichneten Tabellen I—VII. Die mit *A* bezeichneten Tabellen beziehen sich nicht auf Contrastfarben, sondern auf Complementärfarben, welche auf physikalischem Wege gewonnen wurden. Der Weg war folgender:

Ich baute mir aus dem Gestelle eines einfachen Mikroskopes, einem Nicol'schen Prisma und einer Haidinger'schen dichroskopischen Loupe, einen Polarisationsapparat, der mir von untergelegten, mittelst Dammar zwischen weissen Glasplättchen eingeschlossenen Gypsblättchen die ihnen angehörigen Paare von Complementärfarben zeigte.

Um diese weniger hell und den Farben der Pigmente ähnlicher zu machen, wurde das Licht nicht von einem Spiegel, sondern von einem künstlich weiss gefärbten Papiere, wie man es zu Visitkarten anwendet, reflectirt.

Jeder Beobachter hatte nun ausser den Contrasten eine Reihe von Paaren complementärer Farben in der Farbenscala auszuwerthen. Um die auf diese Weise entstandenen mit *A* bezeichneten Tabellen

leichter mit den Tabellen *B* vergleichbar zu machen, wurden sie so angelegt, dass jede ausgewerthete Farbe in jeder der Columnen *b* und *c*, also im Ganzen zweimal vorkommt.

In den Tabellen *B* enthält die Columne *b* die erzeugende, die Columne *c* die durch den Contrast erzeugte Farbe.

Die Columne *a* enthält in allen Tabellen diejenige Zahl, welche der unter *b* verzeichneten Farbe im Chevreul'schen Farbenkreise zukommt, wenn man von Rouge *o* an durch Gelb zum Grün etc. in den 72 Farben fortzählt. Die Zahlen der Columne *d* geben in gleichem Sinne die Nummern der Farben der Columne *c*. Die Columne *e* enthält die Zahlen der Farben, welche in Chevreul's Kreise den Farben der Columne *b* gegenüberstehen, und die Columne *f* enthält die Differenzen der Zahlen unter *d* und *e*. Man hat sich dabei gegenwärtig zu halten, dass nach 71 das Zählen mit *o* wieder beginnt.

Um diejenigen, welche Chevreul's Farbenkreis nicht zur Hand haben, in demselben zu orientiren, habe ich aus des berühmten Chemikers Werk beiliegende, mit X bezeichnete Tabelle reproducirt, in der er die Farben des Spectrums, die nach Fraunhofer'schen Linien und Abständen von denselben bezeichnet sind, nach seinem Systeme auswerthet und benennt.

Meine Beobachter waren nach den Nummern der Tabellen I Babuchin, II Basch, III Brücke, IV Czerni, V Meyer, VI Stricker, VII Wywodzoff.

Um nun zu sehen, in wie weit die Contraste der einzelnen mit ihren Angaben über die Complementärfarben übereinstimmen, muss man in *A* und *B* die Columnen *f* vergleichen. Es können dabei aber nur solche Zahlen verglichen werden, die Reihen angehören, welchen in *A* und *B* in der Columne *a* gleiche oder nahezu gleiche Zahlen entsprechen. Ich will z. B. wissen, ob bei Dr. Babuchin der Contrast des Blau mit seinem Complement übereinstimmt.

Ich finde in Tabelle I *B* Versuche mit Papieren von der Farbe Bleu 1 und Bleu 2. Die zugehörigen Zahlen in der Columne *f* sind —10 und —11. Die zugehörigen Zahlen in der Columne *a* sind 49 und 50. Diese suche ich in der Columne *a* der Tabelle I *A*. Ich finde als nächste Zahlen 48 und 50. Die zugehörige Zahl in der Columne *f* ist für beide —9. Also zeigen sich in dieser Region Complement und Contrast um $\frac{1}{72}$ bis $\frac{1}{36}$ des ganzen Farbenkreises verschieden, ein

Unterschied, der bei den nothwendigen Fehlerquellen dieser Versuche zu keinem Schlusse auf eine thatsächliche Verschiedenheit berechtigt. Dass eine solche wenigstens nicht allgemein sei, zeigt sich sogleich, wenn wir die folgenden Tabellen ansehen. Bei Dr. Babuchin war das Complement etwas mehr zum Orange hin gefunden als der Contrast. Schon die Tabellen II *A* und *B*, beobachtet von Dr. Basch, zeigen in derselben Region eine kleine Abweichung im entgegengesetzten Sinne. Man findet hier Tabelle *A* Columne *a* die Zahlen 47 und 52 und dazu in Columne *f* —8 und —7. Vergleicht man Tabelle *B*, so findet man unter *a* 51 und 52 und dazu unter *f* —7 und —5.

In den Tabellen III *A* und *B*, die meine eigenen Beobachtungen enthalten, findet man unter *A* Columne *a* die Zahl 48 zweimal und dazu unter *f* die Zahlen —8 und —9. Die 48 am nächsten stehende Zahl in Columne *a* der Tabelle III. *B* ist 50. Man findet dazu in der Columne *f* die Zahl —6 u. s. w.

Um die Übersicht zu erleichtern, habe ich den Farbenkreis Chevreul's in ein verkleinertes Schema gebracht, dies vervielfältigt und die Beobachtungen so hineingetragen, dass ich für jeden Beobachter jedes Paar von beobachteten Complementärfarben durch eine gerade Linie verband. Bei den Contrastfarben verfuhr ich so, dass ich von der erzeugenden Farbe einen Pfeil ausgehen liess, der auf die erzeugte Contrastfarbe hinweist. So entstanden die Doppelfiguren I bis VII, welche den Doppeltabellen I bis VII entsprechen.

Um zugleich zu zeigen, wie sich die von meinen Beobachtern nach dem Polariskop ermittelten Complementärfarben zu denen verhalten, welche Helmholtz nach messenden Versuchen mit reinen Spectralfarben aufstellte, habe ich für diese letzteren ähnliche Tabellen und ähnliche Zeichnungen entworfen.

Da Helmholtz die Wellenlänge der von ihm benutzten Mischfarben angibt, so kann man den Ort derselben im Spectrum bestimmen.

Ich habe mich dazu der von Ditscheiner (Akadem. Anzeiger vom 6. October 1864) beobachteten Zahlen bedient. Da dieselben von denen, welche Helmholtz seinen Messungen zu Grunde gelegt hat, etwas abweichen, so habe ich, um die von Ditscheiner im Kirchhoff'schen Spectrum gemachten Ortsbestimmungen benützen zu können, die von Helmholtz angegebenen Wellenlängen im Ver-

hältniss dieser Abweichungen abgeändert. Es involvirt dies natürlich keinerlei Urtheil über die grössere oder geringere Genauigkeit der einen oder der anderen Zahlen, sondern war einfach durch den Gang der Rechnung geboten.

Nachdem dann der Ort der Farbe auf dem Wege der Interpolation im Spectrum bestimmt war, wurde sie nach der oben mitgetheilten Tabelle von Chevreul ebenfalls auf dem Wege der Interpolation in Rücksicht auf ihre Stellung im Farbenkreise bestimmt. Auf diese Weise entstanden die Tabelle VIII und die Zeichnung Fig. VIII. Dass in derselben Jaune 5 gleichzeitig zwei verschiedene Complemente aufweist, beruht darauf, dass zwei von Helmholtz benützte Gelb im Spectrum so nahe neben einander lagen, dass sie bei der letzten Interpolation, bei der keine geringere Grösse als $\frac{1}{72}$ des Farbenkreises berücksichtigt werden konnte, in eine Farbe zusammenfielen.

Um die bei dieser Interpolation gemachten Fehler, so wie die etwaigen Abweichungen meines Exemplars des Farbenkreises von demjenigen, nach welchem Chevreul die oben erwähnte und mitgetheilte Tabelle X entwarf, zu corrigiren, werthete ich die von Helmholtz gemischten Farben selbstständig nach meinem Exemplare des Chevreul'schen Farbenkreises aus. Ich bediente mich dazu eines in der Werkstätte des hiesigen polytechnischen Institutes angefertigten Spectralapparates. Er besass nur zwei Prismen, aber schon im gewöhnlichen diffusen Tageslichte zerfiel die Gruppe *b* in drei vollkommen scharf getrennte Massen, an besonders hellen Tagen sah ich die beiden Linien *D* deutlich getrennt, und von den schwächeren Linien war eine hinreichende Menge sichtbar, um mir unter Beihilfe von Kirchhoff's Abbildungen zur Orientirung zu dienen. Aus diesen Bestimmungen entstand Tabelle IX und Fig. IX. Man sieht die Abweichungen von VIII sind gering, was jedenfalls für die vortreffliche und gleichmässige Ausführung von Chevreul's Tafeln zeugt.

Vergleicht man nun die Columne *f* dieser Tabellen mit I *A* bis VII *A*, so findet man die Zahlen im Allgemeinen höher. Nur in VII und V findet man ähnlich hohe Zahlen und auch hier nicht in solcher Ausdehnung. Ich werde später noch auf die mögliche Ursache dieser Differenzen zurückkommen.

Ehe ich zur Vergleichung der Contrastfarben mit den Complementärfarben übergehe, muss ich auf die Fehler und Fehlerquellen

in der Bestimmung der Complementärfarben selbst aufmerksam machen.

Zunächst zeigt sich hier als auffallende individuelle Abweichung die Zahl 11 in Tabelle II *A* Columne *f* und die Zahl 12 in Tabelle V *A* Columne *f*. Beide entsprechen nahe aneinanderliegenden Zahlen, 31 und 32, beziehungsweise 56, in der Columne *a*, während in dieser Region bei allen übrigen Beobachtern niedrigere Zahlen vorkommen. Man könnte zunächst daran denken, dass man es hier mit blossen Flüchtigkeitsfehlern zu thun habe, die sich später bei den zahlreichen Farbenabstufungen, die auf den Gypsblättchen vorkommen, nicht mehr controliren liessen; aber es muss schon auffallend erscheinen, dass ein und dieselbe abweichende Angabe bei zwei verschiedenen Beobachtern an demselben Orte und in derselben Weise vorkommt. Noch auffallender wird die Erscheinung dadurch, dass in der Tabelle V *B* der Zahl 56 in Columne *a* auch die Zahl 12 in Columne *f* und in Tabelle II *B* sogar die Zahl 14 entspricht, die höchste von allen, welche überhaupt in irgend einer Columne *f* vorhanden sind.

Dass individuelle Abweichungen vorkommen, kann schon nach dem allgemeinen Eindrucke der Figuren kaum bezweifelt werden, denn bei allen liegt die Hauptmasse der Durchkreuzungen beträchtlich oberhalb des Centrums, aber in Fig. I *A*, IV *A* und V *A*, liegt sie nach oben und links, in Fig. II *A* und VII *A* nach oben und rechts.

Die Inconsequenzen in den Bestimmungen jedes einzelnen kann man beurtheilen, wenn man die Zahlen der Columne *f* auf ihre Continuität prüft. Man wird hierbei zugleich bemerken, dass dieser Zahlenreihe, wenn man von einzelnen Unregelmässigkeiten absieht, zwei Minima zukommen. Das eine liegt im Gebiete des Rouge orangé das andere im Gebiete des Violet rouge [1], seltener des Violet. Das absolute Maximum fällt meistens in das Gebiet des Orangé jaune mit Einschluss von Jaune *o*. Über das zweite Maximum, welches nach Vergleichung der Tafeln VIII und IX im Gebiete des Roth liegen muss, geben die Tafeln I *A* bis VII *A* nur sehr unvollkommenen Auf-

---

[1] Farbenkreiselversuche zeigten dieses Minimum nicht. Auf einem nach Maxwell's Art eingerichteten Farbenkreisel gaben zwei Papiere mit einander grau, von denen das eine als Vert 2, das andere als Violet rouge O ausgewerthet wurde. Dies würde der Zahl 8, also einer verhältnissmässig hohen Ziffer in Columne *f* entsprechen.

schluss, weil das eigentliche Roth in der Newton'schen Farbenreihe und somit auch in den Farben, welche Gypsplättchen im polarisirten Lichte zeigen, zu schwach vertreten ist.

Die Betrachtung der Tafeln I *A* bis VII *A* zeigt ferner einzelne Beobachtungen in Widerstreit mit einander, indem Linienpaare vorkommen, welche sich erst ausserhalb des Kreises schneiden, was offenbar nicht möglich ist, wenn jede Farbe im Farbenkreise nur eine findet, die ihr als Ergänzungsfarbe dienen kann, und diese ergänzenden Farben stets in derselben Richtung fortschreiten mit denjenigen, welche zu Weiss ergänzt werden sollen.

Als Fehlerquellen, welchen die erwähnten Abweichungen zuzuschreiben sind, müssen folgende genannt werden: Erstens die Unvollkommenheit unseres Unterscheidungsvermögens für Farben überhaupt, die überall da deutlich hervortritt, wo wir die Farben nicht unmittelbar an einander legen und mit einem Blicke übersehen können, und zweitens unsere mangelhafte Vorstellung von der Schattirung. Wo wir, wie hier, Farben verschiedener Helligkeit in Rücksicht auf ihre Tinte vergleichen sollen, müssen wir eine deutliche Vorstellung davon haben, wie die hellere Farbe aussehen würde, wenn sie dunkler wäre, oder wie die dunklere aussehen würde, wenn sie heller wäre, d. h. wenn statt ihrer ein hellerer Ton derselben Schattirung dem Auge dargeboten würde. Diese Vorstellung ist bei dem einen mehr, bei dem anderen weniger unsicher und schwankend.

Ich muss ferner hervorheben, dass in der Region des Purpurviolet sehr kleine Dickenunterschiede der Gypsblättchen schon auffällige Farbenunterschiede hervorbringen, während sie an den dazugehörigen gelbgrünen Complementen nicht oder kaum merklich sind.

Diese Fehlerquelle scheint in unseren Versuchen die ergiebigste von allen gewesen zu sein, denn gerade in dieser Region zeigen sich die grössten Anomalien; die grösste von allen in II *A*, wo für Jaune vert 1 zu verschiedenen Zeiten zwei Complemente bestimmt sind, die um den enormen Abstand von 14 Farben von einander entfernt stehen, um mehr als $^1/_6$ des ganzen Farbenkreises.

Ehe ich an die Beurtheilung meiner Versuche ging, musste ich mir endlich noch die Frage vorlegen, ob den die gangbare Lehre von den Complementärfarben in allen ihren Theilen richtig sei.

Nach dieser Lehre hat jede Farbe nur eine einzige Ergänzungsfarbe. Dieselbe kann heller oder weniger hell sein, je nachdem ihr

mehr oder weniger Weiss beigemischt ist, aber sie gehört immer einer und derselben Schattirung an.

Diese Lehre setzt natürlich voraus, dass eine jede Farbe, wenn man ihr mehr und mehr Weiss zusetzt, zwar heller und weniger gesättigt, wie wir uns im gemeinen Leben ausdrücken, blässer werde, aber dabei Schattirung halte, d. h. ihren Ort im Farbenkreise nicht verändere. Dieser Satz ist nicht nur unbewiesen, sondern er ist, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, entschieden unrichtig, so lange man das Weiss nennt, was wir Weiss zu nennen pflegen.

Aubert fand, dass ein blaues Ringstück von 60 Grad auf einer weissen Drehscheibe, während der Rotation nicht einen hellblauen, sondern einen violeten Ring hervorbrachte (Physiologie der Netzhaut, Breslau, 1865, pag. 136). Auch der Ring, den er von einem orangefarbenen Sectorenstücke erhielt, schien ihm röther zu sein als das Pigment. An den übrigen Farben beobachtete er nichts ähnliches.

Es ist zuförderst der Beweis zu liefern, dass man es hier nicht mit einer Erscheinung zu thun hat, die sich lediglich an Drehscheiben zeigt, sondern dass wirklich die Zumischung des Weiss zum Blau an und für sich die Ursache der Farbenveränderung sei [1]). Dies geschieht leicht in folgender Weise:

Ich stelle eine weisse Glastafel senkrecht auf einen weissen Grund und blicke unter 45 Grad in dieselbe hinein, so dass mir weisses Licht von derselben, sowohl dioptrisch, wie katoptrisch zukommt. Dann lasse ich darin sich einen Streifen gesättigt dunkelblauen Papiers spiegeln. Das Spiegelbild ist violet.

In diesem Versuche mischte sich das dioptrisch gesehene Weiss mit dem katoptrisch gesehenen Blau. Ich kehre nun den Versuch um, so dass das Blau dioptrisch, das Weiss katoptrisch gesehen wird. Zu dem Ende bringe ich ein Deckgläschen so vor mein Auge, dass der weisse Grund darin gespiegelt wird und sehe nun durch dasselbe nach dem blauen Papierstreifen. Er erscheint violet. Sobald ich neben

---

[1]) Eine hierher gehörige Angabe findet sich bei Chevreul (l. c. p. 78). Sie lautet: „à une lumière diffuse faible, le milieu de l'espace *GH* correspondait au 3 bleu violet, tandis qu'à une lumière plus forte, qui affaiblissait les rayons colorés, il correspondait au 4 bleu violet.“ Er erwähnt dies, indem er die Schwierigkeiten schildert, auf welche man stösst, wenn man Körperfarben nach den Farben des Spectrums auswerthen will.

dem Gläschen wegsehe, erscheint er in seiner wahren Farbe und ich kann diese leicht mit dem Violet vergleichen.

Ich halte ferner eiu blau überfangenes Glas so über einen weissen Grund, dass es darauf im diffusen Tageslichte des grau überzogenen Himmels seinen Schlagschatten wirft. Der volle Schlagschatten, der Kernschatten, ist blau, der Halbschatten ist violet.

Ich stelle endlich viertens noch folgenden Versuch an. Ich schiebe das blau überfangene Glas so über meine halbe Pupille, dass ich den Rand desselben undeutlich sehe. So blicke ich nach dem weissen Grunde, der mir bei den früheren Versuchen gedient hat, oder naeh dem Schnee der gegenüber liegenden Dächer oder nach dem grau bedeckten Himmel; dann säumt sich der Rand mit einer schönen Lilafarbe, welche neben dem Blau röthlich erscheint. Hier hat sich auf der Netzhaut das weisse Licht, das neben dem Glase einfällt, gemischt mit dem blauen, welches durch dasselbe einfällt. Es braucht kaum erinnert zu werden, dass man es hier nicht mit einem jener farbigen Säume zu thun hat, die man bei halb bedeckter Pupille an den Grenzen von Schwarz und Weiss sieht; denn diese erscheinen aus begreiflichen Gründen an den betrachteten Gegenständen, nicht an dem Schirme, der die halbe Pupille beschattet.

Aubert äussert sich rücksichtlich des Orange nicht über den wahrscheinlichen Grund der von ihm beobachteten Erscheinung; rücksichtlich des Blau glaubt er, dass wir einer eigenthümlichen Täuschung unseres Urtheils unterliegen. Nach Helmholtz entspricht das Blau des Himmels dem Ultramarin. Aubert findet den blässeren Himmel, der in nördlichen Breiten häufiger ist als der tiefblaue, mehr grünlich. Er glaubt nur, dass die Gewohnheit diesen Himmel als hellere Abart des tiefen Ultramarinblau zu sehen, uns eine falsche Vorstellung von der Schattirung Ultramarin beigebracht habe, so dass wir das wahre hellere Ultramarinblau, weil es weniger zum Grün, folglich mehr zum Violet neigt, violet nennen.

Hierin liegt gewiss etwas richtiges und es lässt sich noch ein anderes Moment anführen, durch welches unsere Vorstellung über die Schattirung des Blau gefälscht sein kann. Die durchscheinenden blauen Pigmente haben in ganz dünner Lage nicht genau dieselbe Farbe wie in dickerer, in ersterer neigen sie mehr zum Blau, in letzterer mehr zum Indigo. Da wir nun gewohnt sind, verschieden dicke Schichten desselben durchscheinenden Pigments auf weissem

Grunde als Glieder einer und derselben Schattirung anzusehen, so kann dieser Umstand auf unsere Vorstellung von der Schattirung des Blau, beziehungsweise des Ultramarin, einen fälschenden Einfluss geübt haben.

Auch beim Gelb und Rothgelb, in Rücksicht auf welches ich Aubert's Angaben gleichfalls durch Spiegelversuche bestätigen kann, lässt sich etwas ähnliches denken. Gummigutt gibt in ganz dünnem Auftrage auf weissem Grunde ein fast grünliches Gelb, in stärkerem ein schönes reines Gelb, in dicken Massen endlich ist es goldgelb bis orange. Wer also die durch verschieden dicken Auftrag von Gummigutt zu erzielenden Farben für Glieder einer Schattirung hält, der muss erklären, dass die Farbe von einem Stück (goldgelbem) Chromgelb mit weissem Licht gemischt aus der Schattirung ausweicht und in eine andere eintritt, welche dem Orange näher liegt.

Indessen drängt sich gegen die ausschliessliche Berechtigung einer Erklärung, wie sie Aubert gegeben hat, sogleich das Bedenken auf, dass nur für das Blau eine allgemein wirkende Ursache der Täuschung nachweisbar ist, dass in Rücksicht auf Gelb und Gelbroth ur diejenigen getäuscht werden müssten, welche viel mit Farben und namentlich mit gewissen Farben umgehen und sich nach ihren hierbei gemachten Erfahrungen eine eigenthümliche Ansicht von der Nuance verschiedener Glieder einer Schattirung gebildet hätten. Dies ist aber nicht der Fall.

Ich habe junge Männer, die sich weiter nicht mit Farben beschäftigt hatten, Kern- und Halbschatten eines gelben Glases auf weissem Grunde beurtheilen lassen und ihnen erschien der Halbschatten mehr röthlich als der Kernschatten. Eben so sahen sie den auf der Retina direct entworfenen Halbschatten röthlich.

Man wird hier zunächst an eine wiederum nur speciell für das Gelb giltige Erklärung denken. Das Licht, was der blaue Himmel reflectirt, das sogenannte Luftlicht, ist bläulich und zwar von einem Blau, das mit dem Gelb des angewendeten Glases nicht genau Weiss gab, sondern einen kleinen Überschuss an Roth zeigte. Es liegt nahe, diesen als die einzige Quelle des Röthlichen im Halbschatten anzusehen. Ich habe aber die Versuche bei völlig grauem Himmel, ja beim Schneegestöber angestellt und anstellen lassen, und immer zeigte sich noch der Halbschatten vergleichungsweise röthlich. Nun haben wir aber kein Recht das Tageslicht bei grauem Himmel als

Ultramarinblau anzusehen. Es erscheint uns zwar blau im Vergleich mit Lampenlicht, aber wir haben dies bisher immer und ohne Zweifel mit Recht als eine Contrastwirkung angesehen. Wir wissen aus anderweitigen Versuchen, dass das directe Sonnenlicht gelb ist und die Lehre von der Wirkung trüber Medien zeigt uns keine Möglichkeit, dass das gelbe Licht beim Durchgange durch den trüben Wolkenschleier blau werden sollte.

Eben so glaube ich nicht, dass man hier die directe Absorption durch Wasser zu Hilfe rufen wird; denn gesetzt auch, sie wäre bei Schnee- und Regenwetter stark genug um die Farbe des Sonnenlichtes merklich gegen Blau hin zu verändern, so ist das Blau erst bei Absorption durch sehr dicke Schichten Ultramarinblau. Anfangs ist es ein Cyanblau, das meiner Schätzung nach dem angewendeten Glase ganz oder doch sehr nahezu complementär sein musste.

Wollten wir endlich dennoch annehmen, dass in diesen Versuchen das Roth durch Mischung von Goldgelb und Ultramarinblau auf der Netzhaut entstände, so würden wir eine ähnliche Erklärung für die ganz analogen Versuche mit blauen Gläsern nicht finden können: wir würden hier ausschliesslich auf eine andere Erklärung, nämlich die Aubert'sche, angewiesen sein, welche, wie wir gesehen haben, wiederum für die Versuchsresultate mit den gelben Gläsern nicht genügt.

Es lässt sich überdies nachweisen, dass die Eindrücke von Hell und Dunkel für unser Urtheil, ob Blau oder Violet nicht von entscheidendem Einflusse sind.

Ich beleuchte die Hälfte eines ultramarinblauen Papiers mit directem Sonnenlichte, während auf die andere ein Schlagschatten fällt. Niemand urtheilt, dass die bestrahlte Partie mehr zum Violet neige, sie scheint entweder derselben Schattirung anzugehören oder einer, die dem Cyanblau näher steht. Ich lehne ferner das oben erwähnte blaue Glas schräg so auf einen weissen Grund, dass ich durch dasselbe auf seinen eigenen Schlagschatten hinsehe. Dann lasse ich einen neutral grauen Grund sich darin spiegeln. Nun erscheint mir die dem Schlagschatten entsprechende Partie, die dunklere, mehr Indigo, also mehr gegen Violet hin verschoben, die andere, die hellere, mehr blau. Die Mischung von Weiss, beziehungsweise neutralem Grau, mit dem Blau in passendem Verhältniss hat also auf unser Urtheil grösseren Einfluss als der Eindruck des Helleren oder des Dunkleren.



Wir müssen desshalb suchen, ob sich nicht noch ein anderer Grund für die sonderbare Erscheinung auffinden lässt.

In einer Abhandlung über subjective Farben, habe ich bei Gelegenheit des bekannten Versuches von Dr. Smith in Fochabers nachgewiesen [1]), dass durch Sklerotica und Chorioidea Licht in das Auge eindringt und sich diffus auf der Netzhaut verbreitet, dass dieses Licht in Folge seines Durchganges durch trübe, theilweise roth gefärbte Medien roth ist, und dass es auf unser Urtheil über Farben einen merklichen Einfluss ausübt. Da jede Farbe durch dauernde Einwirkung die Erregbarkeit der Netzhaut für diese selbe Farbe herabsetzt, so wird auch die Erregbarkeit für Roth herabgesetzt sein. Dadurch, dass wir ein Auge mehr als das andere dem diffus eindringenden Lichte aussetzen, können wir in ihm die Unterempfindlichkeit für Roth vorübergehend steigern und so bemerklich machen.

Man stelle sich so neben das Fenster, dass das Licht von der Seite her einfällt, und blicke dann, indem man abwechselnd das rechte und das linke Auge schliesst auf einen weissen Grund; dann wird man bemerken, dass dem Auge an der Fensterseite das Weiss mehr blaugrün, dem andern mehr röthlich erscheint.

Man kann einen ähnlichen Versuch aber auch mit einem Auge allein anstellen. Ich mache in ein schwarzes vollkommen undurchsichtiges Papier ein rundes Loch von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Millimeter Durchmesser und bedecke damit mein eines Auge, so dass nur Licht durch das Loch und die Pupille einfällt. Nun blicke ich, indem ich das andere Auge sorgfältig mit der Hand bedecke, nach dem Schnee der gegenüber liegenden Dächer und, nachdem ich das einige Augenblicke gethan habe, ziehe ich das schwarze Papier plötzlich weg. Ich sehe dann das Weiss des Schnees, wie sich die Maler auszudrücken pflegen, besonders kalt, d. h. mit einem schwachen Stich in Blaugrüne oder Türkisenblaue. Welcher von beiden Farben er mehr angehört, lässt sich bei seiner Schwäche nicht mit Sicherheit bestimmen. Bringe ich nun, während ich noch unter diesem Eindrucke stehe, das Papier wieder vor das Auge, so erhält durch das Loch in demselben gesehen, der Schnee einen röthlichen Schimmer.

---

[1]) Denkschriften der mathem.-naturw. Cl. der kais. Akademie der Wissenschaften Bd. III. — Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie Bd. 84, Seite 418.

In Folge des temporären Abhaltens des Skleroticallichtes, erscheint mir also hier das vom Schnee reflectirte weisse Licht anders als gewöhnlich und, so weit in diesen Dingen überhaupt von Wahrheit und Täuschung die Rede sein kann, muss ich sagen, mehr der Wirklichkeit gemäss; denn das eingedrungene Skleroticallicht kann ich doch nicht als einen wesentlichen Factor des Sehens betrachten, sondern nur als ein Moment der Störung, welches bei Schwachpigmentirten, wie ich bin, in höherem, bei Starkpigmentirten in geringerem Grade vorhanden ist. Ich muss also sagen, dass das diffuse von Wolken oder Schnee reflectirte Tageslicht, welches ich für gewöhnlich weiss nenne, röthlich sei; ich muss dies um so mehr thun, als wahrscheinlich durch das temporäre Abhalten des Skleroticallichtes noch nicht die ganze Unterempfindlichkeit getilgt war, welche dasselbe im Laufe der Zeiten hervorgebracht hat [1]).

---

[1]) Es ist wohl mehr als wahrscheinlich, dass die Unterempfindlichkeit für Roth, welche Purkinje und Dove (Poggendorff's Annalen Bd. 85, Seite 397) durch Versuche festgestellt haben, mit in der Wirkung des Skleroticallichtes und des überwiegenden Roth des diffusen Tageslichtes seine Erklärung findet, obgleich die temporäre Wirkung des ersteren bei den entscheidenden Versuchen sicher sehr klein war: denn diese wurden bei sehr schwacher Beleuchtung angestellt. Wenn ausser dem Skleroticallichte und dem überwiegenden Roth des diffusen Tageslichtes noch eine andere Ursache für die von Purkinje und Dove beobachtete Unterempfindlichkeit vorhanden ist, so muss sie jedenfalls in ihrer Wirkung mit der Wirkung dieser eine gewisse Ähnlichkeit haben. Ich kann mir zweierlei Arten von Unterempfindlichkeit für eine Farbe denken. Erstens kann ich mir vorstellen, dass z. B. Roth und Blau, wenn sie mit gleichen lebendigen Kräften zur Netzhaut gelangen, nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ ungleiche Wirkungen hervorbringen, und dass das gegenseitige quantitative Verhältniss der Wirkungen innerhalb derjenigen Lichtstärken, bei denen wir deutlich und bequem sehen, von den absoluten Intensitäten des objectiven Lichtes ganz oder nahezu unabhängig ist, dass also die Wirkung von Roth bei gleichen lebendigen Kräften der auf die Netzhaut gelangenden Strahlen stets um denselben Bruchtheil geringer ausfällt als die des Blau. Eine solche Art der Unterempfindlichkeit hätte offenbar durch die Versuche von Perkinje und Dove nicht ermittelt werden können, da dieselbe nicht Ursache sein konnte, dass blaue und rothe Papiere oder Stoffe, welche bei Tage gleich hell erschienen, in der Dämmerung oder bei künstlich vermindertem Tageslichte ungleiche Helligkeit zeigten.

Ich kann mir aber zweitens auch vorstellen, dass, um mit Fechner zu reden, die Schwelle für eine Farbe höher ist als für die andere. Dann wird diejenige Farbe, welche die höhere Schwelle findet, bei geringer Intensität relativ schwächere, bei grösserer relativ stärkere Wirkung ausüben. Ein Roth, das in der Dämmerung sehr viel dunkler erscheint als ein damit verglichenes Blau, kann im vollen Tageslichte als mit ihm gleich hell erkannt werden. Gerade eine derartige Unterempfindlichkeit ist es, welche man als Folge der Einwirkung des Skleroticallichtes und des röthlichen Tageslichtes im Allgemeinen erwarten muss. Alle unsere potisiven Empfindungen

Ich bin mir wohl bewusst, dass der Begriff des Weissen ein wandelbarer, ein relativer ist[1]), aber ich kann das Tageslicht in sofern röthlich nennen, als ich annehmen muss, dass, wenn niemals Skleroticallicht in meine Augen gelangt wäre, und ich nicht schon gewohnt wäre, das Tageslicht für weiss zu halten, ein Licht das weniger Roth enthält als das Tageslicht mir bei gleicher Helligkeit und Ausbreitung weisser erscheinen würde als dieses.

Wie verträgt sich nun diese Anschauung mit der aus anderweitigen Versuchen hergeleiteten Annahme, dass das directe Sonnenlicht gelblich sei? Ich glaube gut, wenn man die ausserordentlich verschiedenen Lichtintensitäten, bei welchen jene Versuche und die meinigen angestellt sind, berücksichtigt. Weiss man doch, dass das reine Spectralroth bei steigender Lichtintensität durch Gelbroth in Weisslichgelb übergeht, es ist desshalb wohl nicht auffällig, dass auch das gemischte Sonnenlicht unter ähnlichen Umständen seine Nuance in demselben Sinne ändert.

Dass das Blau durch Zumischung von sogenanntem Weiss schon in Violet umgeändert wird, unter Umständen, unter denen wir dies sogenannte Weiss eben noch für weiss erklären, scheint mir seinen Grund zu haben in der grösseren Empfindlichkeit des Blau. Ob etwas rein weiss sei, das können wir zwar recht genau abschätzen, wenn uns ein Musterweiss zum Vergleiche gegeben ist; unsere Vorstellung vom Weiss im Allgemeinen ist aber, wie Jedermann bekannt, grossen Schwankungen unterworfen. Wenn wir eine Zeit lang durch eine nicht all zu stark gefärbte Brille gesehen haben, so halten wir dieselben Gegenstände für weiss, die wir sonst für weiss gehalten haben, und an künstlicher Beleuchtung fällt uns die Färbung

---

beruhen auf dem Heraustreten eines Theiles unseres Nervensystems aus seinem Beharrungszustande, wenn also eine mässige Erregung zum Roth schon Bestandtheil des Beharrungszustandes geworden ist, so ist es klar, dass beim Roth eine stärkere Erregung nöthig ist, um sich gleich fühlbar zu machen, als bei anderen Farben.

Zu den Erscheinungen, welche mit der Unterempfindlichkeit unserer Augen für Roth zusammenhängen, glaube ich auch die rechnen zu müssen, dass ein Gelb, welches dem Jaune 0 in Chevreul's Farbenkreise entspricht, zu einem Theile mit 9 Theilen Schwarz auf dem Farbenkreisel zusammengebracht, deutlich Grün gibt. Es scheint mir dies daher zu rühren, dass hier die Erregung zum Roth verhältnissmässig stärker abgenommen hat und dadurch die Farbe zum Grün hinübergedrängt wird.

[1]) Vergleiche meine Untersuchungen über subjective Farben. Denkschriften Bd. III, Poggendorff's Annalen Bd. 84.

derselben bei Nacht nicht so auf, wie bei Tage; weil sie eben die gemeinsame Lichtquelle für alle beleuchteten Gegenstände ist. Erst wenn wir Mond- oder Tageslicht daneben sehen, erscheint sie uns gelb. Wie sollen wir das gewöhnliche, röthliche Tageslicht nicht weiss nennen? Wir würden es weiss nennen, auch wenn es in unseren Augen kein rothes Skleroticallicht gäbe, lediglich weil das Tageslicht für uns das Licht κατ' ἐξοχήν ist, und weil wir uns von Kindheit an gewöhnt haben, es als solches zu betrachten. Wohl können wir aber das Blau unterscheiden, das durch Zumischung von röthlichem Weiss aus der Schattirung gedrängt ist, während wir das ursprüngliche Blau noch zur Vergleichung daneben haben.

Dass sich das Blau gegen Zumischung von röthlichem Weiss, besonders empfindlich erweist, erklärt sich aus seiner Stellung unter den Farben [1]). Weniger empfindlich müssen solche Farben sein, welche in Wirklichkeit oder unserer Empfindung nach schon Roth enthalten, da bei ihnen ein kleiner Zuwachs an Roth oder, richtiger gesagt, eine etwas geringere Schwächung desselben nicht bemerkt wird. Zu diesen Farben aber gehört das Violet. Unempfindlich müssen ferner die Farben Grün, Blaugrün und Grünblau sein, weil in ihnen das Complement des Roth enthalten ist und sie dasselbe neutralisiren. Zwischen dem grünlichen Blau aber und dem Violet

---

[1]) Wie sich Newton, Maxwell und Helmholtz bereits zu anderen Zwecken in der Chromatik mit Vortheil der Schwerpunktsconstruction bedient haben, so können auch wir uns ihrer bedienen, um unsere Versuchsresultate zu veranschaulichen. Denken wir uns beispielsweise ein Ellipsoid, das entstanden ist durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe und aufgehängt an dem einen Ende derselben. Wir schreiben ihm selbst keine Schwere zu, aber wir denken uns in der Peripherie seines grössten Kreises die Farben des Sonnenspectrums vertheilt und einzeln ihrer Intensität entsprechend mit solchen Gewichten wirken, dass der grösste Kreis horizontal liegt, wenn sie miteinander wirkliches Weiss geben. Denken wir uns dann die Intensitäten auf diejenigen Verhältnisse reducirt, die ihnen im Tageslichte zukommen, so soll unserer Ansicht nach der grösste Kreis sich mit der rothen Seite nach abwärts neigen, so dass er nun einen spitzen Winkel mit der Horizontalebene macht. Diese Abweichung nehmen wir nicht wahr, weil sie bereits unserem Beharrungszustande angehört. Wenn wir die sämmtlichen Intensitäten halbiren oder verdoppeln, so wird weder der Grad der Abweichung, noch das Azimuth der kleinen Axe geändert; wir glauben also immer noch Weiss zu sehen. Nun denken wir uns aber die Intensitäten so vertheilt, dass Blau das Übergewicht hat. Denken wir uns dann zu den schon vorhandenen Gewichten neue hinzu gebracht, die den factischen Intensitäten im Tageslichte proportional sind, so wird sich nicht nur der Grad der Abweichung von der Horizontalebene, sondern auch das Azimuth der kleinen Axe ändern, und das ist es, was wir als Übergang zum Violet wahrnehmen.

anderen Farben eignet. Nächst diesem habe ich am empfindlichsten, wenngleich viel weniger empfindlich, gefunden das tiefe und gesättigte Goldgelb, wie ich es als Chromgelb und als gelbes Glas anwendete, obgleich die Farbe beider Roth in beträchtlicher Menge enthält. Es liegt das darin, dass gerade an dieser Stelle der Farbenscala eine kleine Änderung des Mischungsverhältnisses schon einen merklichen Unterschied hervorbringt, und dass man hier keine Schwierigkeit hat, sich Farben von grosser Intensität zu verschaffen.

Selbst bei der Mennige lässt sich, wie ich oben erwähnt habe, noch ein Unterschied wahrnehmen, während mir dies beim Violet nicht gelang. Letzteres mag auch wohl mit darin seinen Grund haben, dass ich mir kein eigentliches Violet von grosser Intensität verschaffen konnte.

Die angewendeten Stoffe und Papiere gaben bei den vorerwähnten Versuchen violet-graue Bilder, deren Nuance sich nicht auch nur mit annähernder Genauigkeit schätzen liess. Ein violetes Glas von prachtvoller Farbe, welches ich auch versuchte, war offenbar zu roth, indem der von der Sonne beleuchtete Schnee durch dasselbe in glühendem Purpur erschien.

Dass das Violet übrigens nicht absolut unempfindlich sei, zeigt die oben erwähnte Angabe (siehe pag. 470 Anmerkung) von Chevreul, nach der die Mitte zwischen den Fraunhofer'schen Linien *G* und *H*, die sonst als Bleu violet 3 erschien, bei Zulassen von mehr diffusem Lichte als Bleu violet 4 ausgewerthet wurde.

Bei Lampen- oder Gaslicht, welches gelb ist, sind die empfindlichsten Farben Roth und Grün. Sie geben, wenn man die früher beschriebenen Versuche mit ihnen anstellt, durch Zumischung des vom Gas- oder Lampenlicht erhellten Weiss Farben, die gegen Gelb hin ausweichen. Ich habe die Versuche mit rothem Glase, rothem und grünem Papier, Blut und rothem Siegellack angestellt.

Wenn wir nun so die Erfahrung gemacht haben, dass gewisse Farben durch Zumischen dessen, was wir Weiss nennen, nicht nur blässer, sondern geradezu in ihrer Tinte verändert werden; so ist es klar, dass Complemente dieser Farben physiologisch betrachtet nicht eine einzige Ergänzungsfarbe haben, sondern eine Reihe von Ergänzungsfarben, die sich durch ihren Sättigungsgrad und zugleich durch ihre Tinte, ihre Nüance von einander unterscheiden: denn das Vio-



let, das wir in den oben erwähnten Spiegelversuchen sehen, ist die Ergänzungsfarbe zu demselben Gelb, welches als Complement des Ultramarinblau ermittelt ist, das zu eben jenen Versuchen diente.

Da nun bei der Erzeugung von Complementärfarben durch Doppelbrechung das Weiss sehr ungleich auf beide Seiten vertheilt wird, so kann auch hierin eine wesentliche Fehlerquelle für die oben mitgetheilten Bestimmungen liegen; es scheint indessen nicht, dass dieselbe eine hervorragende Rolle gespielt habe, da in der empfindlichen Region die Anomalien nicht grösser sind als anderswo [1]).

Wenn ich nun im vollen Bewusstsein der Fehler und Fehlerquellen die Tabellen *A* und *B* miteinander vergleiche, so finde ich in ihnen keinen zureichenden Grund, um auf eine wesentliche und in der Natur der Sache begründete Verschiedenheit der Contraste von den Complementärfarben zu schliessen.

Eine auffallende Abweichung zeigt sich allerdings, die sich mit einer gewissen Consequenz bei allen Beobachtern wiederholt. In der Region von Violet rouge 2 bis Violet rouge 5 weisen die Tabellen I bis VII *B* in Columne *f* höhere Ziffern auf als die Tabellen I bis VII *A*, man wird aber auch über den Werth dieser Thatsache zweifel-

[1]) Möglicher Weise hängen hiermit die Abweichungen zusammen, welche in dieser Region die Tafeln I—VI *A* von VIII und IX zeigen, da Helmholtz reine Spectralfarben mischte. Ich muss indessen hinzufügen, dass die Versuche von Maxwell, der mit Pigmenten experimentirte, auch nicht ganz mit I bis VI *A* übereinstimmen. Er musste dem Ultramarin auf dem Farbenkreisel noch Smaragdgrün beigesellen, um das Complement des hellen Chromgelbs zu erhalten. Helles Chromgelb wurde von mir und meinen Mitbeobachtern als jaune 0, ausnahmsweise als jaune 1 ausgewerthet. Ultramarin von Guimet bestimmte Chevreul als bleu 3 (l. c. 239). Die Farbengleichung von Maxwell lautet:

34 pale chrome + 55 ultramarine + 12 emeraldgreen = 37 snow white + 63 black

(Transactions of the royal soc. of Edinb. XXI. 281.)

Aubert hat, indem er Ultramarin, Chromgelb und Schweinfurther Grün anwendete, mit der Drehscheibe eine ähnliche Gleichung wie Maxwell erhalten, nur war die Menge Grün, welche er zusetzen musste, um sehr viel kleiner, was sehr wohl in einer Verschiedenheit der angewendeten Pigmente seinen Grund haben kann. Seine Gleichung lautet:

197 Blau + 146 Gelb + 17 Grün = 159 Weiss + 201 Schwarz.

(Aubert Physiologie der Netzhaut, Breslau, 1865, S. 168.) Auch ich fand, dass Jaune 0 und Bleu 3, wie sie mir in zwei Papieren repräsentirt sind, auf dem Farbenkreisel noch eine röthliche Tinte geben.

haft, wenn man sieht, dass die Zahlen der Tabellen I—VII *B* sich hier ganz gut den Zahlen anschliessen, welche die nach den von Helmholtz bestimmten Complementen entworfenen Tafeln VIII und IX für Rouge 0 und Rouge 1 ausweisen [1]).

Gerade in derjenigen Region, in welcher ich früher auffällige Unterschiede zwischen Contrast- und Complementärfarben zu finden geglaubt hatte, in der Region Ultramarin-Gelb, sprachen die Versuche im Grossen und Ganzen genommen und abgesehen von einzelnen Ausnahmen, die in den Fehlerquellen hinreichende Erklärung finden, laut für die Gleichheit.

Die Zweifel, die mich zu diesen Versuchen getrieben hatten, waren entstanden durch ein hellgelbes Papier, auf dem eine weisse Schrift ausgespart war. Diese färbte sich durch Contrast violet. Es schien mir, dass die Contrastfarbe in Übereinstimmung mit dem richtigen Complemente hätte mehr blau, weniger röthlich sein müssen. Ich glaube aber, dass diese Abweichung jetzt hinreichend erklärt ist, wenn wir bedenken, dass hier die Contrastfarbe auf weissem Grunde erschien und uns die Erfahrungen zurückrufen, die wir so eben in Rücksicht auf die Mischungsfarbe von Ultramarin und Weiss gemacht haben. Das Weiss konnte hier seinen Einfluss stärker geltend machen als in den Versuchen, nach welchen unsere Tabellen entworfen sind, denn hier sah das Netzhautfeld, auf welchem sich der Contrast entwickeln sollte, direct und ausschliesslich auf Weiss, in jenen Versuchen aber sah es auf Schwarz und ihm wurde nur eine mässige Menge weissen Lichtes zur Entwickelung des Contrastes durch Spiegelung zugesendet. Überdies zeigt sich mir die Farbe des jetzt freilich sehr verblichenen Papiers mit der

---

[1]) Nach Beendigung der Arbeit kam noch ein rothes Papier von besonders schöner und kräftiger Farbe in meine Hände. Ich werthete es aus als rouge 1 und seinen Contrast als vert bleu 1, was mit absoluter Genauigkeit den nach den Messungen von Helmholtz berechneten Daten der Tabelle IX entspricht. Nicht ganz so stimmen damit die Angaben meiner Mitarbeiter. Es fanden

Farbe.	Contrast.
Dr. Babuchin Rouge 1.	Vert 3.
Dr. Basch Rouge 1.	Vert 5.
Hr. Czerny Rouge 2.	Vert bleu 3.
Hr. Mayer Rouge 2.	Vert bleu 0.
Dr. Stricker Rouge 2.	Vert 1.
Dr. Wywodzoff Rouge 3.	Vert bleu 3.



Chevreul'schen Farbentafel verglichen als Jaune 1, das auf Tafel VIII zwar das durch Rechnung bestimmte monochromatische Complement Bleu 0 zeigt, dem aber die Tafeln II *A* und III *A* die empirisch ausgewertheten Complemente Bleu violet 0 und Bleu violet 1 geben.

Ich glaubte ferner beobachtet zu haben, dass das Nachbild, welches man vom Ultramarinblau erhält, mehr orange sei als das Complement desselben; aber ich hatte dies Nachbild auf weissem Grunde beobachtet und so bietet sich denn wieder dieselbe Erklärung dar. Das Gelb war durch den weissen Grund röthlicher geworden. Diese Art des Versuches bietet übrigens noch eine andere Quelle des Irrthums. Das gelbe Nachbild wird sehr bald nach seinem Erscheinen röther als es vorher war, man täuscht sich desshalb über die wahre Farbe, wenn man die des ersten Momentes nicht wohl beachtet.

Erscheinungen dieser Art bieten, wie ich glaube, zugleich den Schlüssel zu einer sich durch die ganze Chromatik bis in die neueste Zeit fortspinnenden Erscheinung. Es wird dem Leser nicht entgangen sein, dass im Chevreul'schen Farbenkreise diejenigen Farben, welche Complemente und Contraste sind, nicht gleichmässig diametral einander gegenüberstehen. Das lehren einhellig meine eigenen und die fremden von mir angeführten Beobachtungen. Ein Blick auf die Figuren, ein Blick auf die Tabellen genügt, um dies sofort einleuchtend zu machen. Wenn man nun aber alle übrigen älteren und neueren Werke über Chromatik und ihre Farbenkreise und Diagramme ansieht, in welchen angeblich die Contrastfarben einander gegenüber gestellt sind, so findet man sie dem Chevreul'schen Farbenkreise ähnlich, nur weniger schön und vollkommen ausgeführt. Man hatte sechs Farben anzuordnen, in die man den Farbenkreis getheilt hatte: Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau und Violet. Schon die Zahl und Reihenfolge verführte Roth und Grün, Orange und Blau, Gelb und Violet zu Gegensätzen zu machen. Man hielt sich überdies durch die Erfahrungen der Maler überzeugt, dass Gelb und Blau nicht Gegensätze sein könnten, denn diese gaben ja (als Pigmente gemischt) mit einander Grün. Nun legte man ein blaues Papier auf ein weisses und beobachtete ein orangefarbenes Nachbild, oder man beobachtete von Gelb, das man noch nicht als grüngelb bezeichnen konnte, einen entschieden violeten

Contrast und fand so seine Ansichten über die Contrastfarben vollkommen bestätigt, während sie, indem man den gesehenen blassen Farben gesättigte derselben Schattirung substituirte, in der That zur Aufstellung von Diagrammen führten, die sich nicht rechtfertigen lassen.

Andererseits aber darf man nicht verkennen, dass auch die Art und Weise, wie ich meine Tabellen construirt habe, angefochten werden kann.

Die erzeugende Farbe war ausgewerthet worden, indem man das Papier direct mit dem Chevreul'schen Farbenkreise verglich. Der katoptrisch gesehene Ring, der im Versuche zur Vergleichung neben dem complementärgefärbten stand oder denselben schnitt, zeigte auch dieselbe Farbe oder doch nahezu dieselbe Farbe, wie das Papier, weil hier kein anderes weisses Licht hinzugefügt wurde als die geringe Menge, welche der schwarze Ring auf dem weissen Schirm reflectirte. Anders aber verhielt es sich mit der übrigen Fläche: denn hier wurde der Farbe die ganze Menge des Weiss beigemischt, welche vom weissen Schirm auf die Glasplatte und von dieser in das Auge geworfen wurde. Auf diesen Grund war zwar die Aufmerksamkeit des Beobachters nicht gerichtet, aber er war es doch, der durch den Masseneindruck des farbigen Lichtes diejenige Verschiebung in seinem Bewusstsein hervorbrachte, welche ihm die Contrastfarbe vortäuschte. Die Farbe dieses Grundes nun ist abgesehen von Helligkeit und Sättigung im gewöhnlichen physikalischen Sinne auch die Farbe, welche ich zu Anfang des Versuches auswerthete, denn sie ist aus ihr entstanden durch Zumischung von sogenanntem Weiss; im physiologischen Sinne ist sie es aber durchaus nicht immer. Man nehme z. B. an, ich habe zu dem Versuche ein blaues Papier verwendet, dessen Farbe mit Bleu 3 (Ultramarin) ausgewerthet wurde, und habe als Contrastfarbe erhalten Orangé jaune 5; so war im Augenblicke des Versuches der Grund, auf dem die Ringe erschienen, von einer blassen Lilafarbe, die sich in der Schattirung des Ultramarins nicht unterbringen lässt. Sage ich nun die Empfindung Bleu 3 habe mir hier den Contrast Orangé jaune 5 hervorgebracht, so sage ich etwas unrichtiges aus; denn in der That war es die Empfindung der erwähnten Lilafarbe. Ich kann nur folgenden Schluss machen, durch den allein meine Tabellen gerechtfertigt sind. Die Ergänzungsfarben für Ultramarin- und die erwähnte

Lilafarbe sind dieselben, weil sich beide physikalisch von einander nur durch einen Antheil Weiss unterscheiden, folglich verhält sich die gefundene Contrastfarbe zu den Complementen beider gleich. Darf ich also aussagen, sie falle in die Reihe der Complemente des Ultramarins, so darf ich auch aussagen sie falle in die Reihe der Complemente der erwähnten Lilafarbe, welche beim Versuche die erzeugende Farbe im eigentlichen Sinne des Wortes war. Hätte ich die eigentliche erzeugende Farbe so bestimmt, dass ich versucht hätte, sie trotz der Helligkeitsdifferenz so gut als möglich direct im Chevreul'schen Farbenkreise auszuwerthen, so würde ich in's Bleu violet hineingerathen sein. Ich würde eben den schon vorhin verpönten Fehler begangen haben, einer blassen Farbe eine mehr gesättigte zu substituiren, welche zwar unserer Empfindung nach derselben Schattirung angehört, deren Ergänzungsfarben aber in der That andere sind, als die der blassen Farbe.

Es war nun für mich von Interesse die gesättigten Farben direct als erzeugende wirken zu lassen, während zugleich das weisse Licht, in dem der simultane Contrast hervortreten sollte, schwach genug war, um keine zu blasse Contrastfarbe zu geben, und dann zu urtheilen, ob auf diesem Wege in der That Contraste von denselben Tinten, wie die Complementärfarben erzeugt werden, oder von anderen. Ich bin indessen an den Schwierigkeiten der bezüglichen Versuche gescheitert.

Es gelang mir nicht unter diesen Bedingungen durch den simultanen Contrast Farben zu erzeugen, welche hinreichend gesättigt gewesen wären, um auch nur mit annähernder Genauigkeit in Chevreul's Farbenkreise ausgewerthet zu werden.

Ich musste mich desshalb mit den bisher beschriebenen Versuchen begnügen.

Blicken wir auf ihre Resultate zurück, so führen sie zu Anschauungen über die Complementär- und Ergänzungsfarben, welche sich folgendermassen zusammenfassen lassen:

1. Jede Farbe hat nicht eine Ergänzungsfarbe, sondern eine Reihe von Ergänzungsfarben, welche sich von einander durch ihren Gehalt an Weiss unterscheiden. Man kann sich diese Reihe durch successives Hinzufügen von Weiss entstanden denken, aus derjenigen monochromatischen (beziehungsweise für die Region des Purpur bichromatischen) Farbe, welche das einfachste Complement der Grundfarbe bildet.

Die Glieder dieser Reihen gehören unserer Empfindung nach nicht immer einer Schattirung an, sondern gehen mit zunehmender Blässe in Schattirungen von anderen Tinten über. So wird Ultramarinblau bei Zusatz von Weiss in Violetblau und Lilafarbe verändert, es wird also mehr röthlich und dasselbe ist auch, wenn gleich in schwächerem Grade bei Goldgelb und Orange bemerkbar.

2. Dies rührt daher, dass das Tageslicht, welches wir weiss nennen, nicht in Wahrheit weiss, sondern hellroth ist, indem diffuses Tageslicht in seiner unveränderten Zusammensetzung zu Blau gefügt, dasselbe gegen Violet verschiebt, zu Gelb oder Orange gefügt, dasselbe gegen Roth verschiebt; ebenso wie das gelbe Gas- oder Lampenlicht in unveränderter Zusammensetzung zu Roth oder Grün gefügt, beide gegen Gelb verschiebt.

3. Die Farben durch simultanen Contrast scheinen, wenn man von einer und derselben Grundfarbe ausgeht, denselben Reihen anzugehören, wie die Ergänzungsfarben; aber es lassen sich durch den Versuch stets nur einzelne oder einige Glieder dieser Reihen zur Anschauung bringen. Es ist wahrscheinlich, dass die bis jetzt bemerkten Unterschiede zwischen Contrast- und Ergänzungsfarben, so weit sie nicht auf blossen Beobachtungsfehlern beruhen, sich darauf zurückführen lassen, dass die verglichenen Farben verschiedenen Gliedern einer und derselben Reihe entsprachen.

I.

A.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
8	Rouge orangé 2	Vert bleu 0	42	44	2
21	Orangé jaune 3	Bleu 0	48	57	9
23	Orangé jaune 5	Bleu 2	50	59	9
26	Jaune 2	Bleu 5	53	62	9
29	Jaune 5.	Violet 0	60	65	5
30	Jaune vert 0	Violet 1	61	66	5
35	Jaune vert 5	Violet rouge 1	67	71	4
35	Jaune vert 5	Violet rouge 2	68	71	3
36	Vert 0	Violet rouge 4	70	72	2
42	Vert bleu 0	Rouge orangé 2	8	6	— 2
48	Bleu 0	Orangé jaune 3	21	12	— 9
50	Bleu 2	Orangé jaune 5	23	14	— 9
53	Bleu 5	Jaune 2	26	17	— 9
61	Violet 1	Jaune vert 0	30	25	— 5
67	Violet rouge 1	Jaune vert 5	35	31	— 4
68	Violet rouge 2	Jaune vert 5	35	32	— 3
70	Violet rouge 4	Vert 0	36	34	— 2

I.

B.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
3	Rouge 3	Vert 2	38	39	1
7	Rouge orangé 1	Vert bleu 3	45	43	— 2
11	Rouge orangé 5	Vert bleu 3	45	47	2
12	Orangé 0	Vert bleu 5	47	48	1
20	Orangé jaune 2	Bleu 0	48	56	8
24	Jaune 0	Bleu 5	53	60	7
24	Jaune 0	Bleu violet 0	54	60	6
25	Jaune 1	Bleu violet 4	58	61	3
33	Jaune vert 3	Bleu violet 4	58	69	11
36	Vert 0	Violet rouge 1	67	72	5
37	Vert 1	Violet rouge 3	69	1	4
49	Bleu 1	Orangé jaune 5	23	13	—10
50	Bleu 2	Jaune 1	25	14	—11
59	Bleu violet 5	Jaune 3	27	23	— 4
70	Violet rouge 4	Vert 5	41	34	— 7
71	Violet rouge 5	Vert 5	41	35	— 6

VII.

A.

a	b	c	d	e	f
11	Rouge orangé 5	Vert bleu 5	47	47	0
21	Orangé jaune 3	Bleu 0	48	57	9
23	Orangé jaune 5	Bleu 0	48	59	11
23	Orangé jaune 5	Bleu 1	49	59	10
24	Jaune 0	Bleu 0	48	60	12
27	Jaune 3	Bleu violet 1	55	63	8
30	Jaune vert 0	Bleu violet 5	59	66	7
30	Jaune vert 0	Violet rouge 1	67	66	— 1
32	Jaune vert 2	Violet 3	63	68	5
32	Jaune vert 2	Violet rouge 0	66	68	2
32	Jaune vert 2	Violet rouge 2	68	68	0
32	Jaune vert 2	Violet rouge 3	69	68	— 1
33	Jaune vert 3	Violet rouge 4	70	69	— 1
35	Jaune vert 5	Violet rouge 4	70	71	1
47	Vert bleu 5	Rouge orangé 5	11	11	0
48	Bleu 0	Orangé jaune 3	21	12	— 9
48	Bleu 0	Orangé jaune 5	23	12	—11
48	Bleu 0	Jaune 0	24	12	—12
49	Bleu 1	Orangé jaune 5	23	13	—10
55	Bleu violet 1	Jaune 3	27	19	— 8
59	Bleu violet 5	Jaune vert 0	30	23	— 7
63	Violet 3	Jaune vert 2	32	27	— 5
66	Violet rouge 0	Jaune vert 2	32	30	— 2
67	Violet rouge 1	Jaune vert 0	30	31	1
68	Violet rouge 2	Jaune vert 2	32	32	0
69	Violet rouge 3	Jaune vert 2	32	33	1
70	Violet rouge 4	Jaune vert 3	33	34	1
70	Violet rouge 4	Jaune vert 5	35	34	— 1

II.

B.

a	b	c	d	e	f
4	Rouge 4	Vert 4	40	40	0
8	Rouge orangé 2	Vert bleu 1	43	44	1
10	Rouge orangé 4	Vert 5	41	46	5
20	Orangé jaune 2	Vert bleu 5	47	56	9
25	Jaune 1	Bleu violet 5	59	61	2
26	Jaune 2	Bleu violet 3	57	62	5
34	Jaune vert 4	Violet 3	63	70	7
36	Vert 0	Violet 5	65	72	7
51	Bleu 3	Orangé jaune 4	22	15	— 7
52	Bleu 4	Orangé jaune 3	21	16	— 5
56	Bleu violet 2	Jaune vert 4	34	20	—14
70	Violet rouge 4	Vert 2	38	34	— 4
71	Violet rouge 5	Vert 5	41	35	— 6

III.

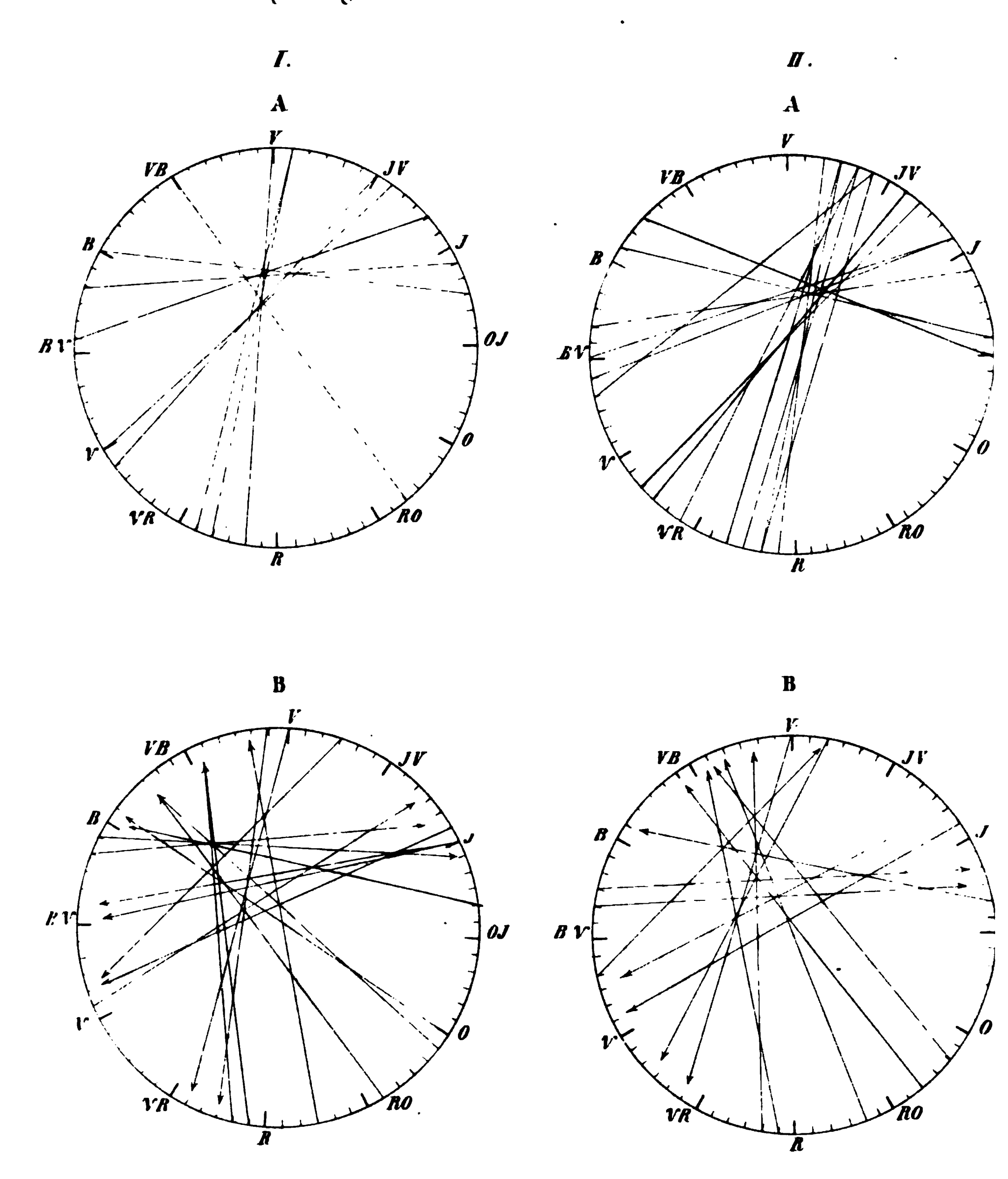
A.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
9	Rouge orangé 3	Vert bleu 3	45	45	0
17	Orangé 5	Vert bleu 5	47	53	6
20	Orangé jaune 2	Bleu 0	48	56	8
21	Orangé jaune 3	Bleu 0	48	57	9
25	Jaune 1	Bleu violet 1	55	61	6
27	Jaune 3	Bleu violet 3	57	63	6
28	Jaune 4	Violet 0	60	64	4
29	Jaune 5	Violet 3	63	65	2
35	Jaune vert 5	Violet rouge 2	68	71	3
36	Vert 0	Violet rouge 0	66	72	6
37	Vert 1	Violet rouge 1	67	1	6
38	Vert 2	Violet rouge 2	68	2	6
45	Vert bleu 3	Rouge orangé 3	9	9	0
46	Vert bleu 5	Orangé 5	17	11	— 6
48	Bleu 0	Orangé jaune 2	20	12	— 8
48	Bleu 0	Orangé jaune 3	21	12	— 9
55	Bleu violet 1	Jaune 1	25	19	— 6
57	Bleu violet 3	Jaune 3	27	21	— 6
60	Violet 0	Jaune 4	28	24	— 4
63	Violet 3	Jaune 5	29	27	— 2
66	Violet rouge 0	Vert 0	36	30	— 6
67	Violet rouge 1	Vert 1	37	31	— 6
68	Violet rouge 2	Jaune vert 5	35	32	— 3
68	Violet rouge 2	Vert 2	38	32	— 6

III.

B.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
0	Rouge 0	Vert 4	40	36	— 4
5	Rouge 5	Vert bleu 0	42	41	— 1
9	Rouge orangé 3	Vert bleu 3	45	45	0
11	Rouge orangé 5	Vert bleu 4	46	47	1
20	Orangé jaune 2	Vert bleu 5	47	56	9
24	Jaune 0	Bleu 2	50	60	10
26	Jaune 2	Bleu violet 2	56	62	6
33	Jaune vert 3	Violet 4	64	69	5
36	Vert 0	Violet rouge 4	70	72	2
38	Vert 2	Violet rouge 4	70	2	4
50	Bleu 2	Orangé jaune 2	20	14	— 6
51	Bleu 3	Orangé jaune 5	23	15	— 8
58	Bleu violet 4	Jaune 5	29	22	— 7
70	Violet rouge 4	Vert 5	41	34	— 7


I.
A
V
VB
JV
B
J
BV
OJ
V
O
VR
RO
R
II.
A
V
VB
JV
B
J
BV
V
O
VR
RO
R
B
V
VB
JV
B
J
BV
OJ
V
O
VR
RO
R
B
VB
JV
B
J
BV
V
O
VR
RO
R

IV.

B.

a	b	c	d	e	f
6	Rouge orangé 0	Vert 5	41	42	1
9	Rouge orangé 3	Vert bleu 4	46	45	— 1
11	Rouge orangé 5	Vert bleu 4	46	47	1
20	Orangé jaune 2	Vert bleu 2	44	56	12
24	Jaune 0	Bleu 2	50	60	10
26	Jaune 2	Bleu violet 0	54	62	8
35	Jaune vert 5	Violet 2	62	71	9
37	Vert 1	Violet rouge 3	69	1	4
37	Vert 1	Violet rouge 4	70	1	3
51	Bleu 3	Orangé jaune 2	20	15	— 5
51	Bleu 3	Orangé jaune 5	23	15	— 8
57	Bleu violet 3	Jaune vert 5	35	21	—14
70	Violet rouge 4	Vert 2	38	34	— 4
71	Violet rouge 5	Vert bleu 2	44	35	— 9

V.

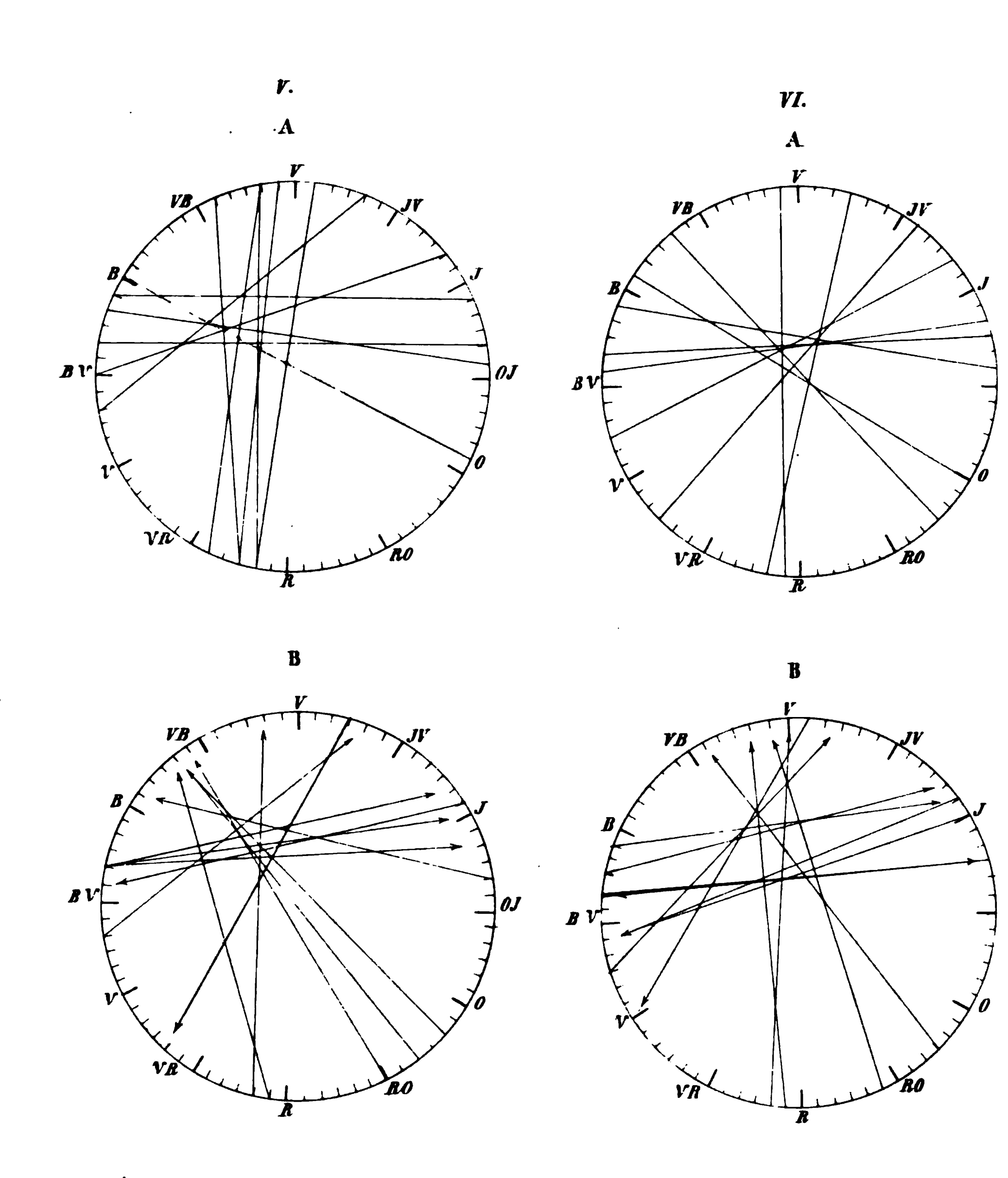
A.

a	b	c	d	e	f
13	Orangé 1	Bleu 0	48	49	1
19	Orangé jaune 1	Bleu 2	50	55	5
20	Orangé jaune 2	Bleu 4	52	56	4
23	Orangé jaune 5	Bleu 1	49	59	10
26	Jaune 2	Bleu violet 0	54	62	8
32	Jaune vert 2	Bleu violet 2	56	68	12
35	Jaune vert 5	Violet rouge 4	70	71	1
37	Vert 1	Violet rouge 3	69	1	4
38	Vert 2	Violet rouge 1	67	2	7
38	Vert 2	Violet rouge 4	70	2	4
41	Vert 5	Violet rouge 3	69	5	8
48	Bleu 0	Orangé 1	13	12	— 1
49	Bleu 1	Orangé jaune 5	23	13	—10
50	Bleu 2	Orangé jaune 1	19	14	— 5
52	Bleu 4	Orangé jaune 2	20	16	— 4
54	Bleu violet 0	Jaune 2	26	18	— 8
56	Bleu violet 2	Jaune vert 2	32	20	—12
67	Violet rouge 1	Vert 2	38	31	— 7
69	Violet rouge 3	Vert 1	37	33	— 4
69	Violet rouge 3	Vert 5	41	33	— 8
70	Violet rouge 4	Jaune vert 5	35	34	— 1
70	Violet rouge 4	Vert 2	38	34	— 4

V.

B.

a	b	c	d	e	f
6	Rouge orangé 0	Vert bleu 1	43	42	— 1
8	Rouge orangé 2	Vert bleu 2	44	44	0
10	Rouge orangé 4	Vert bleu 2	44	46	2
20	Orangé jaune 2	Vert bleu 5	47	56	9
25	Jaune 1	Bleu 5	53	61	8
33	Jaune vert 3	Violet 4	64	69	5
52	Bleu 4	Orangé jaune 4	22	16	— 6
52	Bleu 4	Jaune 0	24	16	— 8
52	Bleu 4	Jaune 2	26	16	—10
56	Bleu violet 2	Jaune vert 2	32	20	—12
70	Violet rouge 4	Vert 2	38	34	— 4
71	Violet rouge 5	Ve t bleu 2	44	35	— 9



Aus d. k. k. Hof u. Staatsdruckerei.

Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. LI. Bd. II. Abth. 1865.

VI.

B.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
5	Rouge 5	Vert 1	37	41	4
9	Rouge orangé 3	Vert 5	41	45	4
21	Orangé jaune 3	Bleu 4	52	57	5
24	Jaune 0	Bleu violet 1	55	60	5
25	Jaune 1	Bleu violet 1	55	61	6
35	Jaune vert 5	Violet 0	60	71	11
49	Bleu 1	Jaune 1	25	13	—12
51	Bleu 3	Jaune 2	26	15	—11
52	Bleu 4	Orangé jaune 3	21	16	— 5
57	Bleu violet 3	Jaune vert 3	33	21	—12
70	Violet rouge 4	Vert 0	36	34	— 2
71	Violet rouge 5	Vert 2	38	35	— 3

VII.

A.

a	b	c	d	e	f
11	Rouge orangé 5	Vert bleu 5	47	47	0
21	Orangé jaune 3	Bleu 0	48	57	9
23	Orangé jaune 5	Bleu 0	48	59	11
23	Orangé jaune 5	Bleu 1	49	59	10
24	Jaune 0	Bleu 0	48	60	12
27	Jaune 3	Bleu violet 1	55	63	8
30	Jaune vert 0	Bleu violet 5	59	66	7
30	Jaune vert 0	Violet rouge 1	67	66	— 1
32	Jaune vert 2	Violet 3	63	68	5
32	Jaune vert 2	Violet rouge 0	66	68	2
32	Jaune vert 2	Violet rouge 2	68	68	0
32	Jaune vert 2	Violet rouge 3	69	68	— 1
33	Jaune vert 3	Violet rouge 4	70	69	— 1
35	Jaune vert 5	Violet rouge 4	70	71	1
47	Vert bleu 5	Rouge orangé 5	11	11	0
48	Bleu 0	Orangé jaune 3	21	12	— 9
48	Bleu 0	Orangé jaune 5	23	12	—11
48	Bleu 0	Jaune 0	24	12	—12
49	Bleu 1	Orangé jaune 5	23	13	—10
55	Bleu violet 1	Jaune 3	27	19	— 8
59	Bleu violet 5	Jaune vert 0	30	23	— 7
63	Violet 3	Jaune vert 2	32	27	— 5
66	Violet rouge 0	Jaune vert 2	32	30	— 2
67	Violet rouge 1	Jaune vert 0	30	31	1
68	Violet rouge 2	Jaune vert 2	32	32	0
69	Violet rouge 3	Jaune vert 2	32	33	1
70	Violet rouge 4	Jaune vert 3	33	34	1
70	Violet rouge 4	Jaune vert 5	35	34	— 1

VII.

B.

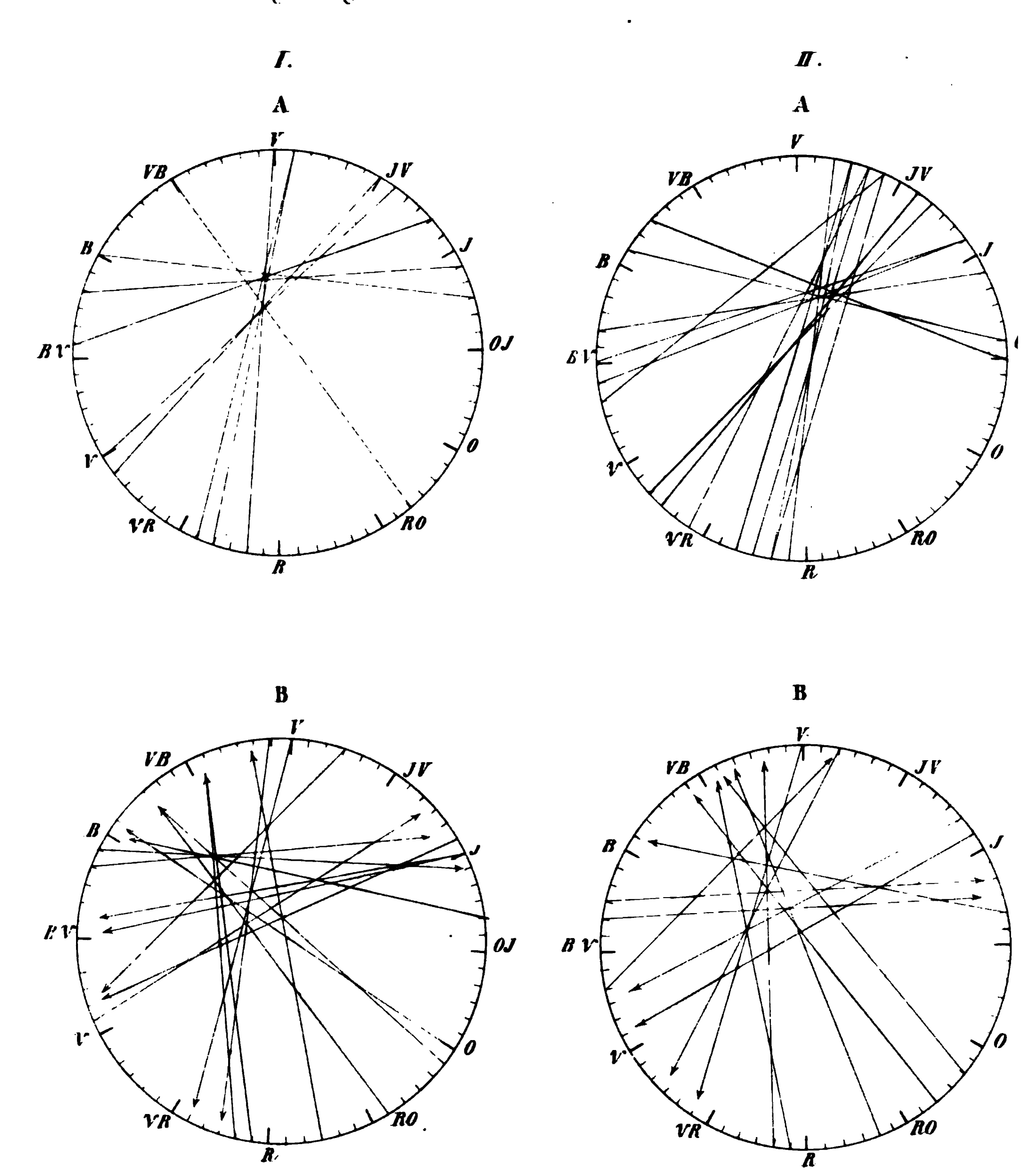
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
0	Rouge 0	Vert 3	39	36	— 3
5	Rouge 5	Vert bleu 0	42	41	— 1
9	Rouge orangé 3	Vert bleu 2	44	45	1
12	Orangé 0	Vert bleu 2	44	48	4
21	Orangé jaune 3	Bleu 5	53	57	4
24	Jaune 0	Bleu violet 5	59	60	1
25	Jaune 1	Bleu violet 1	55	61	6
28	Jaune 4	Violet 1	61	64	3
35	Jaune vert 5	Violet rouge 1	67	71	4
36	Vert 0	Violet 4	64	72	8
49	Bleu 1	Jaune 0	24	13	—11
52	Bleu 4	Jaune 0	24	16	— 8
60	Violet 0	Jaune 4	28	24	— 4
71	Violet rouge 5	Vert bleu 1	43	35	— 8

VIII.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
0	Rouge 0	Vert bleu 1	43	36	— 7
9	Rouge orangé 3	Vert bleu 2	44	45	1
20	Jaune orangé 2	Vert bleu 3	45	56	11
25	Jaune 1	Bleu 0	48	61	13
28	Jaune 4	Bleu 3	51	64	13
29	Jaune 5	Bleu 4	52	65	13
29	Jaune 5	Bleu violet 3	57	65	8
43	Vert bleu 1	Rouge 0	0	7	7
44	Vert bleu 2	Rouge orangé 3	9	8	— 1
45	Vert bleu 3	Jaune orangé 2	20	9	—11
48	Bleu 0	Jaune 1	25	12	—13
51	Bleu 3	Jaune 4	28	15	—13
52	Bleu 4	Jaune 5	29	16	—13
57	Bleu violet 3	Jaune 5	29	21	— 8

IX.

a	b	c	d	e	f
1	Rouge 1	Vert bleu 1	43	37	— 6
8	Rouge orangé 2	Vert bleu 2	44	44	0
20	Orangé jaune 2	Vert bleu 3	45	56	11
23	Orangé jaune 5	Bleu 0	48	59	11
27	Jaune 3	Bleu 3	51	63	12
28	Jaune 4	Bleu 4	52	64	12
29	Jaune 5	Bleu violet 3	57	65	8
43	Vert bleu 1	Rouge 1	1	7	6
44	Vert bleu 2	Rouge orangé 2	8	8	0
45	Vert bleu 3	Orangé jaune 2	20	9	—11
48	Bleu 0	Orangé jaune 5	23	12	—11
51	Bleu 3	Jaune 3	27	15	—12
52	Bleu 4	Jaune 4	28	16	—12
57	Bleu violet 3	Jaune 5	29	21	— 8



Aus d. k. k. Hof u. Staatsdruckerei.



III. IV.

A A

V VB JV B J BV OJ V O VR RO R

V VB JV B BV V VR RO R

B B

V VB JV B J BV OJ V O VR RO R

V VB JO B BV V VR RO R

Aus d.k.k Hof u. Staatsdr.



V.

A

V VB JV B J BV OJ V O VR RO R

B

V VB JV B J BV OJ V O VR RO R

VI.

A

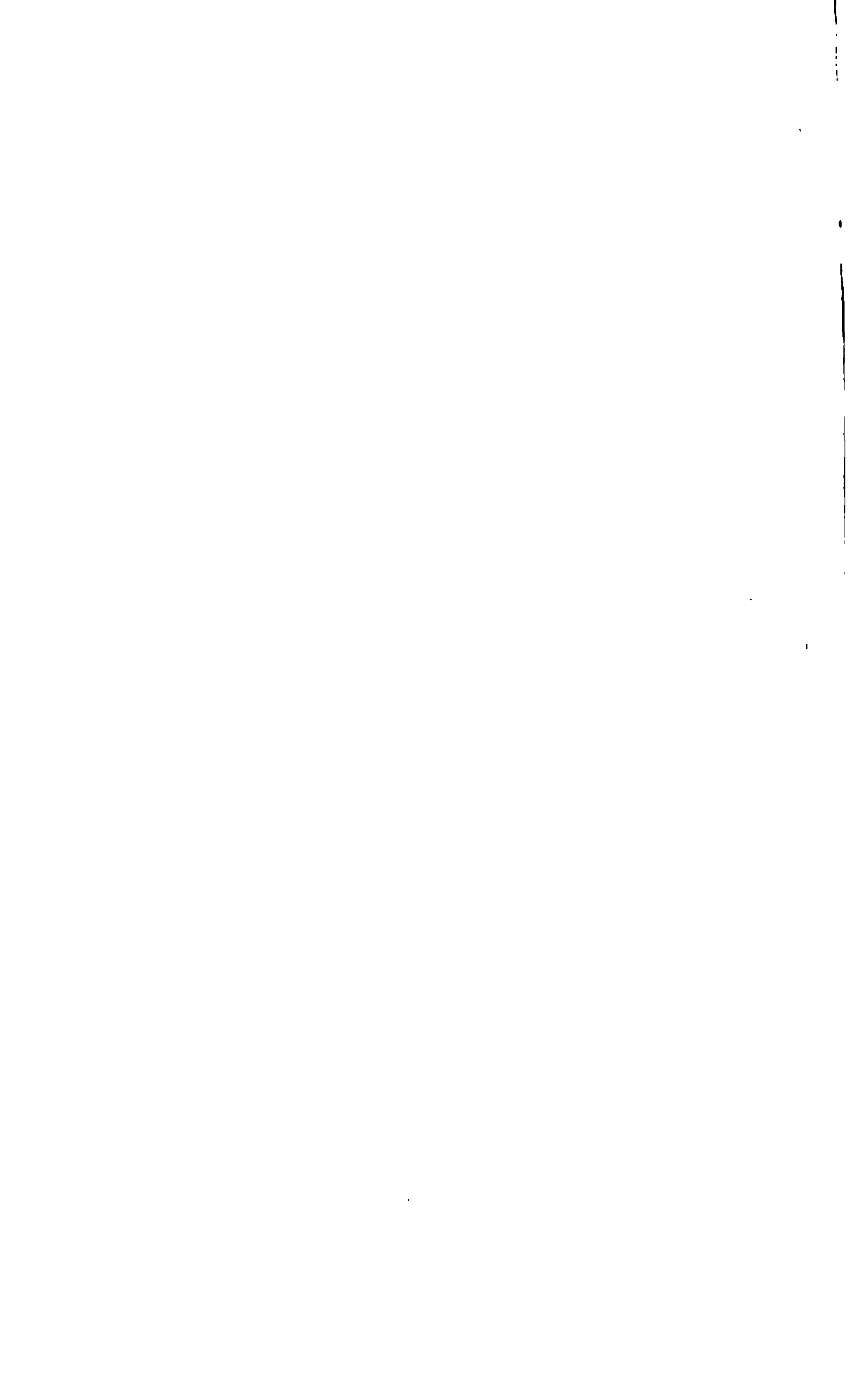
V VB JV B BV V VR RO R

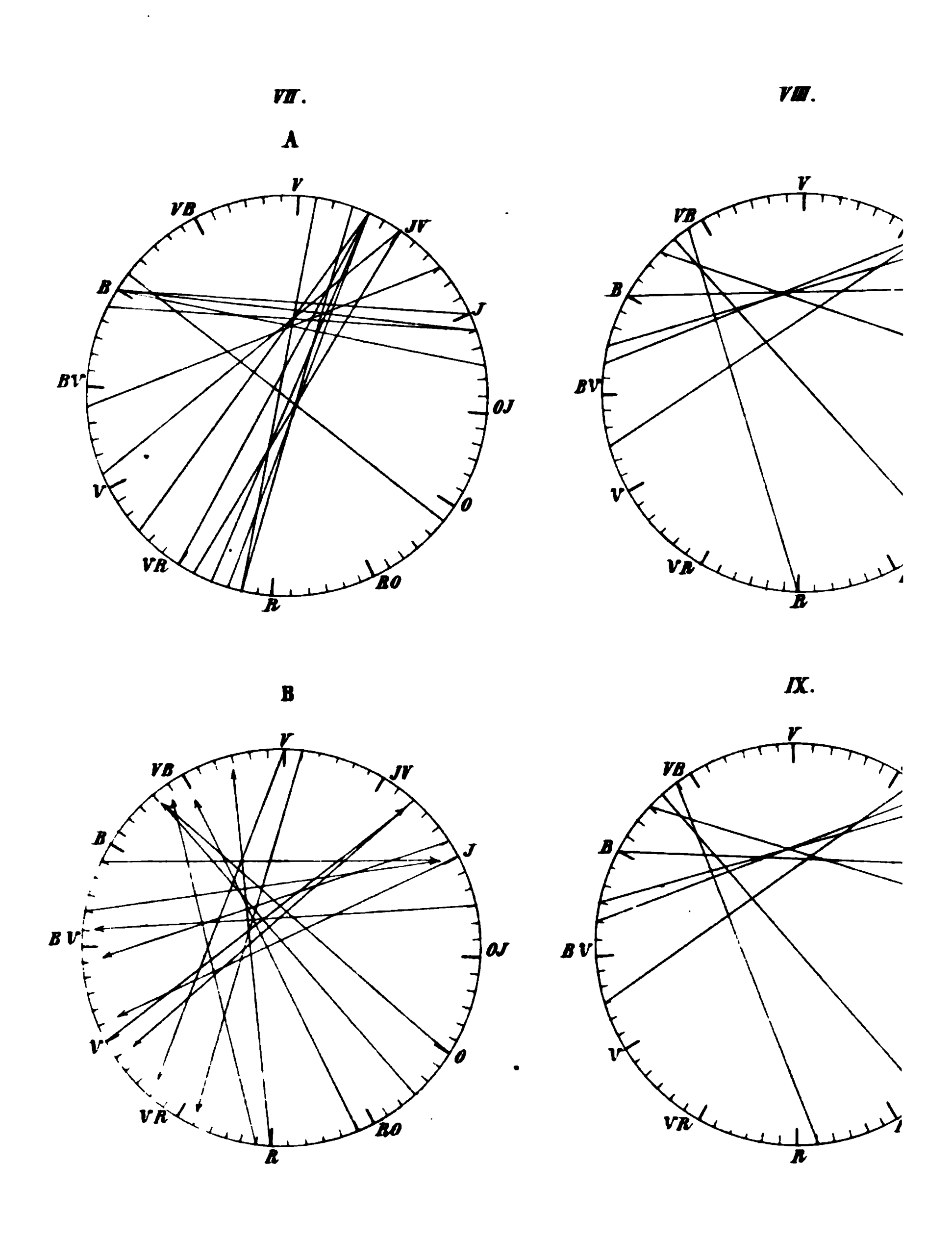
B

V VB JV B BV V VR RO R

Aus d. k. k. Hof u. Staatsdruck






VII.
A
V
VB
JV
B
J
BV
OJ
V
O
VR
RO
R
VIII.
V
VB
B
BV
V
VR
R
B
V
VB
JV
B
J
BV
OJ
V
O
VR
RO
R
IX.
V
VB
B
BV
V
VR
R

X.

Couleurs d'un spectre solaire refracté par un prisme de sulfure de carbone comparées aux types du plan circulaire de la construction chromato-hemisphérique.

A — / *a* —	5 violet rouge	entre *A* et *B*	. . . .	5 violet rouge
B — / *C* —	rouge	entre *B* et *C*	. . . .	rouge
		entre *C* et *D*		
	1 rouge		tangent à *C* . .	1 rouge
	2 rouge		à 1/4 de *C* . .	2 rouge
	5 rouge		à 1/2 de *C* . .	5 rouge
	rouge orangé		à 3/4 de *C* . .	4 rouge orangé
D	2 orangé		tangent à *D* . .	2 orangé,
		entre *D* et *E*		
	5 orange		tangent à *D* . . .	5 orangé
	jaune		à 1/6 de *D* . . .	jaune
	3 jaune		à 1/4 de *D* . . .	3 jaune
	4 jaune		à 1/3 de *D* . . .	4 jaune
	jaune vert		à 2/3 de *D* . . .	jaune vert
	2 jaune vert		à 3/4 de *D* . . .	2 jaune vert
	3 jaune vert		à 5/6 de *D* . . .	3 jaune vert
E —	4 jaune vert	entre *E* et *b*	tangent à *E* . . .	4 jaune vert
	vert		. . . .	vert
b —	3 vert	entre *b* et *F*	milieu	3 vert
F	3 vert bleu		tangent à *F* . . .	3 vert bleu
		entre *f* et *G*		
	bleu		tangent à *F* . . .	bleu
	2 bleu		à 1/4 de *F* . . .	2 bleu
	5 bleu		milieu	5 bleu
	bleu violet		à 3/4 de *F* . . .	bleu violet
G —	1 bleu violet		tangent à *G* . . .	1 bleu violet
		entre *G* et *H*		
	3 bleu violet		milieu	3 bleu violet
H —	violet ?			



Über die Bestimmung des Harnzuckers aus der Drehung der Polarisationsebene.

Von **Michael Tscherinoff** aus Moskau.

(Aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität.)

Der Mangel an Übereinstimmung rücksichtlich des Drehungsvermögens des Zuckers im diabetischen Urin (vergleiche Listing in Liebig's und Wöhler's Annalen der Chemie Bd. 96, S. 93) veranlasste mich zu untersuchen, in wie weit die Differenzen in den Angaben der verschiedenen Beobachter ihren Grund in den verschiedenen Untersuchungsobjecten, welche ihnen vorlagen, haben möchten. Es war dies um so mehr geboten, als bereits Ventzke (Journal für praktische Chemie, Bd. 25, S. 79) einen Harn untersucht hat, der sich durch Hefe in Gährung versetzen liess und der dabei nach links drehte.

Meine Untersuchungen sind an drei verschiedenen Kranken angestellt. Zur Bestimmung des Zuckers auf chemischem Wege bediente ich mich der Methode von Prof. Brücke (Allgemeine Wiener medicinische Zeitung 1860, Nr. 12 und 13). Zur optischen Bestimmung diente mir ein Soleil-Ventzke'scher Apparat, der von Herrn Opticus Franz Schmidt in Berlin bezogen war. Ein Theilstrich desselben sollte 1 Gramm krystallisirten Zuckers in 100 Grammen Flüssigkeit entsprechen, und dies bestätigte auch der Versuch, wie beistehende Tabelle zeigt.

	I	II
a	1·936	5·029
b	1·921	5·055
c	1·9	5·0

a ist das Gewicht des in 100 Kubikcentimeter destillirten Wassers aufgelösten, reinen, aus Alkohol umkrystallisirten Trau-

der oben erwähnten Brücke'schen Titrirmethode gefunden wurde, auf 100 Kubikcentimeter berechnet; *c* zeigt die am Apparat abgelesenen Theilstriche. Die Traubenzuckerlösungen hatten 48 Stunden gestanden, um ihr Drehungsvermögen constant werden zu lassen.

Ausserdem habe ich auch einige Parallelversuche mit dem Mitscherlich'schen Apparate angestellt. Er gestattet zwar, wie bekannt, eine geringere Genauigkeit, wird aber doch aus der Praxis nicht ganz verdrängt werden, da er zwei Vortheile besitzt, seinen niedrigeren Preis und den Vortheil, dass man auch stark gefärbten Urin mit ihm untersuchen kann, wenn man auf die *teinte de passage* verzichtet und mittelst eines monochromatisch rothen Glases beobachtet. Dies war indessen in meinen Versuchen nicht nöthig.

Die gesammten Versuchsresultate sind in der beiliegenden Tabelle zusammengestellt. Sie ist für sich selbst verständlich. Sie zeigt, dass die Zahlen nicht mit der Annahme übereinstimmen, dass stets nur Traubenzucker von den gewöhnlichen Eigenschaften als einziger drehender Körper im Harne enthalten sei; denn die Werthe in der mit einem Sterne bezeichneten Columne sinken stellenweise unter die Einheit, und zwar um mehr als man auf Rechnung von Beobachtungsfehlern setzen kann. An anderen Orten erheben sie sich über die Einheit. Diese Abweichungen bedürfen weiter keiner Erklärung, wenn man annimmt, dass das specifische Drehungsvermögen des Harnzuckers veränderlich sei. Da man sich indessen zu dieser Annahme begreiflicher Weise schwer entschliesst, so müssen wir etwas näher auf die anderweitigen Möglichkeiten eingehen.

Diejenigen Zahlen, welche die Einheit überschreiten, können auf verschiedene Weise erklärt werden. Erstens kann man annehmen, dass im Harn noch eine andere reducirende, aber nicht drehende Substanz enthalten war, sei dies nun ein optisch inactiver Zucker oder irgend eine andere Substanz (die Harnsäure kommt hier nicht in Betracht, theils weil sie nicht vorhanden war, theils weil sie bei der Brücke'schen Titrirmethode eliminirt wird). Zweitens kann man annehmen, dass neben dem rechtsdrehenden, dem gewöhnlichen Traubenzucker noch eine geringe Menge eines linksdrehenden Körpers vorhanden war, sei dieser nun ein linksdrehender Zucker



oder irgend ein anderer Körper. Eiweiss, wenigstens das gewöhnliche durch Hitze coagulirbare, war es nicht; denn ich habe mich jedesmal von seiner Abwesenheit überzeugt.

Diejenigen Zahlen, welche unter der Einheit stehen, lassen keine andere Deutung zu, als dass der Harnzucker seiner ganzen Menge nach oder theilweise ein höheres Drehungsvermögen besass als gewöhnlicher Traubenzucker, oder dass noch ein anderer rechts drehender Körper vorhanden war.

Es ist mir bei meinen anderweitigen Arbeiten bis jetzt nicht die Zeit geblieben, diese verschiedenen Möglichkeiten der Probe des Versuches zu unterwerfen.

Geht man die Zahlen der verschiedenen Kranken durch, so zeigt sich, dass sie untereinander verschieden, dass aber auch die der einzelnen Wechseln unterworfen sind.

Der Kranke Nr. 2 zeigt zwar ähnliche Zahlen, sämmtlich unter der Einheit, im December und im März. Der Kranke Nr. 1 aber zeigte im December lauter Zahlen über der Einheit, im März lauter Zahlen unter der Einheit.

Beim Kranken Nr. 3 fiel der Wechsel in eine continuirlich fortlaufende Versuchsreihe. Er war fünf Tage beobachtet worden und hatte in diesen fünf Tagen, wie die Nummern von 19 bis 23 ausweisen, sich so verhalten, als ob gewöhnlicher Traubenzucker und kein anderer drehender oder reducirender Körper in seinem Harn enthalten gewesen sei. Dann sinken die Zahlen plötzlich unter die Einheit, wie dies die Nummern von 24 bis 26 ausweisen.

Für die Praxis geht aus diesen Erfahrungen hervor, dass bei dem jetzigen Zustande unserer Kenntnisse die Menge des Zuckers im Harn aus der Drehung der Polarisationsebene nicht mit Sicherheit bestimmt werden kann.

		Nummer des Versuches	Chem. Bestimmung		Soleil-Ventzke'scher Apparat, Theilstriche	1 Theilstrich Soleil entspricht Grmm. krystall. Zuckers in 100 K.-Cent.*	1 Theilstrich Soleil entspricht Grmm. wasserfr. Zuckers in 100 K.-Cent.	Mitscherlich teinte de passage	1 Grad entspricht Grmm. krystallisirten Zuckers in 100 Kub.-Cent.	1 Grad entspricht Grmm. wasserfreien Zuckers in 100 Kub.-Cent.
			Krystallisirt. Zucker in 100 Kub.-Cent.	Wasserfreier Zucker in 100 Kub.-Cent.						
Fall Nr. 1	December	1	5·765	5·241	5·1	1·130	1·027	5	1·153	1·048
		2	7·379	6·708	6·55	1·129	1·024	—	—	—
		3	6·046	5·498	5·5	1·099	1·000	—	—	—
		4	8·025	7·291	7	1·146	1·041	7	1·146	1·041
		5	5·871	5·337	5·2	1·129	1·026	5	1·174	1·067
		6	8·025	7·291	7·1	1·130	1·028	7	1·146	1·041
		7	6·360	5·782	5·7	1·116	1·010	5·6	1·118	1·050
		8	8·195	7·450	7·2	1·138	1·034	—	—	—
		9	5·590	5·081	5	1·118	1·016	—	—	—
	Febr.	10	5·677	5·156	5·7	0·996	0·904	—	—	—
	März	11	5·500	5·000	6	0·916	0·833	—	—	—
		12	5·016	4·571	5·5	0·912	0·831	—	—	—
Fall Nr. 2	December	13	7·379	6·708	7·7	0·958	0·871	7·9	0·934	0·849
		14	7·849	7·136	8·2	0·957	0·871	8·3	0·946	0·859
		15	6·586	5·987	7·75	0·876	0·772	8	0·823	0·748
		16	7·094	6·450	7·55	0·939	0·854	7·7	0·908	0·839
	März	17	7·040	6·400	7·8	0·902	0·8205	—	—	—
		18	7·040	6·400	7·75	0·908	0·825	—	—	—
Fall Nr. 3	März	19	5·333	4·848	4·9	1·088	0·989	—	—	—
		20	3·520	3·200	3·4	1·035	0·941	—	—	—
		21	3·954	3·595	3·75	1·054	0·958	—	—	—
		22	3·954	3·595	3·8	1·043	0·946	—	—	—
		23	3·910	3·555	3·7	1·057	0·961	—	—	—
		24	3·450	3·137	3·65	0·945	0·859	—	—	—
		25	3·520	3·200	3·8	0·900	0·842	—	—	—
		26	4·090	3·721	4·45	0·919	0·836	—	—	—

Physische Zusammenkünfte von Asteroiden im Jahre 1865.

Von dem w. M. Karl v. Littrow.

Die Durchsicht des Berliner Jahrbuches, die Herr F. v. Franzenau auf meine Bitte durchführte, ergab folgende interessantere Fälle, in deren Zusammenstellungen die Culminationszeit auf beliebig einen der beiden Planeten und so wie die halben Tagbogen auf die geographische Lage von Berlin sich beziehen, die gegenseitigen Distanzen in Theilen der mittleren Entfernung: Sonne — Erde gegeben sind.

Astraea (5) — Diana (78)

1865		Gegens. Dist.	Mittl. Z. d. Culm.	Halb. Tagb.
März	21.	0·095	$22^h 18^m$	$5^h 6^m$
April	10.	0·070	21 25	5 18
„	20.	0·043	20 58	5 24
„	30.	0·035	20 31	5 30
Mai	10.	0·037	20 3	5 36
„	20.	0·052	19 34	5 41
„	30.	0·071	19 4	5 45
Juni	9.	0·080	18 33	5 49
„	29.	0·090	17 28	5 53

Hygiea (10) — Doris (48)

1865		Gegens. Dist.	Mittl. Z. d. Culm.	Halb. Tagb.
Juli	6.	0·067	$2^h 29^m$	$7^h 13^m$
„	16.	0·054	2 3	7 6
„	26.	0·037	1 38	6 59
August	5.	0·029	1 12	6 52
„	15.	0·036	0 47	6 44
„	25.	0·059	0 22	6 37
September	4.	0·068	23 55	6 29

Asia (67) — Feronia (72)

1863		Gegens. Dist.	Mittl. Z. d. Culm.	Halb. Tagb.
April	7.	0·079	17ʰ 25ᵐ	4ʰ 25ᵐ
„	17.	0·076	16 57	4 30
„	27.	0·074	16 26	4 36
Mai	7.	0·071	15 53	4 42
„	17.	0·069	15 17	4 48
„	27.	0·067	14 37	4 53
Juni	6.	0·064	13 54	4 57
„	16.	0·061	13 9	5 0
„	26.	0·058	12 22	5 2
Juli	6.	0·054	11 33	5 3
„	16.	0·050	10 46	5 2
„	26.	0·046	10 0	4 59
August	5.	0·042	9 19	4 56
„	15.	0·038	8 39	4 53
„	25.	0·034	8 4	4 50
September	4.	0·030	7 31	4 45
„	14.	0·027	7 2	4 41
„	24.	0·025	6 36	4 38
October	4.	0·024	6 10	4 36
„	14.	0·023	5 48	4 36
„	24.	0·022	5 27	4 36
November	3.	0·023	5 6	4 39
„	13.	0·025	4 47	4 42
„	23.	0·027	4 27	4 46
December	3.	0·029	4 9	4 52
„	13.	0·032	3 50	4 58
„	23.	0·035	3 32	5 6

Andere Combinationen ergaben wenn gleich immerhin bemerkenswerthe, so doch zu grosse gegenseitige Distanzen, um hier in allem Detail aufgeführt zu werden. Dahin gehören:

Elpis (59) — Calypso (53) mit 0·151 gegens. Dist., April 20.
Fortuna (19) — Fides (37) „ 0·129 „ „ September 4.
Euterpe (27) — Leucothea (35) „ 0·143 „ „ „ 7.
Lutetia (21) — Fides (37) „ 0·112 „ „ December 33.

Die letztere Combination hat mit dem angegebenen Datum das Minimum der gegenseitigen Distanz noch nicht erreicht, verspricht aber, nach dem Gange der Rechnung zu schliessen, nichts Besonderes.

Die Combination Fortuna (19) — Fides (37) war in meiner vor sieben Jahren durchgeführten allgemeinen Untersuchung (Denkschriften mathematisch-naturwissenschaftlicher Classe der k. Akademie der Wissenschaften XVI. Band) für Ende Jänner 1866 und als eine der merkwürdigeren Zusammenkünfte vorausgesagt. Die dort für Mitte October 1865 angekündigte Combination Iris (7) — Pomona (32) ergab in der Wirklichkeit eine zu grosse gegenseitige Distanz, als dass sie hier näher anzuführen wäre.

Solche Abweichungen zeigen einerseits, dass es sich vollkommen rechtfertigt, wenn ich die Voraussagen damals nicht über das Jahr 1867 erstrecken wollte, andererseits, dass es an der Zeit ist, jene Arbeit mit den seither bekannt gewordenen besseren Bahnelementen zu verbessern, was ich denn auch so bald als möglich thun will.

Die Ausbeute für das hier behandelte Jahr ist, wenn auch keine glänzende, so doch immer dadurch bemerkenswerth, dass in einem Falle (Hygiea (10) — Doris (48)) die kleinste bisher vorhergesagte gegenseitige Distanz stattfindet, und in einem anderen Falle (Asia (67) — Feronia (72)), wo diese Distanz an sich noch kleiner ausfällt, die beiden Himmelskörper über ein Jahr in einer wechselseitigen Entfernung unter 0·1 der halben grossen Erdbahnaxe bleiben, so dass trotz der wahrscheinlich sehr geringen Massen gerade dieser beiden Asteroiden, eine gegenseitige Störung, die unseren Beobachtungen wahrnehmbar wäre, nicht ganz undenkbar ist.

Ich habe übrigens heuer nicht nöthig, wegen bei diesen Betrachtungen weggebliebener Asteroiden mich zu erklären, Dank sei es der Vollständigkeit, welche Herr Director W. Förster den Ephemeriden dieser Gestirne zu verleihen wusste. Es sind im Ganzen 79 Planeten berücksichtigt: Terpsichore und Alkmene sind zu neu, um schon aufgeführt zu werden, Maja ist einstweilen verloren gegeben.

Mars im November 1864.

Von **Felix v. Franzenau**; Stud. Phil.

(Mit 2 Tafeln.)

Die ziemlich günstige Stellung des Mars in seiner letzten Opposition war die Veranlassung zu nachstehenden Beobachtungen, die mit dem, mir zu diesem Zwecke gütigst überlassenen sechszölligen Refractor der Universitäts-Sternwarte gemacht wurden. Das Ziel, das ich mir vorgesteckt, war ein möglichst genaues Bild der Oberfläche dieses Planeten, der Gestaltung seiner Flecken und seiner atmosphärischen Zustände zu erhalten. Leider verhinderte das ausnehmend schlechte Wetter des vergangenen Winters eine gehörige Anzahl von Beobachtungen; im Ganzen gelangen nur sieben, von welchen die letzte, unter bedeutend ungünstigen Umständen gemacht, weggelassen wurde.

Nichtsdestoweniger lässt sich auch aus diesen wenigen Zeichnungen schon auf die Unveränderlichkeit der einzelnen Flecke schliessen, da die Ähnlichkeit derselben mit den Mädler'schen Beobachtungen aus dem Jahre 1830 auffallend ist.

Ich gehe nun zur Erläuterung der einzelnen Zeichnungen über. *N, S, P* bedeuten durchgehends Nordpol, Südpol und Phase, ebenso *s* den Schnee oder schneeähnlichen Niederschlag am Nordpol; derselbe erscheint in einem ausnehmend röthlich gelben Lichte und gewöhnlich scharf begrenzt.

I. 8. November 9^h 30^m mittl. Wiener Zeit. *a* und *b* sind zwei äusserst auffallende grosse dunkle Flecken, bei *v* getrennt. Bemerkenswerth ist die Schwärze und Schärfe in den Contouren der drei Spitzen von *a*. Die Gegenden *c, g, h, i* und *k* sind kaum sichtbare graue Schattirungen ohne bestimmbare Ausdehnung, *x, y, z* sind helle rothe Partien des Planeten.

II. 10. November 9^h 30^m. Die Flecken sind dieselben geblieben und nur durch die Rotation etwas verändert. Der Fleck *b* erhielt bei *d* eine bedeutende Verlängerung und in der Gegend bei *s* erscheint der früher nur geahnte Streif *f* nun augenfällig abgesondert, *s* selbst aber ist ganz verändert und in zwei Theile *s* und *s'* durch einen dunklen Zwischenraum getrennt.

III. 15. November $9^h\ 30^m$, wirkt der Fortschritt der Rotation schon auffallend auf die Gestaltung der Flecken. Fleck *a* hat die frühere Form ganz verloren und erstreckt sich nun bedeutend mehr nach Norden, *b* vergrösserte sich noch um *c*, doch ist dieser Theil und *d* bedeutend lichtschwach gegen die mit *b* bezeichnete Gegend desselben Fleckens. Fleck *x* ist in die Mitte des Bildes gelangt und hat seine grösste Ausdehnung erreicht, *s* schien ganz verschwunden zu sein, denn die Gegend um den Nordpol war eben so dunkel als *h* und *f*. Überhaupt erschien die ganze nördliche Halbkugel wie von unzähligen grauen Wölkchen bedeckt. Vielleicht erklärt sich die Unsichtbarkeit der Schneegegend durch grössere Verdichtungen in der Atmosphäre des Mars.

IV. 20. November $7^h\ 45^m$. Fleck *a* ist nun dem Verschwinden nahe, *b* hat die Mitte der Scheibe erreicht und in seinem westlichen Theile ist *c* und *d* deutlicher als früher aufgetreten, *u* ist eine helle Partie in den vereinigten Flecken *b*, *c* und *d*, *w* ist ein neuer hellrother Fleck. Auffallend ist die Dunkelheit der Gegend *q* in der Nähe von *s*, wo sie mit *d* zusammen zu stossen scheint.

V. 20. November $9^h\ 20^m$. Die Zeichnung zwei Stunden später entworfen, wo die Hauptflecken schon bedeutend mehr gegen die Mitte des Planeten zu standen und daher mehr Detail zu sehen erlaubten; *c* ist bedeutend grösser und schärfer begrenzt, *u* tritt nun als Theilung deutlich auf, *d* hat sich mit *q* verbunden und ein neuer Fleck *p* erscheint.

VI. 22. November 9^h. Da die Zwischenzeit zwischen dieser und der Zeichnung IV sehr nahe zwei Rotationsperioden des Mars umfasst, so ist die Ähnlichkeit der beiden Zeichnungen leicht erklärlich. Nur bei *r* trat eine Veränderung ein; der Schnee des Nordpols scheint sich bedeutend mehr gegen Süden zu erstrecken, jedoch ohne angebbare Grenze. Bemerkenswerth ist die Schwärze der nördlichen Theile von *b* und der äussersten dem Schnee zugekehrten Spitze von *d*.

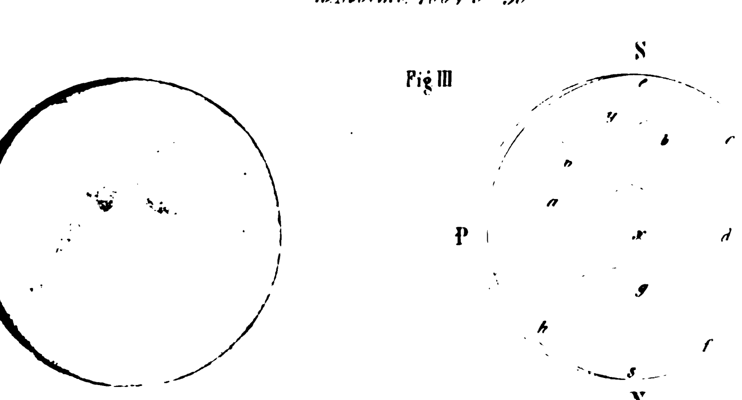
Nach dieser Beobachtung trat trübes Wetter ein, welches so lange andauerte, bis Mars die Opposition schon weit überschritten hatte, so dass die Entfernung desselben von der Erde für derlei Beobachtungen zu gross wurde.

8. Novemb. 1864. 9h 30m

Fig. I.

10. Novemb. 1864. 9h 30m

Fig. II.



15. Novemb. 1864. 9h 30m

Fig. III



Fig. IV.

20. Novemb. 1864. 9h 40m.

Fig. V.

22. Novemb. 1864. 9h 0m.

Fig. VI.





SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LI. BAND.

ZWEITE ABTHEILUNG.

5.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

35



XIII. SITZUNG VOM 11. MAI 1865.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über die Veränderungen, welche nach einseitiger Durchschneidung des *Nervus trigeminus* in der Mundhöhle auftreten", von dem c. M., Herrn Prof. Dr. A. Rollett in Gratz;

„Einige Beobachtungen über das elektrische Licht in höchst verdünnten Gasen", von Herrn Prof. Dr. A. v. Waltenhofen in Innsbruck.

Das w. M., Herr Ministerialrath M. Koller überreicht eine von ihm in dem III. Bande der Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn veröffentlichte Abhandlung, betitelt: „Beitrag zur Theorie der Röhrenlibelle", und bespricht den Inhalt derselben.

Das c. M., Herr Dr. K. Freih. v. Reichenbach spricht „über eine unbeachtet gebliebene sinnliche Reizfähigkeit vieler Menschen, Sensitivität genannt".

Herr Dr. S. Stricker, Assissent am k. k. physiologischen Institute der Wiener Universität, übergibt eine Abhandlung: „Untersuchungen über die Entwickelung der Bachforelle".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale de Belgique: Bulletin. 34e Année, 2e Série, Tome 19, Nr. 3. Bruxelles, 1865; 8°.

Akademie der Wissenschaften, königl. bayer., zu München: Abhandlungen der philos.-philolog. Classe. X. Band, 2. Abthlg. (Nebst den zugehörigen Separatabdrücken.) München, 1865; 4°. — Plath, J. H., Chinesische Texte. Abthlg. II. Der Cultus der alten Chinesen. (Abhdlgn. Bd. IX. Abth. 3.) München, 1864; 4°. — Thomas, G. M., Die Stellung Venedigs in der Weltgeschichte. Rede gehalten am 25. Juli 1864. München, 1864; 4°. — Liebig, J. Freih. v., Induction und Deduction. Rede gehalten am 28. März 1865. München; 4°. — Döllinger, J. v., König Maximilian II. und die Wissenschaft. Rede gehalten, am 30. März 1864. München, 1864; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 9. Wien, 1865; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1524—1526. Altona, 1865; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LX, Nr. 16—17. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Serie. XIVe. Année, 1er Volume, 17e—18e. Livraisons. Paris, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 18—19. Wien, 1865; 8°.

Katalog der Bibliothek der k. k. Reichshaupt- und Residenzstadt Wien. (Nach dem Stande vom 31. December 1864.) Wien, 1865; 8°.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 13—14. Wien, 1865; 4°.

Liharžik, Franz, Das Quadrat die Grundlage aller Proportionalität in der Natur und das Quadrat aus der Zahl Sieben die Uridee des menschlichen Körperbaues. Wien, 1865; 4°.

Lotos. XV. Jahrg. April 1865. Prag; 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Jahrg. 1865. 3. Heft, nebst Inhaltsverzeichniss für die Jahrgänge 1855—1864. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique. 201e Livraison. Tome VIIe, Année 1865. Paris; 4°.

Reader. Nr. 122—123. Vol. V. London, 1865; Folio.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. 1865. XV. Bd. Nr. 1. Wien; kl. 4°.

Verein, physikalischer, zu Frankfurt a./M.: Jahres-Bericht für 1863—1864. 8°.

Viaggio intorno al globo della fregata austriaca Novara negli anni 1857, 1858, 1859. Tomo III. Vienna, 1865; gr. 8°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 34—37. Wien, 1865; 4°.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. Nr. 13. Gratz, 1865; 4°.

Zeitschrift für Chemie, Archiv etc. von H. Hübner. VIII. Jahrg. N. F. Bd. I. Heft 7. Göttingen, 1865; 4°.

— des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. XVII. Jahrg. 3. Heft. Wien, 1865; 4°.

Über die Veränderungen, welche nach einseitiger Durchschneidung des Nervus trigeminus *in der Mundhöhle auftreten.*

Von **Prof. Alexander Rollett** in Graz.

(Mit 1 Tafel.)

Bei einer Reihe gelegentlich für die Demonstration der Trigeminus-Lähmung operirter Kaninchen, machte ich meine Schüler auch immer auf die bekannten im Verlaufe der bestehenden Lähmung sich entwickelnden Geschwüre in der Mundhöhle aufmerksam. Dabei bemerkte ich aber, dass das vollständige Bild der secundären Veränderungen in der Mundhöhle sich in einer Weise darstellt, die noch nicht genau beschrieben ist, wesshalb ich meine gelegentlichen Beobachtungen nicht verloren gehen lassen will.

Claude Bernard hat diesen Gegenstand in seinen „Leçons sur la physiologie du système nerveux. Paris, 1858, Tom. II. p. 99—103" mit Hinblick auf die bekannte Controverse über die rein traumatische oder nutritive Natur jener Geschwüre etwas ausführlicher behandelt und durch Abbildungen illustrirt l. c. Fig. 5 (1). Bernard beschreibt daselbst die als Endresultat einer durch mehrere Tage bestehenden Kaumuskellähmung ausgebildete Abweichung des Unterkiefers, geht aber bei der Beurtheilung der Kieferabweichung nicht von der normalen Ruhelage des Unterkiefers aus, sondern von einer willkürlich gewählten Lage bei halbgeöffnetem Munde (Fig. 5 (1) [Fig. 2]) und beschreibt ausschliesslich die an den Schneidezähnen in Folge der Kieferabweichung auftretenden schiefen Abschleifungen. Von den Geschwüren, welche ganz constant an bestimmten Stellen der Mundhöhlenschleimhaut sich entwickeln und mit Recht auf Verwundungen durch die abgewichenen Zähne zurückgeführt werden, zählt Bernard nur einige auf, und zwar liegen diese alle auf der Seite des durchschnittenen Trigeminus. Auch die in der späteren Arbeit von Büttner (Zeitschrift für rationelle Medicin. 3. Reihe, Bd. XV, p. 272) enthaltenen Angaben



scheinen sich nur auf diese Geschwüre zu beziehen. Gegenüber diesen Angaben will ich nun hervorheben, dass es sich für die vollständige Kenntniss der in der Mundhöhle auftretenden Veränderungen empfiehlt, darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Abweichung des Unterkiefers sich successive immer weiter ausbildet.

Bei der Beurtheilung dieser Abweichung soll man von der normalen Ruhelage des Kiefers ausgehen, ferner nicht nur auf die Veränderungen an den Schneidezähnen, sondern auch auf die mindestens eben so interessanten Veränderungen an den Backenzähnen aufmerksam sein. Man bemerkt dann ausser den von Bernard aufgezählten Geschwüren noch andere, welche nicht auf der Seite des durchschnittenen Trigeminus, sondern auf der entgegengesetzten empfindlichen Seite eben so constant an bestimmten Orten, wie jene sich ausbilden und einen ganz ähnlichen Verlauf nehmen.

Bei meinen Thieren war der Nerv innerhalb der Schädelhöhle mit einem Neurotom in der gewöhnlichen Weise durchschnitten und da sie zur Demonstration gedient hatten, auch immer die gelungene Durchschneidung durch eine sorgsame Prüfung der Unempfindlichkeitsgebiete constatirt. Zuletzt überzeugte ich mich noch durch die Section des Thieres von der rein und ohne bedeutender Nebenverletzung ausgeführten Nervendurchschneidung.

Bemerkt man sich vorerst die Lage des Unterkiefers am unversehrten Thiere bei ruhig geschlossenen Kiefern, die Anfangs- und Endlage bei jedem einzelnen Kauacte, so sieht man das Folgende: Die Schneidezähne des Unterkiefers stehen dabei hinter den vorderen grossen Schneidezähnen des Oberkiefers und treffen mit ihrem oberen Rande in die Furche zwischen den vorderen grossen und den hinter diesen stehenden kleineren Schneidezähnen des Oberkiefers [1]). Der Spalt zwischen den Schneidezähnen des Oberkiefers trifft genau auf den Spalt zwischen den entsprechenden Zähnen des Unterkiefers. Die Backenzähne des Unterkiefers, deren Entfernung von rechts nach links kleiner ist, als die Entfernung der Backenzähne des Unterkiefers in derselben Richtung, treffen in der Ruhelage so auf die letzteren, wie es in Fig. 1 einem durch die geschlossenen Kiefer von oben nach unten gelegten Durchschnitte

[1]) Bernard lässt in Fig. II, l. c. die Ränder der Zähne des Ober- und Unterkiefers sich berühren.

dargestellt ist, wo *oo* die im Oberkiefer, *uu* die im Unterkiefer steckenden Zähne sind. Der Schnitt geht durch den dritten Backenzahn jeder Seite.

Nach der Durchschneidung des Trigeminus einer Seite weicht der Unterkiefer im Sinne der nicht gelähmten Kaumuskeln, also auf die gesunde Seite ab, dabei kommt die tiefe Furche, welche sich auf der vorderen Fläche des oberen grossen Schneidezahnes der gesunden Seite befindet, ungefähr über den Spalt zwischen den unteren Schneidezähnen zu stehen, Fig. 2. Im weiteren Verlaufe erhalten die hinteren kleinen Schneidezähne des Oberkiefers, welche beim unversehrten Thiere eine fast horizontal liegende Kaufläche besitzen, beide eine schief von vorne und unten nach hinten und oben gerichtete Abschleifungsfläche, Fig. 4 *k*, die bis unter die Weichtheile des harten Gaumens hineinreicht, mit welchem die Schneidezähne des Unterkiefers sich nun direct berühren. Die zwei Reihen der Backenzähne des Unterkiefers erleiden gleichfalls eine durch die Abweichung des Unterkiefers bedingte Ortsveränderung und die Folge davon ist eine Formveränderung der Zähne selbst, welche namentlich die Zähne der gesunden Seite in einer auffallenden Weise rasch von den Zähnen der operirten Seite auszeichnet, welche letztere im Allgemeinen ihre ursprüngliche Gestalt beibehalten. Auf der operirten Seite treffen die Backenzähne beider Kiefer nicht mehr auf einander, die des Unterkiefers entfernen sich nach innen von denen des Oberkiefers, die Furchen und Leisten an den Kauflächen dieser beiden Zahnreihen verflachen sich um ein Geringes.

Auf der Seite des intacten Trigeminus treffen die Backenzähne beider Kiefer noch auf einander. Die Concavität der Kauflächen von links nach rechts nimmt zu, sowohl an den Ober- als an den Unterkieferzähnen. Die letzteren werden bei den Kaubewegungen so ausgeschliffen, dass ihre innere Fläche mit der Kaufläche unter einem sehr spitzen Winkel zusammenstosst und die Zahnreihe des Unterkiefers in eine Reihe von scharfen, grätenartigen Zacken ausläuft, die sich an die innere Fläche der Oberkieferzähne anlegen. Es sind diese Verhältnisse in Fig. 3 auf einem Durchschnitte dargestellt. Ein Vergleich mit Fig. 1 ergibt, was auch aus der Beschreibung hervorgeht, dass die im Gefolge einseitiger Trigeminusdurchschneidung auftretende Verbildung der Zähne, auf der Seite des

nicht gelähmten Trigeminus sich in viel höherem Grade ausbildet, als auf der gelähmten Seite.

Es weicht also der Unterkiefer nach der Durchschneidung eines Trigeminus nach der gesunden Seite ab, während er gleichzeitig um ein Geringes nach rückwärts gezogen und auf der gesunden Seite gehoben wird. Die Abweichung nimmt von Tag zu Tag zu, indem die Widerstände, welche ihr die ursprüngliche Form der Backenzähne entgegensetzten, dadurch beseitigt werden, dass die Zähne an jenen Stellen, welche durch die einseitige Thätigkeit der Kaumuskeln am festesten an einander gedrückt werden, sich gegenseitig in abnormer Weise abschleifen. Meine frühere Beschreibung bezieht sich auf die Ruhelage des abgewichenen Unterkiefers bei geschlossenem Munde, und ist von Thieren entnommen, welche 12—14 Tage nach der Operation untersucht und secirt wurden.

Die Geschwüre, welche in der Mundhöhlenschleimhaut in Folge einseitiger Trigeminus-Durchschneidung auftreten, kann man eintheilen in solche, welche auf der operirten Seite sich befinden, in solche, welche auf der nicht gelähmten Seite sitzen und in solche, welche ohne Unterbrechung von einer Seite auf die andere übergreifen. Zu den ersteren gehören die bekannten Geschwüre *a* und *b*, Fig. 3, an Ober- und Unterlippe und die Geschwüre am Zungenrande, der unempfindlichen Seite. Auf *a* passt die untere Ecke und der äussere Rand des entsprechenden oberen Schneidezahnes, wenn die Kiefer geöffnet und die Lippe zwischen die Zähne geschoben wird. Auf *b* trifft der untere Rand desselben Zahnes bei geschlossenen Kiefern.

Auf der nicht gelähmten Seite befindet sich ein grosses längliches Geschwür, dicht neben den oberen Backenzähnen in der Schleimhaut des harten Gaumens und in dem Zahnfleisch der betreffenden Zahnreihe, Fig. 4 *d*. In dieses Geschwür passen bei geschlossenen Kiefern die scharfen Zacken der abgeschliffenen Unterkieferzähne, Fig. 3 *d'*.

Ein Geschwür dritter Art endlich befindet sich dicht an der inneren Fläche der Schneidezähne des Oberkiefers, in dieses fallen die abschüssigen Schliffflächen der hinteren Schneidezähne wie eine schiefe Ebene hinein. Bei geschlossenen Kiefern treffen in dieses Geschwür, Fig. 4 *e*, die Schneidezähne des Unterkiefers und dasselbe ist der Fall, wenn man bei geschlossenen Kiefern den

vorderen Theil des Unterkiefers anfasst und Excursionen desselben nach rechts und nach links hervorbringt.

Alle diese Geschwüre sind unzweifelhaft traumatischer Natur, sie treten constant an den beschriebenen Orten nach der einseitigen Durchschneidung des Trigeminus auf.

Es existirt nur der Unterschied, dass die einen in Theilen auftreten, die ihre Empfindung verloren, die anderen hingegen in Theilen, welche nachweislich ihre Empfindung behalten haben, in welchen überhaupt keine Störung der Innervation stattgefunden hat.

Die empfindungslosen Theile, welche den Insulten der Zähne ausgesetzt sind, erleiden diese fortwährend, weil eben die schützenden Reflexe fehlen. Aber auch in empfindliche Theile werden bei den Kaubewegungen die Spitzen und Kanten der abgewichenen Zähne eingehakt, weil dem Thiere die Mittel zur Ausführung einer schützenden Bewegung am verhältnissmässig unbeweglichen Oberkiefer fehlen und die Muskeln des beweglichen Unterkiefers eben nur einseitig thätig sind.

Die Verschiedenheit der nächsten Ursachen, aus welcher für die betroffenen Theile der Schutz gegen Insulte entfällt, erklärt es auch, warum die Geschwüre auf der operirten Seite früher erscheinen als auf der gesunden. So sah ich schon 24 Stunden nach der Operation die Stelle der Oberlippe, auf welcher das Geschwür Fig. 2 *a* sich ausbildet, geröthet und eingerissen, während die Geschwüre am harten Gaumen sich erst im späteren Verlaufe entwickeln, wenn nach mehrtägigem Bestehen der Trigeminuslähmung sich die Zähne in der oben angegebenen Weise abgeschliffen haben. Der weitere Verlauf aller dieser Geschwüre ist für alle ein sehr ähnlicher und man bemerkt niemals an den Geschwüren der gelähmten Seite ein besonders rasches Umsichgreifen oder eine besondere Bösartigkeit. Der Umstand, dass man hier Gelegenheit hat, von ganz ähnlichen Traumen herrührende Geschwüre der empfindlichen und unempfindlichen Mundhöhlenschleimhaut desselben Organismus direct mit einander zu vergleichen und dass keine einzige Thatsache uns nöthigt, für die Erklärung der Geschwürsbildungen auf der gelähmten Seite noch eine specifische Ernährungsstörung herbeizuziehen, scheint mir wenigstens für die Mundhöhlenschleimhaut des Kaninchens gegen die Annahme besonderer sogenannter trophischer Nervenfasern des Trigeminus ein noch schwerer wie-

gender Beweis, als der, welchen schon Bernard aus seinen nicht sehr vollständigen Beobachtungen über die secundären Veränderungen der Mundhöhlenschleimhaut herleitete. Begreiflicher Weise braucht das, was für die Mundhöhlenschleimhaut gilt, nicht auch auf das Auge seine Anwendung zu haben. Aussprechen will ich aber hier noch, dass ich mich von dem Ausbleiben der Trigeminus-Augenentzündung, bei ausreichendem Schutze des unempfindlichen Auges, nach der Methode von Büttner und Meissner vollkommen überzeugt habe, dass mir dagegen der Einwurf, welchen Schiff, Samuel und Büttner gegen die Erklärung, welche Snellen zuerst von jener Augenentzündung gegeben hat, noch einer weiteren Begründung bedürftig erscheint.

Der Einwurf nämlich, dass man das unempfindliche Auge nicht nur gegen Traumen schützen müsse, welche auch im gesunden Auge Entzündungen bewirken, sondern auch gegen solche geringfügige äussere Einflüsse, welche am gesunden Auge niemals Entzündungen bewirken.

Sollte ich von der Richtigkeit dieses Einwurfes überzeugt sein, dann müsste es gelungen sein, beide Augen eines einseitig operirten Thieres unter möglichst gleiche Schutzkapseln zu bringen, beim gesunden Auge ohne seine Empfindlichkeit zu beeinträchtigen, den Augenliedschlag eben so aufzuheben, wie er am unempfindlichen Auge aufgehoben ist und nun einen messbaren, für beide Augen gleichen Entzündungsreiz zu appliciren und die Erfolge zu beobachten, was bis jetzt nicht geschehen ist.

Um zu unseren Beobachtungen an der Mundhöhlenschleimhaut zurückzukehren, will ich anführen, dass diese, der Auffassung von Snellen per analogiam das Wort reden, denn die operirten Kaninchen konnten mit Rüben, Heu, Körnern, also mit Futter von sehr verschiedener Festigkeit gefüttert werden, niemals traten die Geschwüre der unempfindlichen Hälfte der Mundhöhlenschleimhaut in grösserer Anzahl oder an anderen Orten, als dort, wo die Zähne wirklich fortwährend einhakten, auf.



XIV. SITZUNG VOM 18. MAI 1865.

Herr Prof. Dr. R. Kner übergibt die II. Abtheilung des speciellen Verzeichnisses der während der Reise der kais. Fregatte „Novara" gesammelten Fische.

Herr Prof. Dr. J. Redtenbacher überreicht die in seinem Laboratorium von Herrn A. Effenberger ausgeführte „Analyse des Jodquellensalzes von Hall in Oberösterreich".

Herr Prof. Dr. A. Bauer legt eine Abhandlung „über einen neuen Kohlenwasserstoff der Reihe C_nH_{2n-2}" vor.

Herr Dr. V. Schwarzer überreicht eine Abhandlung: „Beitrag zur qualitativen Analyse der Chinasulfate".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 10, Wien, 1865; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1527. Altona, 1865; 4°.

Cigalla, Giuseppe C. de, Dell' Elefantiasi o Lebbra Greca. Milano, 1865; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LX. Nr. 18. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, Ier Volume, 19e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 20. Wien, 1865; 8°. — Rückblick auf das Wirken desselben bei Gelegenheit der Feier seines 50jährigen Bestehens am 4. Mai 1865. 8°.

Mittheilungen des k. k. Artillerie-Comité. Jahrg. 1865. 2. Hft. Wien, 1865; 8°.

Osservatorio del R. Istituto tecnico di Ancona: Bullettino meteorologico. 1865, Nr. 1—2. Ancona; 4°.

Reader. Nr. 124. Vol. V. London, 1865; Folio.



Verein, naturhist.-medicin., zu Heidelberg: Verhandlungen. III. Bd. 5. Heft. Heidelberg, 1865; 8°.

— siebenbürgischer, für Naturwissenschaften zu Hermannstadt: XIV. Jahrg. Nr. 7—12; XV. Jahrg. Nr. 1—12. Hermannstadt, 1863 & 1864; 8°.

Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Veterinärkunde. XX. Bd., 2. Hft.; XXII. Bd., 2. Hft.; XXIII. Bd., 2. Hft. Wien, 1865; 8°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 38—39. Wien, 1865; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines. XVII. Jahrg. 4. Heft. Wien, 1865; 4°.

Analyse des Jodquellensalzes von Hall in Ober-Österreich.

Ausgeführt von **Anton Effenberger**

im chemischen Laboratorium des Prof. Dr. Redtenbacher.

Die mir zur Verfügung gestellte Salzmasse wurde nach Angabe der Badeverwaltung zu Hall durch vorsichtiges Abdampfen von vier Eimern Jodwasser, die der sogenannten Trinkquelle entnommen wurden, erhalten, und wog 6¹/₄ Pfd. Wiener Gewicht. Das Abdampfen geschah theils in Porzellanabdampfschalen, theils in flachen gusseisernen emaillirten Pfannen.

Das Salz ist sehr hygroskopisch, von etwas bräunlicher Farbe und riecht deutlich nach Jod.

Die zur quantitativen Untersuchung bestimmten Salzmengen wurden unter dem Recipienten einer Luftpumpe so lange getrocknet bis keine Gewichtsabnahme mehr zu bemerken war.

Zur Lösung des Salzes diente destillirtes Wasser von gewöhnlicher Zimmertemperatur. Die Lösung reagirt deutlich alkalisch, nimmt bei einiger Concentration eine bräunlich-gelbe Farbe an und riecht nach Jod. Bei der Lösung des Salzes im Wasser hinterbleibt ein im Verhältniss zur angewendeten Salzmasse geringer, braun gefärbter Rückstand, welcher aus Eisen, Thonerde, Kalk, Magnesia, Kieselsäure, Kohlensäure und organischen Stoffen besteht. Dieser Rückstand wurde auf einem bei 100° C. getrockneten und gewogenen Filter gesammelt, bei 100° getrocknet und gewogen. 100 Grm. des ursprünglichen Salzes hinterliessen im Mittel 0·42 Grm. als im Wasser unlösliche Bestandtheile. Die von diesem



Rückstande abfiltrirte Flüssigkeit diente zur Bestimmung der im Wasser löslichen Bestandtheile des ursprünglichen Salzes.

Die Bestimmung der Gesammtmenge des im Salze enthaltenen Chlor, Brom und Jod geschah auf massanalytischem und gewichtsanalytischem Wege. Es ergab sich, dass die in 100 Gewichtstheilen des Salzes enthaltenen Gewichtstheile Chlor, Brom und Jod 180·28 Gewichtstheile Silber zu binden vermögen. Der durch Fällung mit Silberlösung erzeugte Niederschlag von Chlor-, Brom- und Jodsilber wog auf 100 Grm. des ursprünglichen Salzes berechnet, 239·82 Grm.

Zur Jodbestimmung wurden grössere Mengen des Salzes im Wasser gelöst, die Lösung unter Zusatz von kohlensaurem Natron zur Trockene gebracht, der Rückstand mit starkem Alkohol ausgezogen, der alkoholische Auszug abermals zur Trockene gebracht, der hiebei bleibende Rückstand wieder mit Alkohol behandelt, die alkoholische Lösung abgedampft und dieser dritte Rückstand in Wasser gelöst. In der erhaltenen wässerigen Lösung wurde dann das Jod durch salpetersaures Palladiumoxydul als Palladiumjodür gefällt und aus dem Gewichte des beim Glühen des Palladiumjodürs zurückbleibenden metallischen Palladiums bestimmt.

67·62 Salz gaben 0·0675 Palladium, entsprechend 0·1608 Jod oder 0·238 Pct. Jod.

60·25 Salz gaben 0·059 Palladium, entsprechend 0·1418 Jod oder 0·235 Pct. Jod.

Zur Brombestimmung kam die Fehling'sche Methode in Anwendung. Um den Gehalt an Brom und Jod im Verhältniss zum Chlor mehr zu concentriren, wurde die Lösung des Salzes nur so lange mit Silberlösung versetzt, bis man sicher sein konnte, dass alles Jod und Brom nebst einem kleinen Theile von Chlor in Verbindung mit Silber niedergeschlagen war. Der Niederschlag von Chlor-, Brom- und Jodsilber wurde sodann getrocknet, gewogen, in einer Kugelröhre geschmolzen und in diesem Zustande der Einwirkung von Chlorgas so lange ausgesetzt, bis keine weitere Gewichtsabnahme mehr bemerkbar war. Aus der bei der Verwandlung des Jod- und Bromsilbers in Chlorsilber eintretenden Gewichtsabnahme lässt sich nach Abzug der auf die Verwandlung des Jodsilbers in Chlorsilber entfallenden bereits bekannten Gewichtsdifferenz der Bromgehalt leicht berechnen.

9·218 Grm. Chlor-, Brom- und Jodsilber erlitt durch die Behandlung mit Chlor einen Gewichtsverlust von 0·1509 Grm., woraus sich nach Abzug des Jodgehaltes 0·1299 Brom oder 0·282 Pct. Brom ergeben.

Der aus 40·32 Grm. Salz erhaltene Niederschlag von 9·878 Grm. Chlor-, Brom- und Jodsilber ergab einen Gewichtsverlust von 0·132, woraus ein Bromgehalt von 0·113 oder 0·28 Pct. resultirt.

Aus den bekannten Gewichtsmengen Bromsilber, Jodsilber und der ebenfalls schon bekannten Gesammtmenge des Chlor-, Brom- und Jodsilbers berechnet sich der Chlorgehalt im Mittel zu 59·02 Pct.

Der Kalk wurde mit oxalsaurem Ammoniak gefällt und als kohlensaurer Kalk bestimmt. Bei Anwendung von 32·956 Salz ergaben sich 0·425 Grm. kohlensaurer Kalk, entsprechend 0·516 Pct. Calcium und bei Anwendung von 40·32 Salz 0·522 kohlensaurer Kalk oder 0·518 Pct. Calcium. In der vom oxalsauren Kalk abfiltrirten Flüssigkeit wurde die Magnesia als phosphorsaure Ammon-Magnesia gefällt und als pyrophosphorsaure Magnesia gewogen. Letztere wog bei 32·95 Salz 0·656 und bei 40·32 Grm. des ursprünglichen Salzes 0·801 Grm., woraus sich im ersten Fall ein Magnesiumgehalt von 0·431 Pct. und im lezteren von 0·429 Pct. berechnet.

Die Alkalien wurden als Chlormetalle gewogen, das Kalium durch Fällung mit Platinchlorid bestimmt und das Natrium aus der Differenz ermittelt. Aus zwei Versuchen wurden im Mittel 0·733 Pct. Kalium und 37·214 Pct. Natrium gefunden.

Um die Vergleichung der Zusammensetzung des von mir untersuchten Haller Jodquellensalzes mit der des Haller Jodwassers zu erleichtern, erlaube ich mir im Nachstehenden den von mir in 100 Grm. Jodquellensalz gefundenen Mengen der Bestandtheile die in der entsprechenden Menge Jodwasser enthaltenen beizufügen. Zu lezterem benütze ich die von Herrn Dr. Kauer ausgeführte Analyse des Haller Jodwassers. (Sitzb. d. k. A. d. W. Bd. 37.)



	100 Grm. Jodquellen-salz enthalten:	Eine gleiche in Hallerwasser gelöste Menge Salz enthält nach Dr. Kauer:
Natrium	37·21	36·49
Kalium	0·73	0·15
Calcium	0·51	1·10
Magnium	0·43	0·57
Chlor	59·02	60·78
Brom	0·28	0·39
Jod	0·23	0·29
Unlösliche Bestandtheile . . .	0·42	—
Eisen	—	0·02
Aluminium	—	0·06
Silicium	—	0·09

Bringt man nun die gefundenen Mengen der Haloide mit den vorhandenen Basen in Verbindung, so bleiben zuletzt 0·34 Pct. Magnesium ungebunden. Es ist nun die Frage, in welcher Verbindung die vorhandenen 0·34 Grm. Magnesium in der wässrigen Lösung enthalten sein können. Im Haller Jodwasser erscheinen Brom und Jod an Magnesium gebunden. Beim Abdampfen des Wassers, wie es zum Behufe der Gewinnung der darin gelösten Salzmasse geschah, zerlegte sich das Brom- und Jodmagnesium theilweise, wobei sich Magnesiumoxyd und kohlensaure Magnesia bildete. Da nun die kohlensaure Magnesia im Wasser beinahe unlöslich ist, so unterliegt es keinem Zweifel, dass die grosse Menge der im Salze vorhandenen Chloralkalien die Lösung eines grossen Theils der kohlensauren Magnesia ermöglichte. Um mich hievon zu überzeugen, liess ich eine gesättigte wässrige Lösung von 50 Grm. Kochsalz etwa eine Stunde auf 0·5 Grm. *Magnesia alba* einwirken. Es gingen hiebei 0·098 Grm. Magnesium in Lösung. Berücksichtigt man nun, dass 100 Theile des Jodquellensalzes 98 Theile Chlor-, Brom- und Jodverbindungen enthalten, so wie auch, dass zur Magnesiabestimmung stets eine grössere Menge Salz und damit auch eine im Verhältniss zur vorhandenen Magnesiumverbindung sehr bedeutende Wassermenge verwendet werden

musste, so erscheint es nicht unwahrscheinlich, dass die 0·34 Grm. Magnesium als kohlensaure Magnesia in die wässrige Lösung des Salzes mit übergegangen sind.

Im Folgenden erscheint daher ein Theil des Magnesiums als kohlensaure Magnesia angeführt.

Wahrscheinliche Verbindung der Bestandtheile

	in 100 Grm.	
	des Jodquellen-salzes:	der im Jodwasser gelösten Salzmenge nach Dr. Kauer's Analyse:
Chlorkalium	1·39	0·30
Chlornatrium	94·59	92·82
Chlorammonium	—	0·55
Chlorcalcium	1·43	3·06
Chlormagnesium	0·08	1·85
Brommagnesium	0·32	0·44
Jodmagnesium	0·26	0·32
Kohlensaure Magnesia . . .	1·20	—
Im Wasser unlösliche Bestandtheile	0·42	—
Kohlensaures Eisenoxydul . .	—	0·03
Thonerde	—	0·11
Kieselsäure	—	0·19
Summe der gefundenen Bestandtheile	99·69	99·67

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, dass die relativen Mengen der wichtigsten Bestandtheile im Haller Jodquellensalze im Vergleiche zu denen des Jodwassers keinen wesentlichen Unterschied darbieten.

Über einen neuen Kohlenwasserstoff der Reihe: $\text{C}_n\text{H}_{2n-2}$.

Von Prof. A. Bauer.

In der Absicht das gebromte Diamylen $\text{C}_{10}\text{H}_{19}\text{Br}$ darzustellen, studirte ich die Einwirkung der alkoholischen Ätznatronlösung auf das Diamylenbromür ($\text{C}_{10}\text{H}_{20}\text{Br}_2$), dessen Bereitungsmethode und Eigenschaften ich früher [1]) angegeben habe. Die Reaction der Natronlösung auf das genannte Bromür ist sehr energisch und von beträchtlicher Wärmeentwickelung begleitet, erstreckt sich jedoch nicht, wie erwartet wurde, blos auf ein Molekül Bromwasserstoff des Diamylenbromürs, sondern es werden sofort beide Atomen Brom als Bromwasserstoff der Verbindung entzogen und ein neuer Kohlenwasserstoff von der Formel $\text{C}_{10}\text{H}_{18}$ gebildet.

Die Reaction verläuft demnach, nach folgender Gleichung:

$$\text{C}_{10}\text{H}_{20}\text{Br}_2 + 2\left(\begin{matrix}\text{Na}\\\text{H}\end{matrix}\Big\}\text{O}\right) = 2\,\text{NaBr} + 2\text{H}_2\text{O} + \text{C}_{10}\text{H}_{18}.$$

Der neue Kohlenwasserstoff gehört offenbar in die Acetylenreihe und steht zum Diamylen in demselben Verhältnisse, in welchem das von Reboul [2]) entdeckte Valerylen zum Amylen steht. So wie ferner das Acetylen zur Essigsäure und das Valerylen zur Valeriansäure, so verhält sich der neue Kohlenwasserstoff zur Rutinsäure und um auf letztere durch die folgende Zusammenstellung veranschaulichte Beziehungen aufmerksam zu machen, schlage ich vor, den neuen Kohlenwasserstoff Rutylen zu nennen.

$\text{C}_2\text{H}_3\text{O}$	C_2H_4	C_2H_2
(Acetyl)	(Aethylen)	(Acetylen)
$\text{C}_5\text{H}_9\text{O}$	C_5H_{10}	C_5H_8
(Valeryl)	(Amylen)	(Valerylen)
$\text{C}_{10}\text{H}_{19}\text{O}$	$\text{C}_{10}\text{H}_{20}$	$\text{C}_{10}\text{H}_{18}$
(Rutyl)	(Diamylen)	(Rutylen)

1) Sitzungsberichte d. k. Akademie. XLIII, pag. 87 und XLV, pag. 266.

2) Annalen der Chemie. CXXXI, 238.

Übrigens steht das Rutylen zur Campholsäure, seiner Zusammensetzung nach, in einer ähnlichen Beziehung wie das damit homologe Crotonylen zur Crotonsäure.

C_4H_6	$C_4H_6O_2$
(Crotonylen)	(Crotonsäure)
$C_{10}H_{18}$	$C_{10}H_{18}O_2$
(Rutylen)	(Campholsäure).

Es könnte mit Rücksicht auf diese Beziehung für den neuen Kohlenwasserstoff wohl auch der Name Campholen gewählt werden.

Das Rutylen ist dem Sebacin [1]), Camphin [2]) und dem Hydrür des Radicals von Borneocampher [3]) isomer.

Namentlich aber scheint es in sehr nahen Beziehungen zu dem gleichfalls isomeren Menthen [4]) zu stehen und es muss späteren vergleichenden Untersuchungen vorbehalten bleiben zu zeigen, ob Rutylen wirklich nur isomer oder aber identisch mit Menthen ist.

Um das Rutylen zu bereiten, wurde das Diamylenbromür, welches durch die Einwirkung von Brom auf eine ätherische Lösung von Diamylen erhalten war, so lange partieenweise mit alkoholischer Natronlösung versetzt bis die Flüssigkeit stark alkalisch war. Es waren hiezu auf 1 Mol. Diamylenbromür nahezu 2 Mol. Ätznatron erforderlich.

Hierauf wurde die Lösung längere Zeit im Wasserbade erhitzt, wobei unter erneuerter Abscheidung von Bromnatrium die alkalische Reaction wieder abnahm. Die Flüssigkeit wurde nun durch Filtration von entstandenem Bromnatrium getrennt, im Ölbade abdestillirt und das Destillat mit Wasser gefällt, wobei sich eine leichtere und grösstentheils aus dem neuen Kohlenwasserstoff bestehende ölartige Flüssigkeit abschied, welche indessen noch bromhaltig war und trotzdem dieselbe getrennt und durch 36 Stunden mit concentrirter alkoholischer Natronlösung im Wasserbade und sogar schliesslich im Ölbade durch mehrere Stunden auf 140° C. erhitzt wurde, so war es dennoch nicht möglich, dieselbe völlig von Brom zu befreien.

---

[1]) Ann. Chem. u. Pharm. XCI, 110; CIII, 184.

[2]) Claus. Ann. Chem. u. Pharm. XLIV.

[3]) Kekulé, Lehrbuch d. org. Chem. II. Bd. S. 440.

[4]) Comptes rendus 1838. (Walter.) — Oppenheim, Compt. rend. XVII und LIII.

Schliesslich wurde die, auf die eben angedeutete Weise mit Natron behandelte Flüssigkeit noch mit einigen Stückchen Natrium erhitzt und der fractionirten Destillation unterworfen. Die Hauptmasse ging bei 145—160° C. über, das Thermometer stieg übrigens rasch auf 180—200° C., jedoch waren die höher siedenden Theile die bromreicheren und es wurden daher die flüchtigen Partien einer wiederholten Destillation unterworfen, und daraus ein bei 148 bis 154° C. siedender Theil behufs der Vornahme von Analysen und der Dampfdichtenbestimmung abgesondert.

Die Analyse ergab folgende Resultate:

0·2228 Grm. Substanz gaben 0·7028 Grm. Kohlensäure und 0·2801 Grm. Wasser. 100 Theile enthalten demnach:

	Gefunden.			Berechnet.
Wasserstoff . . .	13·9	C_{10}	=	86·95
Kohlenstoff . . .	86·0	H_{18}	=	13·03
				100·00

Die Zahlen stimmen, wie man sieht, nur annähernd mit den für die Formel $C_{10}H_{18}$ berechneten überein und dies war auch bei allen anderen mit Substanzen von verschiedenen Bereitungen vorgenommenen Analysen der Fall, und rührt wie die nähere Untersuchung gelehrt hat, von einer hartnäckig anhaftenden Verunreinigung der Substanz mit einer Bromverbindung her, welche höchst wahrscheinlich in Folge eines secundären Processes bei Einwirkung des Broms auf das Diamylen entsteht.

Die nach der Methode von Dumas vorgenommene Dampfdichtenbestimmung ergab folgende Resultate:

Gewicht des mit Luft gefüllten Ballons = 90·9173
Gewicht des mit Dampf gefüllten Ballons = 91·6604

Temperatur der Wage	23° C.
Temperatur beim Zuschmelzen	195° C.
Capacität des Ballons	318 C. C.
Barometerstand	743 Millim.
Zurückgebliebenes Luftvolum	10·7 C. C.

Aus diesen Daten berechnet sich als Dampfdichte die Zahl: 4·843. Für die Formel $C_{10}H_{18}$ dagegen wurde die Dampfdichte: 4·778 berechnet.

Das Rutylen ist eine wasserhelle Flüssigkeit von eigenthümlichen, an Terpentinöl erinnernden Geruch. In Wasser ist es unlöslich, dagegen löslich in concentrirtem Alkohol und in Äther. Es siedet bei etwa 150° C. und ist leichter als Wasser.

Mit Brom verbindet sich dasselbe ähnlich wie Amylen und Diamylen unter lebhafter Temperaturerhöhung, so dass jeder Tropfen Brom sich mit demselben unter Zischen vereiniget und wenn die Reaction nicht in einem, gut auf etwa —15° C. gekühlten Gefäss erfolgt, so tritt sofort Entwickelung von Bromwasserstoff und Ausscheidung von Kohle ein. Die Verbindung, welche sich bildet, hat die Zusammensetzung $C_{10}H_{18}Br_2$. (Die Brombestimmung ergab folgendes Resultat: 0·173 Grm. Substanz lieferten 0·222 Grm. Bromsilber gleich 0·0944 Grm. Brom, was 54·5 Pct. entspricht. Die obige Formel verlangt 53·69 Pct. Brom.)

Das Rutylenbromid ist in Wasser unlöslich, in Alkohol schwer, in Äther leicht löslich und zersetzt sich bei gewöhnlicher Temperatur unter Entwickelung von Bromwasserstoff und Abscheidung von Kohle von selbst, es kann daher auch nicht der Destillation unterworfen werden, ohne dass es dadurch vollständig zerstetzt würde.

Das Rutylenbromid wirkt heftig und unter Bildung von Bromsilber auf trockenes essigsaures Silberoxyd ein, eben so wird es rasch von weingeistiger Natronlösung zerlegt, und zwar bildet sich höchst wahrscheinlich bei beiden Processen ein in die Reihe der Terpene gehöriger Kohlenwasserstoff von der Formel $C_{10}H_{16}$.

Das zu der vorstehenden Arbeit nothwendige Diamylen wurde von einem hiesigen Fabrikanten Herrn J. Hartmann in ziemlich grossem Maassstabe, und zwar aus Amylen durch Einwirkung von concentrirter Schwefelsäure dargestellt.

Ich kann nicht umhin, bei dieser Gelegenheit zu bemerken, dass ich diese Umwandlung von Amylen in Diamylen unter dem Einflusse von Schwefelsäure oder Chlorzink so wie überhaupt die Entstehung der Polyamylene aus Amylen schon im Jahre 1861 entdeckt und in diesen Berichten [1]) in einem Aufsatze betitelt: „Über das Amylen und einige damit isomere Substanzen“ veröffentlicht habe. Herr M. Berthelot hat jedoch später, und zwar im Jahre 1863 in den

[1]) Sitzungsberichte d. kais. Akademie. XLIV. 2. Abth. 87. Im Auszuge: Répertoire de Chimie pure. IV. 110. Annales de Chimie et de Physique [3] LXIII. 465.

Comptes rendus [1]) der Pariser Akademie eine Abhandlung über polymere Körper veröffentlicht, in welcher er genau dieselben Beobachtungen über die Entstehung der Polyamylene als neu publicirt, die ich zwei Jahre früher beschrieben hatte. Ich muss annehmen, dass Herrn Berthelot meine Arbeit theilweise unbekannt geblieben ist, und begnüge mich damit, diesen Irrthum hiermit zu berichtigen, um meine Priorität zu wahren.

---

1) Comptes rendus XVI. 1242.

Beitrag zur qualitativen Analyse der Chinasulfate.

Von Dr. Victor Schwarzer.

Da das Chinin in Bezug auf seine Heilkraft als eines der wichtigsten Alkaloide betrachtet werden kann, so dürfte dasselbe, bei seiner grossen Verwendung in der Medicin, bei seinem hohen Handelswerthe und bei den in neuerer Zeit in immer grösserer Menge auftauchenden, in ihrem äusseren Aussehen, in ihrem Geschmacke und in ihrer chemischen Constitution, nicht aber in ihrem Werthe als Heilmittel gleichen oder sehr ähnlichen Chinabasen, die grösste Aufmerksamkeit der Chemiker beanspruchen.

Wenn auch Verwechslungen und Verfälschungen desselben mit Chinidin und ähnlichen Stoffen selten beobachtet werden, so erscheint es vom Standpunkte der Wissenschaft, und mit Rücksicht auf die Bedürfnisse in der praktischen Pharmacie geboten, unsere Aufmerksamkeit dahin zu richten, dass durch Ausforschung leicht ausführbarer, die einzelnen Chinabasen mit grosser Genauigkeit anzeigender Reactionen, die Erkennung derselben neben und unter einander auch auf qualitativem Wege ermöglicht werde.

Zu den Resultaten der Untersuchungen, die ich auf Chinabasen bei Gelegenheit der Analyse einer im Handel unter dem Namen *B* Chinin aufgetauchten Chinasorte ausgeführt habe, kann ich, bei der grossen Verschiedenartigkeit, der für diese gegenwärtig gebräuchlichen Nomenclatur nicht übergehen, bevor ich nicht zur Erläuterung des Nachfolgenden die Gebräuchlichsten in einer Tabelle vorausschicke und bemerke, dass ich mich in dieser Hinsicht strenge an Kerner und Mann anschliesse; die bisherigen auf Chinabasen und Salze bezüglichen analytischen Methoden hingegen, finde ich mich bei dem Umstande, als dieselben schon so vielseitig eingehend besprochen wurden, nochmals zu erörtern nicht veranlasst.

Van Heinzinger und Kochs	*a* Chinin		Chinin	**nach Kerner und Mann**
detto	*b* Chinin		β Chinidin	**detto**
Lers	Chinidin	ist gleich	Cinchonidin	**Mann**
Pasteurs	Cinchonidin			
das französische	Quinidin		Cinchonidin	**Kerner**

Bei den Versuchen, die ich zur Unterscheidung des **Chinin** vom Chinidin ausgeführt habe, fand ich, dass die uns auf **Chinin** und Chinidin bereits bekannten Reagentien: Chlorwasser **Ferro** oder Ferridcyankalium und Ammon in den wässerigen **Lösungen** der schwefelsauren Salze nicht bei beiden gleichmässig rothe **Färbungen** hervorbringen, sondern dass während bei Chinin mit diesen Reagentien in der angegebenen Reihenfolge angewandt, **blos** eine rothe Färbung entsteht, die beim Umschütteln gleich verschwindet, um in eine klare grünlich-gelb Lösung überzugehen, bei einer auf dieselbe Weise bereiteten β Chinidin-Lösung ein rothbrauner voluminöser Niederschlag entsteht, der auch beim Umschütteln nicht verschwindet. Da die mit Ferridcyankalium in Chinidinsulfat-Lösungen entstandenen Niederschläge eine viel grössere Beständigkeit hatten, so setzte ich mit diesem meine Versuche fort, und fand, dass auf diese Weise das Chininsulfat von dem des β Chinidin nicht nur sehr leicht unterscheidbar, sondern, dass Verunreinigungen des ersteren Salzes mit β Chinidin bis zu 2 Pct., bei einiger Übung sogar bis zu 1 Pct. mit grosser Schärfe nachweisbar sind.

Um einen solchen Versuch auszuführen, digerirte ich eine Gramme dieser Salze mit 20 CC. Wasser bei einer Temperatur von 15°—17° C. durch $\frac{1}{2}$ Stunde, filtrirte die Flüssigkeit ab und versetzte eine kleine Menge derselben (beiläufig 1 CC.) mit eben so viel frisch bereitetem Chlorwasser, fügte 3—4 Tropfen einer wässerigen Lösung von Ferridcyankalium (von einer Concentration von $\frac{1}{2}$ Loth auf 6 Loth Wasser) hinzu, und versetzte sie mit 1—2 Tropfen Ammon; es entstand bei:

Chininsulfat	gleich verschwand, um in eine klare grünlich-gelbe Flüssigkeit überzugehen.
β Chinidinsulfat	ein rothbrauner voluminöser Niederschlag, der beim Umschütteln nicht verschwand, sondern nach längerem Stehen eine immer dunklere Farbe annahm.
Chinin mit 10 Pct. und 5 Pct. Chinidinsulfat	dieselbe Reaction, wie bei β Chinidinsulfat, nur in geringerem Grade.
Chinin mit 2 Pct. und 1 Pct. Chinidinsulfat	eine durchsichtige, intensivrothe Färbung, die beim Umschütteln eine immer dunklere Farbe annahm und nach einiger Zeit einen rothbraunen Niederschlag absetzte.

Entsteht daher mit den obigen Reagentien in einer auf die angedeutete Weise bereiteten, auf eine Verunreinigung mit β Chinidinsulfat zu prüfenden Chininsulfat-Lösung gleich oder nach einiger Zeit ein rother voluminöser bleibender Niederschlag oder eine lange andauernde rothe Färbung, so zeigen diese die Anwesenheit des β Chinidins an. Führt man mit grösseren Mengen der wässerigen Lösungen die Proben aus, so muss selbstverständlich um so mehr auch von der Ferridcyankalium-Lösung und von Ammon zugesetzt werden, als bei Zusatz von zu wenig Ferridcyankalium ein grüner Niederschlag entsteht; auch ist zu beachten, dass das Chlorwasser immer frisch bereitet sein muss, da bei Anwendung eines sehr schwachen Chlorwassers in diesen Lösungen schon vor Zusatz von Ammon weisse Niederschläge entstehen, die die weitere Reaction beeinträchtigen. Unser Bestreben muss nun dahin gehen zu erforschen, wie sich das α und γ Chinidin, welche mir bei meinen diesfälligen Versuchen nicht zu Gebote standen, und wie sich allfällige Verunreinigungen des Chininsulfates mit *Chinidinum purum* zu diesen Reagentien verhalten.

Zu diesen Versuchen führte mich die Analyse einer im Handel unter dem Namen *B* Chinin aufgetauchten Chinasorte, die ich noch hier folgen lasse:

Das *B* Chinin hat ganz ein dem officiellen Chinin ähnliches Aussehen, einen sehr bitteren Geschmack, bei einer Temperatur von 16° C. eine Löslichkeit von $^1/_{88}$, färbte in einem Polarisations-



Apparate die Ebene links blau, rechts violett und lenkte sie nach rechts ab. Mit Chlorwasser, Ferrocyankalium und Ammon gab es einen rothen voluminösen, mit Chlorwasser und Ammon einen grünen Niederschlag; 7 CC. Ammoniak von 0·96 sp. Gew. zu 5 CC. einer bei 15° C. gesättigten wässerigen Lösung gegeben, lösten den entstandenen voluminösen Niederschlag nicht auf; eben so blieb beim Versetzen von 1 CC. dieser Lösung mit 12·5 CC. und mit 12·7 CC. Ammoniak von 0·96 sp. Gew. von dem entstandenen Niederschlage ein Theil ungelöst; 1 CC. der Solution hingegen mit 15·6 CC. Ammon von obigem sp. Gew. löste den entstandenen Niederschlag ganz auf, um schon nach kurzer Zeit kleine körnige Krystalle abzuscheiden, die selbst nach dem Zusatze von einem sehr grossen Überschusse an Ammon nicht in Lösung gingen. Eine Gramme *B* Chinin wurde mit der zwanzigfachen Menge einer Seignetsalzlösung, von der vorgeschriebenen Concentration, durch einige Minuten digerirt und abfiltrirt; das Filtrat gab mit einigen Tropfen Ammon einen starken flockigen Niederschlag. Der im Filtrum zurückgebliebene Chinin-Rückstand mit Seignetsalzlösung einige Zeit gewaschen, wurde von dieser in kurzer Zeit ganz gelöst. Chlorbarium erzeugte in der wässerigen Lösung von *B* Chinin einen weissen Niederschlag, der auch nach Zusatz von Salzsäure ungelöst blieb.

Das *B* Chinin ist daher kein neues Alkaloid, sondern es ist das uns bereits unter dem Namen β Chinidinsulfat bekannte Salz.

Einige Beobachtungen über das elektrische Licht in höchst verdünnten Gasen.

Von Prof. Dr. A. v. Waltenhofen.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Mai 1865.)

„Es würde von ganz besonderem Interesse sein", sagt Plücker in einer seiner Abhandlungen über die elektrischen Gasspectren [1], „durch eine sorgfältige Beobachtung des Sauerstoffspectrums festzustellen, in welcher Aufeinanderfolge die einzelnen prismatischen Farben verschwinden, während der elektrische Lichtstrom aus dem Grunde langsam erlöscht, dass er, beim allmählichen Fortgehen des Sauerstoffgases, keine hinreichende Menge von ponderabler Materie mehr findet, die ihm als Träger dienen könnte". — Es werden ferner gewisse Erscheinungen der elektrischen Entladung im Sauerstoffe besprochen, welche den Schluss begründen, dass die weniger brechbaren Strahlen zuerst wegfallen. — An einer andern Stelle [2] kommt Plücker auf diesen Gegenstand zurück, indem er das Zutreffen der eben erwähnten Folgerung an dem bei äusserster Verdünnung eintretenden Erblassen und endlichen Erlöschen der Linie $H\alpha$, während $H\beta$ noch hell bleibt, nachweist und schliesslich andeutet, wie sich in den Verdünnungsgraden, bei welchen das elektrische Licht in der Luft immer mehr verschwindet, Anhaltspunkte zur Beurtheilung der Höhengrenze des Nordlichtes finden lassen. — Hierbei wird bemerkt, dass nach einer vorläufigen Messung etwa bei einem Barometerstande von 0·3 Millim. das Licht in der Luft zu verschwinden anfange, und bei 0·1 Millim. vollständig verschwunden sei; — dass jedoch die Höhe (von etwa 9 Meilen), welche sich hieraus für die obere Grenze des Nordlichtes ergeben würde, bedeutend hinter derjenigen zurückbleibt, welche, nach vorliegenden Beobachtungen eines solchen Meteors sich herausgestellt hat.

---

[1] Pogg. Ann. Bd. 105, S. 79.

[2] Pogg. Ann. Bd. 116, S. 51—54.

Ich hatte Gelegenheit sowohl über das successive Verschwinden der Spectrallinien, als auch über hohe Verdünnungsgrade, bei welchen Gase noch als Träger der elektrischen Entladung fungiren können, einige Beobachtungen zu machen, die ich in Anbetracht der so eben hervorgehobenen Wichtigkeit dieser Frage in Kürze mittheile.

I. Aus Anlass einer anderen Untersuchung hatte ich die Entladung eines Inductoriums in der Art veranstaltet, dass gleichzeitig die Spectra von Stickstoff, Wasserstoff und Quecksilber auftraten. — Die dabei benützte Quecksilberluftpumpe von Kravogl gestattete die Anwendung von ausserordentlichen Verdünnungen, und es war mir von Interesse, die Einwirkung derselben auf die vorgenannten drei Spectren bei dieser Gelegenheit zu beobachten.

Als die Barometerprobe [1] unter 1 Millim. zu sinken begann, war der über die rothe Wasserstofflinie ($H\alpha$) hinausragende Theil des Stickstoffspectrums bereits nicht mehr wahrzunehmen, und es verschwanden nach und nach auch die innerhalb der Linie $H\alpha$ befindlichen Streifen, so dass bei einem Barometerstande von etwa 0·5 Millim. die mindest brechbaren Theile des Stickstoffspectrums bis nahe an die Grenze von Gelb erloschen. — Bei fortgesetzter Verdünnung ging die Niveaudifferenz in der Barometerprobe (obgleich dieselbe sorgfältig ausgekocht war) aus dem positiven Sinne in den negativen über. Bei diesem Übergange waren alle zwischen den Linien $H\alpha$ und $Hg\alpha$ [2]) gelegenen Streifen des Stickstoffspectrums fast spurlos verschwunden.

So weit wäre der Verlauf der Erscheinung ganz im Einklang mit der Erwartung, dass die Spectralstreifen mit zunehmender Brechbarkeit später erlöschen; aber der violette Theil des Stickstoffspectrums zeigte eine von dieser Regel abweichende Ausnahme, indem er — ziemlich gleichzeitig mit Gelb — früher verschwand als die grünen und blauen Partien, die noch lange fortleuchteten, obgleich nicht

[1]) Die Stände der Barometerprobe werden hier angegeben, weil sie eben abgelesen und notirt worden sind, nicht aber als einigermassen verlässliche Angaben der Verdünnungsgrade. Ich habe mich durch directe Versuche mit meinem im Dingler's Journal (1862) beschriebenen Apparate genügend überzeugt, dass die Angaben von Barometerproben gewöhnlicher Construction bei hohen Verdünnungen bis zur vollständigen Unbrauchbarkeit unzuverlässig sind; aus naheliegenden Gründen, deren Erörterung nicht hierher gehört.

[2]) Gelbe Quecksilberlinie.

Lichte, welches erst bei viel höherer Verdünnung gänzlich erlosch. — Dabei zeigten sich, bis zum Momente des Erlöschens, im blauen Theile die Streifen noch immer deutlich, während sie im grünen Theile bereits spurlos verschwunden waren; dieser letztere Theil des Spectrums hatte sich schon früher in einen undeutlich begrenzten grünen Raum ohne bestimmte Schattirung verwandelt, und erschien zuletzt in einen aschgrauen schwachleuchtenden Nebel aufgelöst, der ungefähr von der Linie *Hgβ* [1]) an bis zur Mitte des Intervalles zwischen *Hgβ* und *Hβ* [2]) sichtbar war.

Mit zunehmender Verdünnung, während welcher die Barometerprobe einen negativen Stand, der zwischen 0·1 Millim. und 0·2 Millim. geschätzt wurde, angenommen hatte, sah man das Stickstoffspectrum vollständig auslöschen.

Von den beiden anderen Spectren wurde bei fortgesetztem Evacuiren zunächst das Wasserstoffspectrum angegriffen, indem erst die rothe (*Hα*) und dann die violette Linie (*Hγ*) erlosch. Unterdessen war auch die gelbe Quecksilberlinie (*Hgα*) auf einen schwachleuchtenden fahlen Streifen reducirt worden, der alsbald ebenfalls verschwand. Von den übrig gebliebenen Linien *Hβ*, *Hgβ* und *Hgγ* [3]) konnte keine mehr einzeln zum Verschwinden gebracht werden, sie verschwanden merklich gleichzeitig als bei einer Verdünnung, die sich bei näherer Untersuchung [4]) als eine 24.000malige herausstellte, das erreichte Vacuum keine sichtbare Entladung mehr vermittelte.

Während dieser Vorgänge wurden auch an der die Entladung leitenden glühenden Gassäule merkwürdige Veränderungen beobachtet, bei deren Mittheilung ich jedoch bereits bekannte Erscheinungen unerwähnt lasse, wie z. B. die Farbenunterschiede im engeren und weiteren Theile des Rohres [5]) und die Farbenänderungen bei zuneh-

---

[1]) Grüne Quecksilberlinie.

[2]) Blaue Wasserstofflinie.

[3]) Violette Quecksilberlinie.

[4]) Nach der Methode, die ich in meinem Aufsatze: „Über die Leistungen der Kravogl'schen Quecksilberluftpumpe" (Dingler p. J. 1862) beschrieben habe.

[5]) Bei diesen Versuchen diente nämlich der Apparat, dessen Beschreibung und Zeichnung der in der vorigen Anmerkung citirte Aufsatz enthält; bestehend aus einem weiten und einem engen Rohre, die durch Einkitten in eine passende Stahlfassung vereinigt sind; die andere Mündung des weiten Rohres ist mit einer an die Luft-



menden Verdünnungsgraden, so weit solche auch mit gewöhnlichen Luftpumpen erreichbar sind.

Der Lichtstrom im weiten Rohre hatte schon längst jede Spur von rothem Lichte verloren, und war in eine weissgeschichtete Säule übergegangen, als das enge Rohr noch röthlich-violettes Licht ausstrahlte. Dasselbe, offenbar vom Wasserstoff herrührend, überdauerte das vollständige Erlöschen des Stickstoffspectrums, und verschwand erst mit dem Aufhören der rothen Wasserstofflinie. Von nun an ward die Lichterscheinung auch im engen Rohre weisslich — nur in der Nähe der an diesem Rohre eingekitteten negativen Elektrode zeigte sich, bis zum gänzlichen Aufhören der Entladung, grünes Licht. Eine ähnliche grüne Lichterscheinung, jedoch viel weniger intensiv, zeigte sich an der Stelle, wo das enge Rohr in die Verbindung mit dem weiten Rohre eingekittet ist.

Nachdem das Stickstoffspectrum bereits erloschen, und bei fortgesetzter Verdünnung auch die beiden anderen Spectra schon angegriffen waren, machte sich alsbald ein veränderter Gang des Hammers am Inductorium bemerkbar, und gleichzeitig zeigten sich sehr auffallende Erscheinungen im Lichtstrome, welche andeuteten, dass man der Grenze eines die Entladung nicht mehr vermittelnden Vacuums nahe gekommen war. — Die hellen Schichtungen des Lichtstromes, welche mittlerweile immer mehr weiss erschienen und weiter aus einander gerückt waren, indem sie zugleich statt der linsenförmigen immer mehr eine ringförmige Gestalt angenommen hatten, traten jetzt nur mehr intermittirend auf, und verloren sich endlich ganz in eine continuirliche, aber schwachleuchtende stahlgraue Lichtsäule; worauf dann auch diese immer häufiger und länger intermittirte und zuletzt ganz ausblieb, — dabei war zu bemerken, dass die intermittirende schwache Lichterscheinung das

---

pumpe zu schraubenden stählernen Hahnfassung versehen, die des engen Rohres aber durch ein eingekittetes stählernes Stöpselchen, welches zugleich als Elektrode verwendbar ist, verschlossen. — Da dieser Apparat vermöge seiner ursprünglichen Bestimmung oft mit Quecksilber gefüllt worden war (wesshalb denn auch sämmtliche Fassungen aus Stahl hergestellt wurden), so sind kleine Quecksilbertröpfchen darin zurückgeblieben, — und diese waren es eben, welche bei den hier beschriebenen Versuchen stets ein so intensives Quecksilberspectrum entstehen liessen. — Übrigens sei bemerkt, dass sämmtliche Spectralbeobachtungen an dem engen Rohre gemacht worden sind.

Rohr nicht mehr ganz ausfüllte. — Als man dieser Verdünnung schon ziemlich nahe gekommen war, zeigten die in der grauen Lichtsäule bisweilen noch aufblitzenden Schichten oft eine auffallende Helligkeit.

Besonders merkwürdig sind andere Unregelmässigkeiten, die ich bei sehr hoher Verdünnung an den Schichtungen wahrgenommen habe. — Es ist bekannt, dass dieselben bei zunehmender Verdünnung weiter aus einander rücken. — Ich habe nun beobachtet, dass diese Intervalle bei Verdünnungen, welche über die mit den gewöhnlichen Luftpumpen erreichbare Grenze weit hinausgehen, sehr auffallende Ungleichheiten zeigen, indem manche von den weissen Schichten der Lichtsäule bisweilen doppelt so weit von einander abstehen als andere. Ich habe bei dem beschriebenen Versuche dunkle Intervalle von etwa 1 Centimeter, und zugleich andere von 2 Centimeter neben einander gesehen; dabei war übrigens keine regelmässige Reihenfolge oder Vertheilung bemerkbar. Zugleich erschienen die hellen Schichten nicht mehr parallel, sondern zeigten kleine unregelmässige Neigungen. Wenn, wie oben erwähnt wurde, die hellen Schichten des Lichtstromes bisweilen mit auffallender Helligkeit intermittirten, war auch ein correspondirendes helleres Aufleuchten der Spectra des Wasserstoffes und des Quecksilbers bemerkbar, während das bereits erloschene Stickstoffspectrum nicht mehr zum Vorschein kam.

Wenn nach dem Auslöschen aller Spectra allmählich Luft eingelassen wurde, traten die Lichtstreifen in umgekehrter Reihenfolge, als wie sie verschwunden waren, wieder auf; wie vorauszusehen war.

Übrigens möchte es wohl sehr schwierig sein, für jedes einzelne Spectrum die Reihenfolge, in welcher die Lichtsorten desselben successive ausgelöscht werden, mit Sicherheit festzustellen, indem es dabei auch auf die relative Helligkeit derselben ankommt. — Es kann desshalb aus dem scheinbaren Erlöschen schwächerer Spectrallinien, während hellere noch sichtbar bleiben, nicht auf das wirkliche frühere Aufhören der ihnen entsprechenden Lichtoscillationen geschlossen werden. So kann denn auch das oben erwähnte frühere Verschwinden des Violett im Wasserstoffspectrum [1]) keineswegs zur

---

[1]) Von derselben Erscheinung im Stickstoffspectrum wird später die Rede sein.

Widerlegung der Annahme dienen, dass die weniger brechbaren Lichtoscillationen zuerst aufhören. Anderseits gewinnt diese Annahme vielmehr in hohem Grade an Wahrscheinlichkeit, wenn man erwägt, dass in allen drei Spectren, von welchen oben die Rede war, in der That die am wenigsten brechbaren Streifen zuerst erloschen, und dies sogar bei der Linie $H\alpha$ der Fall war, ungeachtet ihrer grossen und im Vergleiche mit der schwachen $H\gamma$ so weit überlegenen Lichtintensität [1]).

Bei gleichzeitiger Anwesenheit mehrerer Spectra müssen die Helligkeitsverhältnisse auch den Ausschlag geben, welches von den vorhandenen Spectren zuerst angegriffen oder wohl gar ganz ausgelöscht wird [2]). — Ich kann dafür auch einen directen Versuch anführen.

II. Ein an beiden Enden mit messingenen Hahnfassungen versehenes Thermometerrohr, in welchem feine Platindrähte *als Elektroden* dienten, wurde an der Luftpumpe angebracht und in der Weise mit getrockneter Luft gefüllt, dass man einen durch Chlorcalcium geleiteten Luftstrom mittelst der Pumpe durchzog, bis man annehmen konnte, dass sowohl das Rohr als auch die damit communicirenden Räume der Pumpe trockene Luft enthalten. — Als das so vorbereitete Rohr sodann evacuirt und die Entladung eingeleitet wurde, erschien nebst dem Stickstoffspectrum noch ein lichtschwaches Wasserstoffspectrum, welches erkennen liess, dass die Austrocknung noch nicht vollständig erzielt war; und auch ein Quecksilberspectrum von geringer Helligkeit, herrührend von dem Um-

---

1) Es erlischt nämlich, wie oben gesagt wurde, erst $H\alpha$, dann $H\gamma$ und zuletzt $H\beta$.

2) Auf die Änderung dieser Helligkeitsverhältnisse der vorhandenen Spectra im Laufe des Versuches hat natürlich auch der Umstand Einfluss: welches Gas bei der Verdünnung leichter fortgeführt wird. So bemerkt Plücker (Pogg. Ann. Bd. 116, S. 51), dass bei Anwendung von Luft und Kohlensäure, wenn auch nur die geringsten Spuren von Wasser in der Röhre zurückgeblieben sind, bei der Verdünnung Kohlensäure und Luft leichter fortgeführt zu werden scheinen, als der beim durchgehenden Strome Wasserstoff gebende Wasserdampf, der am Glase condensirt ist und sich schwer von demselben ablöst. — So tritt denn endlich ein Moment der Verdünnung ein, wo die Spectralanalyse nur noch die Streifen des reinsten Wasserstoffgases gibt. — Träger der Entladung ist dann Wasserstoff allein; das ursprüngliche Gas ist nur bis zu einem gewissen Grade der Verdünnung Träger der Entladung geblieben.

stande, dass das Rohr mit einem Quecksilber haltenden Pumpenstiefel communicirte.

Bei fortgesetzter Verdünnung kamen die Linien $H\alpha$ und $H\gamma$ sogar früher zum Erlöschen [1]) als die violetten Streifen des Stickstoffspectrums, und die Linie $Hg\alpha$, während beim vorigen Versuche das Wasserstoffspectrum, wegen seiner grösseren Intensität, dasjenige war, welches zuletzt angegriffen wurde. — Das gänzliche Erlöschen der Spectra konnte bei diesem Versuche nicht zu Stande gebracht werden, aus einem später angegebenen Grunde.

III. Ein dritter Versuch wurde in einem zwei Centimeter weiten und 120 Centimeter langen Rohre gemacht, welches einmal mit atmosphärischer Luft und ein anderes Mal mit Leuchtgas zur Anwendung kam. — Wegen der viel grösseren Länge des Rohres im Vergleiche mit dem beim ersten Versuche benützten (71 Centim.) hatte ich erwartet, dass es noch leichter gelingen würde, das Aufhören der Entladung herbeizuführen. Der Erfolg ergab jedoch das Gegentheil; weder bei Anwendung von atmosphärischer Luft noch von Leuchtgas gelang es die Lichtsäule erlöschen zu machen, dieselbe war sogar bei mehr als 20.000fachen Verdünnungen noch nicht einmal intermittirend geworden.

Bemerkenswerth war die Lichterscheinung beim Leuchtgase. Die weissen Schichten der Lichtsäule, anfangs wie flache linsenförmige Scheibchen über einander gelagert, rückten bei fortgesetzter Verdünnung nicht nur immer weiter aus einander, sondern wuchsen zugleich an Dicke, indem sie dabei immer mehr die Gestalt von cylindrischen Scheiben annahmen, welche bei sehr hoher Verdünnung, etwa 1 Centim. dick, durch eben so grosse dunkle Intervalle getrennt waren. Bei zunehmender Verdünnung verloren die Ränder immer

---

1) Dieses Ergebniss ist nicht ausgeschlossen durch die in der vorigen Anmerkung besagte Angabe von Plücker: dass in der Regel die Spuren von Wasserstoff länger zurückbleiben als die Luft (Stickstoff); es beweist eben nur, dass im vorliegenden Falle die Austrocknung der Luft vollständiger bewirkt worden ist, als es in der Regel zu gelingen pflegt. — Bei diesem Versuche ist denn auch die Vorsicht beobachtet worden, die Luftpumpe keinen Augenblick mit der äusseren Luft communiciren zu lassen; die ausgepumpte Luft wurde vielmehr in den zuvor evacuirten und mit Chlorcalcium ausgetrockneten grossen Ballon übergeführt, welcher der benützten Luftpumpe für gewisse Zwecke beigegeben ist. (Siehe die Beschreibung Sitzungsberichte Band 44.)

mehr ihre deutliche Begrenzung, und die hellen Schichten lösten sich in dieser Weise allmählich in einen continuirlichen Lichtstrom von geringerer Helligkeit auf.

Es mögen nun einige allgemeine Bemerkungen über die angeführten Versuche folgen; dabei sollten die bei den Versuchen I, II und III benützten Röhren, der Kürze wegen, ebenfalls beziehungsweise mit I, II und III bezeichnet werden.

Dass bei den Versuchen II und III das Auslöschen der Spectra durch fortgesetzte Verdünnung nicht gelang, wohl aber jedesmal bei den Versuchen I, findet seine Erklärung in der verschiedenen Form der Elektroden. — Während nämlich bei den Röhren II und III Drahtspitzen als Elektroden dienten, geschah die Entladung im Rohre I zwischen einem am oberen Ende eingekitteten, etwa 1 Millim. dicken stumpfen Drahtstifte und der am unteren Ende angebrachten Hahnfassung.

Aus den beschriebenen Versuchen ergeben sich nachstehende Folgerungen.

Erstens. Von jedem einzelnen Spectrum erlöschen — in Übereinstimmung mit der von Plücker aufgestellten Regel — bei hinreichender Verdünnung die weniger brechbaren Streifen früher als die brechbareren; und es ist wahrscheinlich, dass sich diese Reihenfolge bewährt, so weit nicht eine zu geringe relative Helligkeit brechbarerer Spectrallinien scheinbare Ausnahmen bedingt.

Zweitens. Wenn mehrere Spectra gleichzeitig auftreten, ist die Reihenfolge, in welcher sie bei zunehmender Verdünnung angegriffen oder wohl gar ausgelöscht werden, von den relativen Intensitäten der vorhandenen Spectra und insofern von dem Mischungsverhältnisse des glühenden Gasgemenges abhängig.

Diese beiden Sätze scheinen mir auch für die Chemie nicht ohne Bedeutung zu sein. Unter Voraussetzung derselben würde sich nämlich in gewissen Fällen über die Zusammengesetztheit eines gasförmigen Körpers entscheiden lassen. — Wenn sich z. B. in einem bei fortgesetzter Verdünnung beobachteten Spectrum zeigen würde: dass eine Spectrallinie von grösserer Brechbarkeit, selbst bei gleicher oder grösserer Helligkeit im Vergleiche mit einer anderen weniger brechbaren, dennoch früher verschwindet als diese, so wäre damit

offenbar die Zusammengesetztheit des untersuchten Gases angedeutet, indem man — um diese Erscheinung mit den obigen Sätzen in Einklang zu bringen — das beobachtete Spectrum als eine Übereinanderlagerung mindestens zweier Spectra betrachten müsste, welche verschiedenen materiellen Trägern der Entladung angehören [1]).

Drittens ergibt sich aus den obigen Versuchen, dass die Schichtungen des elektrischen Lichtes, welche bei zunehmender Verdünnung zunächst immer weiter aus einander rücken und anwachsen, bei noch höheren Verdünnungen unregelmässig und intermittirend werden, und dann allmählich verschwinden, indem sie sich in einen continuirlichen Lichtstrom auflösen, der endlich selbst erlischt.

Die überraschende Ausdehnung, welche die Schichtenintervalle bei sehr hohen Verdünnungen gewinnen, macht die weitere Untersuchung wünschenswerth: ob bei so hohen Verdünnungsgraden in einzelnen Fällen nicht auch dort Schichtungen auftreten, wo man bisher noch keine bemerken konnte [2]), indem entweder unter dem Einflusse der elektrischen Entladung eine Zerlegung eines für einfach gehaltenen Gases stattfinden könnte, dessen Bestandtheile dann — im Sinne der Hypothese von Reitlinger — nach Massgabe ihrer verschiedenen Leitungsfähigkeit die Schichten bilden, — oder sei es, dass in manchen Fällen erst bei sehr hohen Verdünnungen jene stellenweisen Discontinuitäten eintreten, welchen Riess die Schichtenbildung zuschreibt.

Der Gedanke an eine Zerlegung der erwähnten Art wird auch durch die Erwägung nahe gelegt, dass das stromleitende Gas bei zunehmender Verdünnung bis zu einer gewissen Grenze nothwendig auch höhere Temperaturen annehmen muss, wesshalb denn auch die

---

[1]) Wenn schon der Farbenreichthum des Stickstoffspectrums im Vergleiche mit anderen Gasspectren auffallend ist, so ist es noch mehr das frühere Erlöschen der violetten Streifen im Vergleiche mit manchen weniger brechbaren, von kaum grösserer Helligkeit. Dieser Umstand lässt, nach dem so eben Gesagten, die Einfachheit dieses Körpers sehr zweifelhaft erscheinen. — Dagegen wäre man beim Wasserstoff durch das frühere Erlöschen von $H\gamma$ im Vergleiche mit der viel helleren $H\beta$ keineswegs zu einer ähnlichen Vermuthung berechtigt.

[2]) Z. B. bei einfachen Gasen. Siehe Reitlinger, „Über die Schichtung des elektrischen Lichtes“ (Sitzungsberichte Bd. 43. II. S. 21).

in immer geringerer Anzahl auftretenden Schichten immer mehr weissglühend erscheinen, bis jene oben beschriebenen Erscheinungen eintreten, welche dem Aufhören der Entladung in einem nicht mehr leitungsfähigen Vacuum vorausgehen.

Viertens zeigen die obigen Versuche, dass die Verdünnung, bei welcher die Entladung erlischt, auch von der Wahl der Elektroden abhängt, und dass, wenn die Entladung zwischen Spitzen eingeleitet wird, dieselbe auch bei mehr als zwanzigtausendfacher Verdünnung noch nicht aufhört [1]. — Man kann dieses Ergebniss wohl überhaupt auf solche Fälle ausdehnen, wo man es mit Elektroden zu thun hat, welche das Überströmen der Elektricität in einer der Spitzenwirkung analogen Weise begünstigen, wie z. B. fein zertheilte Körper von entsprechender Leitungsfähigkeit.

Man sieht aus den angeführten Thatsachen, dass das bei einem gewissen Verdünnungsgrade beobachtete Erlöschen des elektrischen Lichtes nicht unbedingt zur Folgerung berechtigt, dass das angewendete Gas bei diesem Verdichtungsgrade nicht mehr fähig sei als Träger der Entladung zu dienen, da die Beschaffenheit der Leiter, welche die Gassäule (als Elektroden) begrenzen, den Übergang der Entladung in das Gas bald mehr und bald weniger leicht vermitteln [2]. — Könnte man eine Luftsäule von 20.000maliger Verdünnung, — welche in den beschriebenen Versuchen bei Anwendung von stumpfen Elektroden nicht mehr, wohl aber zwischen Spitzen die Entladung aufgenommen hat — ohne ihren Verdünnungsgrad zu ändern, mit einer andern Gassäule, in welcher eine Entladung bereits eingeleitet ist, in unmittelbare Communication setzen: ohne Zweifel würde sich diese Entladung auch in jene Luftsäule verbreiten. — Wendet man das Gesagte auf die Atmosphäre an, so wird man zu dem Ergebnisse gelangen müssen: dass auch in die Region der 20.000mal

[1]) Wenn Plücker bemerkt, dass nach einer vorläufigen Messung, etwa bei einem Barometerstande von 0·3 Millim. das Licht in der Luft zu verschwinden anfängt und bei 0·1 Millim. vollständig verschwunden ist (Pogg. Ann. Bd. 116, S. 53), so muss man wohl annehmen, dass bei dem betreffenden Versuche keine Spitzen als Elektroden gedient haben dürften.

[2]) In wie fern es dabei auch auf die Spannungsintensität des Inductoriums ankommt, bedürfte noch näherer Untersuchungen.

ihren Ursprung haben, sich verbreiten können; ja, sehr wahrscheinlich sogar in noch viel höhere, wenn man die obigen Versuche in nähere Erwägung zieht. — Die mehr als 20.000fach verdünnte Luft hatte zwischen Spitzen die Entladung noch so vollständig vermittelt, dass kein Intermittiren der Lichtsäule, und überhaupt kein Vorzeichen eines die Leitung versagenden Verdünnungsgrades eingetreten ist. — Man kann daher wohl annehmen, dass erst viel höhere Verdünnungen zu dem Punkte führen würden, wo die Entladung desshalb aufhört, weil die Luft nicht mehr fähig ist als deren Träger zu fungiren.

Mit Rücksicht auf die Umstände, unter welchen die elektrischen Entladungen, die das Nordlicht verursachen, in der Atmosphäre vor sich gehen, wäre nach dem Gesagten wohl vorauszusetzen: dass die Grenze der Erhebung, über welche hinaus die Verdünnung der Luft solche elektrische Lichtströmungen nicht mehr gestatten würde [1]), weit über jene reichen müsse, die man gewöhnlich als „Höhe der Atmosphäre" anzunehmen pflegt [2]). — Diese Annahme wäre denn auch vereinbar mit den Beobachtungen des Nordlichtes, wovon Plücker in der citirten Abhandlung erwähnt.

---

1) Zufolge den von Plücker (Pogg. Ann. Bd. 116, S. 53) gegebenen Andeutungen etwa 9 Meilen; wenn man nach der Formel $346{\cdot}023\,\frac{h}{R} = \log\frac{B}{b}$ rechnet, wobei h die Höhe, R den Erdhalbmesser, B und b beziehungsweise den unteren und oberen Barometerstand bedeuten.

2) Nach Dämmerungsbeobachtungen berechnet kaum 10 Meilen.

Untersuchungen über die Entwickelung der Bachforelle.

Von Dr. S. Stricker,

Assistenten am physiologischen Institute und Privat-Docenten an der Wiener Universität.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Mai 1865.)

Verschiedene Furchungszustände befruchteter Forelleneier haben mir Bilder zur Anschauung gebracht, welche vornehmlich geeignet scheinen die neueren Anschauungen über diesen Process in nicht geringem Grade zu unterstützen.

Vermuthungsweise hat sich Kölliker [1]) dafür ausgesprochen, es könnten der Furchung Bewegungsphänomene zu Grunde liegen. Max Schulze [2]) hat sich schon bestimmt darüber geäussert, indem er die Falten, welche von den ersten Furchen der Batrachiereier auslaufen, zu Gunsten vitaler Contractionen deutete. Später habe ich [3]) mich, auf directe Beobachtung vitaler Vorgänge gestützt, dieser Ansicht angeschlossen.

Meine gegenwärtigen Angaben über die Forelleneier sind nun der Annahme von Bewegungserscheinungen als Grundlage der Furchung auffallend günstig. Was ich anzuführen weiss, bezieht sich allerdings nur auf todte Formen. Aber diese Formen sind so bezeichnend, dass wir von ihnen Act nehmen müssen.

Rusconi [4]), welcher die künstliche Befruchtung von Fischen zuerst für wissenschaftliche Zwecke ausbeutete, hat schon die Furchung bei den Cyprinoiden mit vieler Genauigkeit untersucht. Nach seiner unten angeführten Publication ist von späteren Forschern über die Furchung nichts wesentlich Neues mitgetheilt worden.

---

[1]) Entwickelungsgeschichte.

[2]) De ovorum ranarum segmentatione.

[3]) Sitzungsberichte, 49. Bd.

[4]) Müller's Archiv 1836. Ein Brief an E. H. Weber.

Reichert) zu einem Hügel, welcher sodann nach einem bestimmten Typus zerklüftet wird. Ich kann nicht daran zweifeln, dass die Abbildungen, welche dem angeführten Briefe beigegeben wurden, naturgetreu sind. Noch überzeugender sind die künstlerisch schön ausgeführten Abbildungen in dem grossen Atlas von Coste, welche gleichfalls einen regelmässigen Zerfall des hügeligen Keimes von *Gasterosteus* darlegen. Nichtsdestoweniger muss ich einen Vorgang beschreiben, welcher mit der bezeichneten Regelmässigkeit sehr wenig gemein hat, einen Furchungsvorgang, welcher vollkommen aus der Art schlägt. Unregelmässigkeiten in der Furchung haben allerdings wenig zu bedeuten. Das haben schon viele Autoren hervorgehoben. Was ich mitzutheilen habe, betrifft aber einen ganz neuen Modus, der um so auffallender erscheinen muss, als Karl Vogt die Furchung von *Coregonus palea* beschrieb und hier nahezu dieselben Resultate zu Tage förderte, wie Rusconi [1]) bei den Cyprinoiden, wie später Lerebouillet [2]) bei Hechten und Barschen und Coste [3]) bei den Stichlingen. Man sollte doch kaum erwarten, dass zwischen *Salmo fario* und *Coregonus* ein so durchgreifender Unterschied Platz greifen könnte. Ich muss allerdings sagen, die Abbildungen von Vogt sind lange nicht so überzeugend, wie jene von Coste, immerhin aber geben sie Anhaltspunkte genug, um den Werth meiner Aussagen und Abbildungen zweifelhaft erscheinen zu lassen.

Was indess die letzteren anlangt, so beziehen sie sich auf Präparate, welche bleibend conservirt und übrigens in ihren räumlichen Beziehungen so leicht verständlich sind, dass sie der Zeichner von mir unabhängig abbilden konnte. Es kann also nur die Frage übrig bleiben, ob diese aufbewahrten Präparate nicht Kunstproducte seien. Darauf muss ich antworten, dass ich allerdings die Eier in verdünnter Chromsäure erhärtete, dass ich die dicken Eihüllen mit der Pincette abzog, und dann ein Segment des kugeligen Eies, auf welchem sich der Keim befand, in Wasser oder sehr verdünnter

---

[1]) l. c.

[2]) Annales des sciences 4. serie. T. 1, 2. Bei den Hechten sagt Lerebouillet soll schon nach der ersten Furche kein bestimmter Typus eingehalten werden.

[3]) Histoire de Développement des corps organ.



Chromsäure unter festen Verschluss brachte. So hat der Beobachter gegenwärtig den erhärteten Keim vor Augen (*K* in Fig. 1 und 2) und als Hintergrund jene Schichte fettähnlicher Kugeln, welche den Keim umgeben. Es kann nun eingewendet werden, die Chromsäure habe Kunstproduc te fertig gebracht, welche keinen Rückschluss auf die wirklichen vitalen Vorgänge erlauben. Ein solcher Einwand hat im Ganzen wenig Berechtigung, da es uns gar nicht bekannt ist, dass Eier in Folge der Einwirkung von Chromsäure Fortsätze treiben. Wenn wir ihn aber gelten lassen, wird er nur erhoben werden können gegen die Präparate, welche in Fig. 1, 2 und 3 abgebildet sind. Fig. 7 und 6 geben ja bekannte Furchungszustände, an deren Existenz niemand zweifelt. Fig. 5 zeigt einen solchen Furchungszus tand an einer grösseren Hälfte des Keimes und *selbst* Fig. 4 ist schon zu complicirt, um glauben zu lassen, das Präparat, nach welchem es gezeichnet ist, sei ein Kunstproduct. Wenn aber die zuletzt namhaft gemachten Abbildungen nicht Kunstproducten entsprechen, so lehrt ein Blick auf die ersten drei Abbildungen, dass wir uns einer aufeinander folgenden Reihe gegenüber finden, und wir haben schliesslich kein Recht anzunehmen, dass die Chromsäure bei Eiern eines gewissen Alters Kunstproducte hervorbringe, ähnlich den Producten, welche an Eiern, die um wenige Stunden älter sind, von Natur aus vorhanden sind.

Eine directe Controle durch Vergleiche mit lebenden Eiern konnte ich nicht anstellen, weil die Bilder, welche man durch die Eihülle sehen kann, an Klarheit sehr viel zu wünschen übrig lassen, und ich glaube nicht, dass Jemand im Stande sein wird, die Furchung an frischen Forelleneiern zu studiren, ohne die Phantasie zu Hilfe zu nehmen.

Ich habe nach dem Vorausgeschickten den Abbildungen nur noch durch eine kurze Erläuterung zu Hilfe zu kommen.

Der Keim des Forelleneies erhebt sich wie bei anderen Knochenfischen zu einem Hügel, und rings um denselben bildet sich eine beinahe kreisförmige Rinne (*T* in Fig. 1).

Wenn man den aus Körnchen und Plättchen mit einer nach der Einwirkung des Reagens coagulirten Zwischensubstanz zusammengesetzten Keim abhebt, hat man eine tellerförmige Grube vor sich, welche von einer Lage fettähnlicher Kugeln ausgekleidet wird, mit einer Fortsetzung des den Keim umgebenden ähnlich zusammenge-

setzten Saumes. (*S*, Fig. 1.) Aus dieser derartig bedeckten tellerförmigen Grube erhebt sich der Keim.

Eine Reihe in kurz auf einander folgenden Intervallen ausgehobener Eier zeigte mir den Keim unter mannigfachen Formen. Ich glaubte diese Formverschiedenheiten am besten dadurch zu erläutern, dass ich zwei Präparate in Fig. 1 und 2 abbilden liess. An dem einen sitzt seitlich ein Buckel mit breiter Basis auf (*B*, Fig. 1). An dem zweiten sitzen deren drei auf, und es zeigt sich ferner die Umgrenzung des Keimes uneben, höckerig (Fig. 2).

An einem etwas älteren Eie (Fig. 3) zeigte sich der Keim zu zwei Massen abgeschnürt, zu einer oberen kleineren und einer unteren grösseren. Jede von diesen zeigte wieder mehrere secundäre Einschnürungen und Ausbuchtungen. Noch ältere Eier brachten mir der Reihe nach Bilder, wie sie in den Fig. 4, 5, 6 und 7 in leicht verständlicher Weise wieder gegeben sind.

Fig. 5 *a)* zeigt einen Durchschnitt, der annäherungsweise der in Fig. 5 abgebildeten Furchungsstufe entspricht. Es zeigt sich hier, dass die Zerklüftung in die Tiefe greift, und dass der zerklüftete Keim auf jener Schichte von Kugeln aufsitzt, wie ich sie oben als Auskleidung der tellerförmigen Grube beschrieb.

Ich will mich nicht von dem Vorwurfe frei machen, dass ich nicht genug nahe an einander stehende Furchungszustände beobachtet habe. Es ist schon möglich, das mir Bilder entgangen sind, welche vielleicht die Unterschiede zwischen den von mir und den von anderen Autoren gegebenen Darstellungen ausgleichen. Die Furchung der im December gelaichten Forelleneier dauert nahe an 48 Stunden, und ich möchte mich nicht eine Winternacht hindurch bei dem Brutapparate exponiren, um eine Frage von ganz untergeordnetem Werthe zu lösen. Die Hauptsache bleibt für den Embryologen immer, dass er die Embryonen, mit welchen er sich beschäftigen will, auch in der Furchung beobachtet. Für diesen Zweck reicht die Reihe, welche ich dargestellt habe, hin. Das Factum, welches bei den Forellen ein specielles Interesse bietet, die Formveränderung des Keimes nämlich, die schien mir festgestellt, und ich hatte nicht weiter Lust, die Kenntniss noch so und so vieler Zwischenstufen mit bedeutenden Opfern zu erkaufen.

Den befruchteten Keim des Forelleneies betrachte ich nunmehr als ein sehr junges Protoplasma, dessen erste sichtbare Lebens-

äusserung darin besteht, dass es seine Form verändert, dass es Buckel austreibt, welche sich nach und nach abschnüren. Dieser Process macht zum mindesten einen sehr wesentlichen Theil der Furchung aus.

Wenn die Theilung so weit gediehen ist, dass man die einzelnen Abschnitte mit der Loupe kaum mehr wahrnehmen kann, wird der Keim allmählich platt gedrückt, so dass er endlich die tellerförmige Grube vollständig ausfüllt, und mit seiner Oberfläche die Oberfläche des Nahrungsdotters zu einer Kugelfläche ergänzt. Eine Kreislinie zeigt eben noch die Grenzen des Keimes an, welcher sich an erhärteten Eiern durch seine weissliche Farbe, an frischen Eiern durch seine Undurchsichtigkeit auszeichnet. Er erscheint im durchfallenden Lichte als dunkler Fleck.

Bald breitet sich der Keim aus. Die kreisförmige Grenzlinie wird immer grösser. So lange als der Keim plattgedrückt die tellerförmige Grube ausfüllte, war die Zellenvertheilung in ihm eine ziemlich gleichmässige. Mit der Ausbreitung über diese Grube hinaus ändert sich auch die Zellenvertheilung. Die Hauptmasse ist in der Peripherie angesammelt, während sich der centrale Theil auf eine immer dünner werdende Schichte reducirt. Gleichzeitig hebt sich dieser dünne centrale Theil von der Unterlage ab. Es kommt zur Bildung einer Höhle (in Fig. 8 auf dem Durchschnitte dargestellt), deren Grund von dem Boden der tellerförmigen Grube, und deren Decke von dem verdünnten centralen Theile des Keimes gebildet wird.

In frischen Eiern macht sich dieser Zustand dadurch kenntlich, dass der centrale verdünnte Theil des Keimes, jener welcher die Höhle deckt, durchscheinend ist, während der verdickte äussere Rand, wegen der massenhaften Zellenanhäufung dunkel wird. Während also ursprünglich das gesunde Ei durch einen dunklen Fleck kenntlich war, ist jetzt ein helles Feld von einem dunklen Ringe umgeben das Zeichen, welches auf eine normale Entwickelung schliessen lässt. In erhärteten Eiern macht sich die periphere Zellenanhäufung oder der Randwulst des Keimes durch seine weissliche Färbung bemerkbar. Die zellige Brücke, welche die Höhle deckt, sinkt in der Regel ein, und ist aus diesem Grunde auch ohne weitere Präparation bemerklich. (Diesem Einsinken ist es zuzuschreiben, dass der Zeichner die genannte Stelle so scharf contourirte

derselben Methode verfertigt ist, wie ich sie bei einer andern Gelegenheit [1]) ausführlich beschrieben habe, wird nach der bisherigen Schilderung ohne Weiters klar sein. Ich habe ihn mit der eingedrückten Decke abbilden lassen, weil ich der Phantasie des Zeichners keinen Spielraum lassen wollte, die Präparate aber in keiner andern Weise zu erhalten sind).

Welche Bedeutung die Höhle habe, kann ich vorläufig nicht mit Bestimmtheit aussagen. Ihrer Lage nach ist sie jener Höhle ähnlich, welche am Vogelei gleichfalls vom Keime bedeckt ist. Ob sie aber dieselbe Rolle spielt, ist schon wegen der Lage des Embryo schwer zu beurtheilen. Coste, welcher die Zellenanhäufung in der Peripherie des Keimes kannte, sagte uns schon, dass die Entwickelung des Embryo bei Knochenfischen eine excentrische sei. Da indessen Coste den Embryo nicht früh genug abbildet, fand ich mich dennoch bewogen, die ersten Anfänge im Centrum zu suchen. Namentlich nachdem ich die Höhle gefunden hatte, war es gar zu verlockend, die Decke mit dem Vogelkeime zu analogisiren. Ich habe mich indessen bald überzeugt, dass mein Suchen vergeblich sei. Die Decke wird in ihrer ganzen Ausdehnung so dünn, dass im centralen Theile nichts mehr zu hoffen übrig blieb. Eine Stelle des Randwulstes wird aber inzwischen auffallend dick und das ist thatsächlich die Rückenanlage. Sie ist mässig erhaben, verlängert sich sehr bald in der Richtung gegen das Centrum des Keimes und zeigt dann auch in der Mittellinie (dem Durchmesser des Kreises entsprechend) eine seichte Rinne. Die Rinne reicht aber nicht direct bis an die äussere kreisförmige Begrenzung des Keimes, sondern sie stösst hier an eine kaum merkliche Erhabenheit (in Fig. 9 abgebildet). Die ganze Embryonal- oder besser Rückenanaloge ist eben so wie der Randwulst, als dessen Abschnitt er zu betrachten ist, durch seine weissliche Färbung im erhärteten Ei und durch seine Dunkelheit im frischen Ei kenntlich, wenn es im durchfallenden Lichte betrachtet wird. In seiner ersten Anlage ist also der Rückentheil des Embryo ganz ausserhalb jener Höhle gelegen. Es ist nichts destoweniger möglich, dass diese zur Bildung der Nahrungshöhle beiträgt. Es könnte ja hart vor dem centralen Ende des Rückens

[1]) Archiv für Physiologie. 1864. 1. Heft.



(entsprechend in Fig. 9 *a*) zur Bildung einer Kopfkappe kommen, und demgemäss die Leibeshöhle abgeschnürt werden. Ich habe allerdings bis jetzt auf keinem Querschnitte einen Anhaltspunkt für eine solche Annahme gefunden. Bei der Kleinheit des Objects ist aber der negative Befund wenig massgebend, zumal es mir bis jetzt überhaupt nicht gelungen ist, der Bildung der Leibeshöhlen zu folgen. Ich will übrigens später noch auf einen andern Bildungsmodus der Leibeshöhlen aufmerksam machen, bis wir nur der Umwachsung des Nahrungsdotters gefolgt sein werden.

Die früher erwähnte seichte Rinne in der Mittellinie der Rückenanlage wird allmählich tiefer und gibt sich als Rückenfurche, als Anlage des Centralcanals zu erkennen. Die Rückenanlage wird allmählich länger, die Rückenfurche schliesst sich, und inzwischen breitet sich der Keim über den Dotter aus (vergleiche die Fig. 11 bis 15). Mit dieser Ausbreitung muss auch der Randwulst an Ausdehnung zunehmen, u. z. so lange, bis die Hälfte des Nahrungsdotters umwachsen ist.

Hier erscheint schon der Keim, wenn er in toto noch diesen Namen verdient, wie eine Kappe über den Dotter gezogen. So wie die Ausbreitung noch weiter schreitet (Fig. 13, 14) muss der Randwulst kleiner werden, und wenn die Umwachsung endlich vollendet ist, dann ist der Randwulst in das Schwanzende des Fisches aufgegangen (Fig. 4).

Mit Rücksicht auf diese Bildung kann man nun sagen, *die Entwicklung des Embryo bei den Knochenfischen ist keine excentrische, sondern eine periphere.* Während bei Vögeln das Centrum des *discus proligerus* zum Embryo wird, ist es hier die Peripherie; sammeln sich hier in der Peripherie jene Zellen, welche dort im Centrum als Rückenschild etc. die bekannten Bilder liefern.

Es lässt sich nicht verkennen, dass das Hervorquellen des Nahrungsdotters aus dem schon stark verengerten Randwulste ein Bild bietet (Fig. 14), welches sehr lebhaft an jene Zustände der Batrachiereier erinnert, wo der Dotterpfropf noch eine beträchtliche Ausdehnung hat. Solche Vergleiche mögen es wohl gewesen sein, welche Rusconi dazu bewogen haben, von der Bildung einer Afterhöhle bei Fischen zu sprechen.

Um diesen Ausspruch des um die Entwickelungsgeschichte niederer Wirbelthiere so hochverdienten Forschers einer möglichen

Möglichkeit eines Bildungsmodus der Leibeshöhlen bei Knochenfischen nunmehr ausführen.

Wenn wir nämlich die aufgefundene Höhle mit der Furchungshöhle der Batrachier in Analogie zu setzen versuchen, dann ergibt sich die Möglichkeit, dass die Nahrungshöhle auch dort wie da vom Schwanzende aus anfange, und es wird nicht geleugnet werden können, dass vorläufig eine Reihe von Anhaltspunkten zu Gunsten einer solchen Auffassung sprechen. Die Höhle unter dem Keime der Forelleneier schwindet wenigstens in ihrer grössten Ausdehnung eben so wie die Furchungshöhle der Batrachier. Der Rückentheil des Embryo nimmt zu der Höhle im Fischei eine seitliche Stellung ein, gerade so wie die Rückenhälfte [1]) zur Furchungshöhle der Batrachier. Endlich ist hinter dem Schwanzende des Fischembryo eine Zeit lang eine Communication mit der Aussenwelt vorhanden, äusserlich wenigstens, vollkommen ähnlich mit den entsprechenden Zuständen bei Batrachiern.

Ich kann nicht umhin, bei dieser Gelegenheit ferner das Argument in's Feld zu führen, dass es höchst wunderbar erscheinen muss, dass die erste Zellengruppirung bei Batrachiern auf einem so ausserordentlich complicirten Wege zu Stande komme, während alle anderen Wirbelthiere nach einem relativ einfachen Schema zu ihrer ersten Leibeshöhle gelangen sollten. Es muss also immerhin nahe liegen, diese Frage vorläufig dahin zu erledigen, dass wir die Batrachier eben ganz genau kennen, was bei keinem anderen Wirbelthiere in gleichem Grade der Fall ist.

Ich habe die Möglichkeit einer Analogie angedeutet, weil ich aus mehreren Äusserungen entnehme, dass sie Rusconi bestimmt vorgeschwebt habe. Ohne bei einer so wichtigen Frage für irgend eine hypothetische Anschauung eintreten zu wollen, mag die angeführte Erläuterung dazu dienen, das Suchen nach bestimmten Richtungen anzuregen.

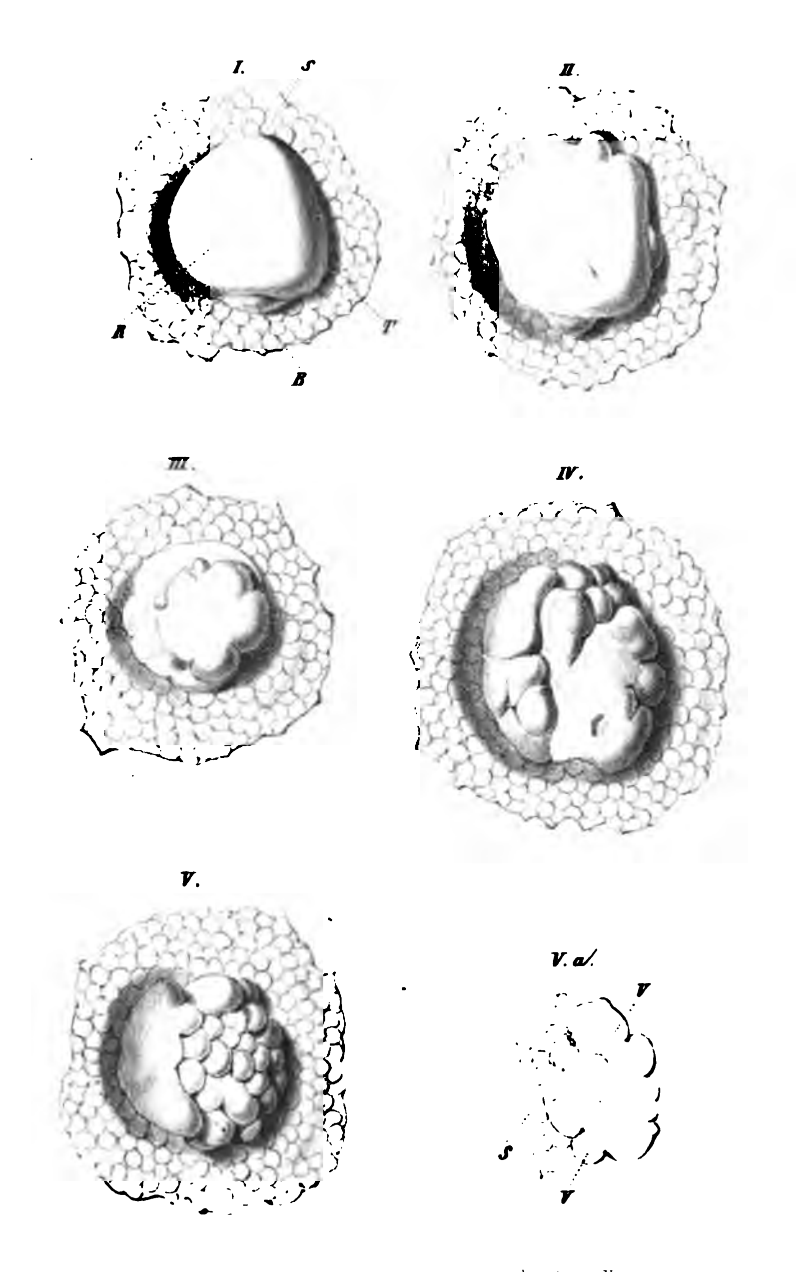
---

[1]) In dem Sinne wie ich das Wort in „Untersuchungen etc." in Zeit. f. nat. Zool. Bd. XI gebrauchte.



Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Ein Segment eines Forelleneies 20 Stunden nach der Befruchtung.
K Keimschicht.
B ein an der Seite desselben hervorragender Buckel.
T die den Keim umgebende Rinne.
S die Lage fettartiger Kugeln in der Umgebung des Keimes.
„ 2, 3, 4, 5, 6, 7 zeigen den Keim in mannigfachen Furchungszuständen.
„ 5 *a* ist ein Durchschnitt durch einen Keim dem Alter nach entsprechend, dem in Fig. 5 abgebildeten. *S* ist die Auskleidung der tellerförmigen Grube, in welcher der Keim liegt.
V. Furchungsabschnitte.
„ 8 stellt einen Durchschnitt durch einen Keim, unter welchem schon eine Höhle *C* sichtbar ist.
„ 9 *a* einen Durchschnitt durch einen in der Entwickelung etwas vorgerückteren Keim. *D* ist die bereits verdünnte Decke, *M* die Zellenmasse in der Umgebung, dem Randwulst entsprechend.
„ 9 bis 15 zeigen die Umwachsung des Dotters durch den Keim *E.* *Embryo*-nalanlage in Fig. 10 mit einer deutlichen Rückenfurche. *W.* Randwulst.


I.
S
R
T
B
II.
III.
IV.
V.
V. a/.
V
S
V



VI.

VII.

VIII.

C

IX.

W

E

IX. a.

D

D

M

C

X.

W

E

XI.

W

E

XII.

E

W

XIII.

E

W

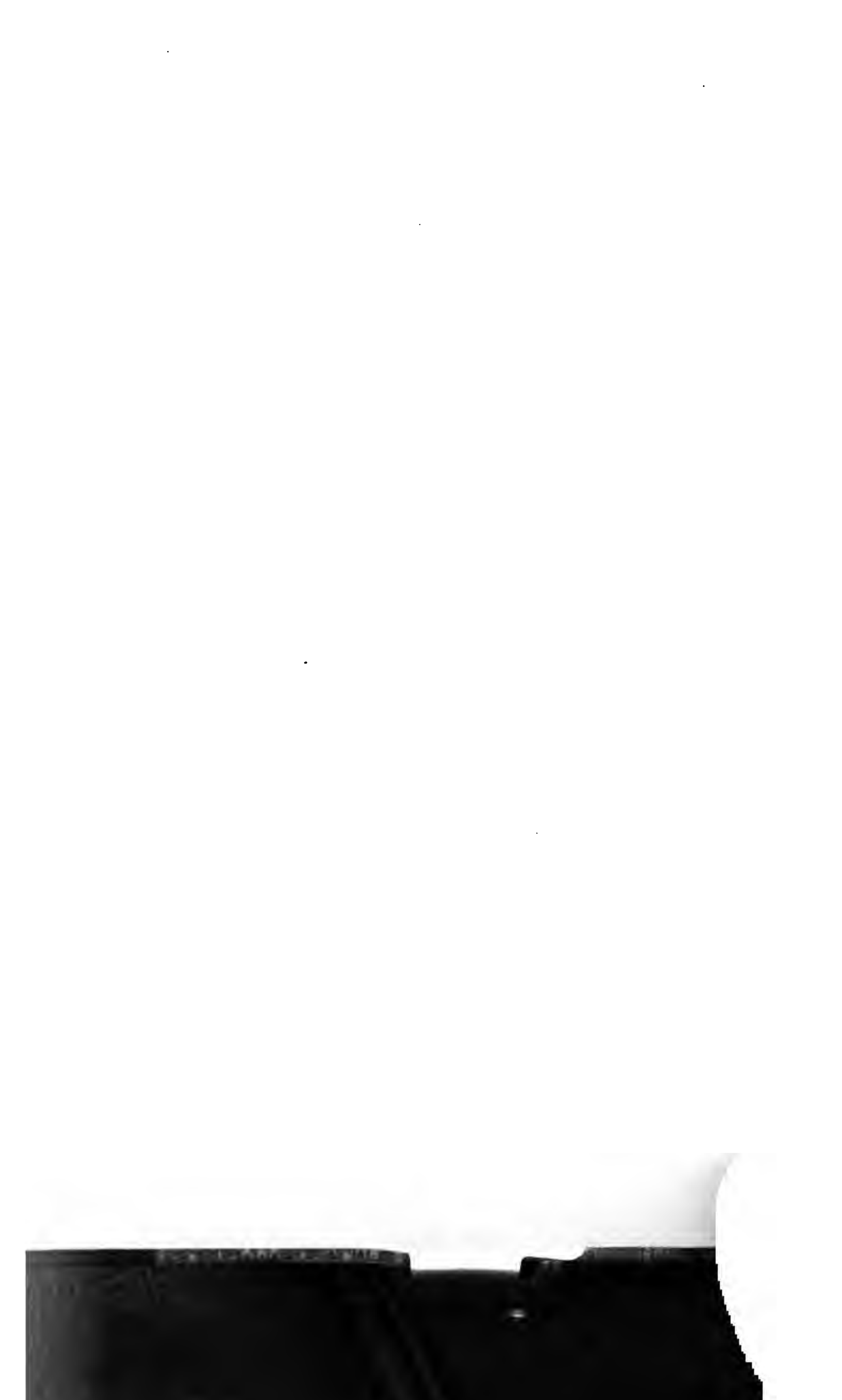
XIV.

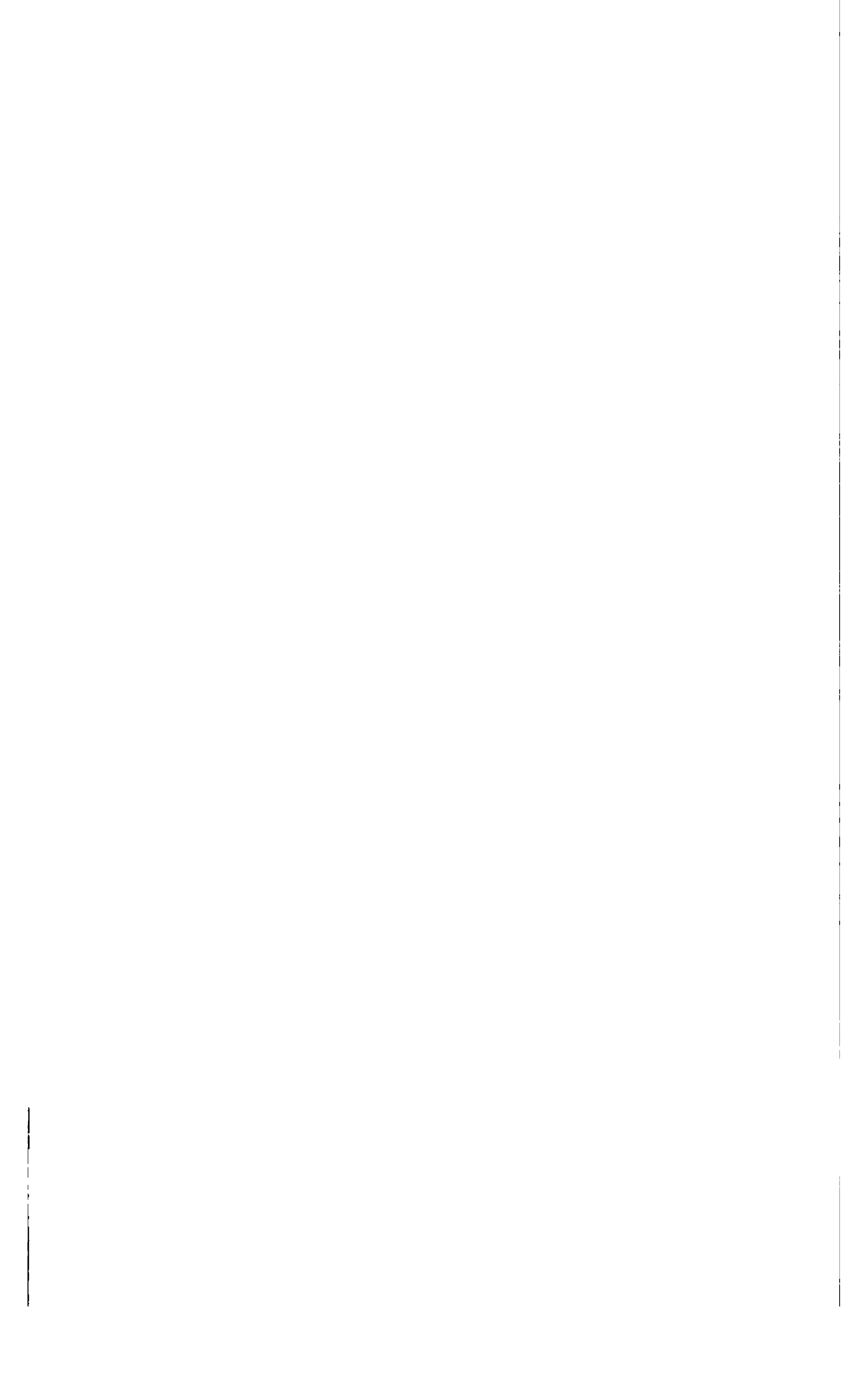
E

W

XV.







Die jedem Fachmanne bekannten, bei der raschen Entwickelung der Wissenschaft von Jahr zu Jahr sich steigernden Unzukömmlichkeiten, welche mit der cumulativen Herausgabe von Abhandlungen verbunden sind, die sich auf sämmtliche naturwissenschaftliche Fächer beziehen, haben die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften bestimmt, ihre Sitzungsberichte in zwei gesonderten Abtheilungen erscheinen zu lassen.

Die **erste Abtheilung** enthält die Abhandlungen aus der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Geologie und Paläontologie; die **zweite Abtheilung** die aus der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

Von jeder dieser Abtheilungen erscheint jeden Monat mit Ausnahme von August und September ein Heft, welches drei Sitzungen umfasst. Der Jahrgang enthält somit zehn Hefte.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine vollständige Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen voran, selbst wenn diese nicht zur Aufnahme in die Schriften der Akademie bestimmt werden.

Der Preis des Jahrganges beträgt für eine Abtheilung 12 Gulden ö. W.

Von allen grösseren Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und sind durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn zu beziehen.













